

# 零对称和反对称二进小波及其 在边缘检测中的应用

许传祥

石青云

程民德

(北京大学数学科学学院 北京 100871)(北京大学信息科学中心 北京 100871)(北京大学数学科学学院 北京 100871)

**摘要** 本文从信号处理与分析的实际需要出发,对二进小波的构造问题进行了研究,成功地构造出了适合作边缘检测和描述的两类具有零对称性的二进小波:一类是以零点为对称点的对称二进小波,另一类是以零点为反对称点的反对称二进小波,这些结果丰富了二进小波的理论,并为利用二进小波进行边缘检测打下了坚实的基础。还从计算理论和算法两个方面讨论了这两类二进小波在边缘检测、分类及刻画中的应用。理论分析和实验结果都表明,基于二进小波变换的边缘检测、分类与描述算法,具有计算复杂度低、速度快、抗噪声能力强等优点。

**关键词** 零对称性,二进小波变换,边缘检测

## 1 引言

边缘提取是图象处理和计算机视觉最重要、最经典的研究课题之一,具有重要的理论价值和实用意义。本文讨论了二进小波变换的构造、性质及其在边缘检测、分类与刻画中的应用。用于原始图象往往含有噪声,而边缘和噪声在空间域表现为灰度有较大的起落,在频率域则反映为同是高频分量,这就给真正边缘的检测带来困难,于是发展了多尺度分析的边缘检测方法<sup>[1,2]</sup>。小波分析与多尺度分析有着密切的联系,而且在小波变换这一统一理论框架下,可以更深刻地研究多尺度分析的边缘检测方法。二进小波变换作为小波变换的主要类型之一,具有时间(空间)连续性和平移不变性,在信号处理与分析中占有重要地位。遗憾的是,虽然文献[3,4]等给出了正交小波和双正交小波的构造理论,但二进小波的构造理论却一直处于空白。文献[5,6]给出了一些二进小波,但这些二进小波均不具备零对称性和速降性,因此不合作边缘检测和描述,这就限制了二进小波理论的研究与应用。我们从信号处理与分析的

实际需要出发,对这一问题进行了研究,成功地构造出了适合作边缘检测和描述的两类二进小波:一类是以零点为对称点的对称小波,另一类是以零点为反对称点的反对称小波,这些结果丰富了二进小波的理论,并为利用二进小波进行边缘检测及信号处理打下了坚实的基础。我们还研究了这两类二进小波在边缘检测、分类及刻画中的应用,给出了完整的算法和实验结果。

本文在节2介绍了二进小波变换的基本概念:在节3中,给出了二进小波的构造理论和具体例子,并分析了这些小波的性质;在节4中给出了数字信号二进小波变换的快速算法;在节5中利用已构造出的二进小波进行边缘检测,首先研究了对称二进小波适合作屋顶状边缘检测,反对称二进小波适合作阶跃状边缘检测的理论根据,接着给出了边缘检测的算法和计算机上的实验结果。

## 2 二进小波变换

下面简要介绍二进小波变换的一些基本概念,进一步的细节请参见文献[5,6]。

• 部分由863-2-5高技术项目资助  
收稿日期:1996.02.12

定义 2.1(一维二进小波)

函数  $\Psi(t) \in L^1(R) \cap L^2(R)$  称为一个二进小波,若存在常数  $0 < A \leq B < \infty$ ,使得

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\Psi}(2^j \omega)|^2 \leq B \quad (1)$$

注:式(1)是在  $L^2(R)$  空间中成立的,即在几乎处处的意义下成立,以后类似的地方不在一一指出。

定义 2.2(一维二进小波变换)

$\{W_{2^j} f\}_{j \in \mathbb{Z}}$  叫做  $f$  的一维二进小波变换,其中,

$$\begin{aligned} W_{2^j} f(t) &= f * \Psi_{2^j}(t) \\ &= \frac{1}{2^j} \int_R f(x) \Psi\left(\frac{t-x}{2^j}\right) dx \end{aligned}$$

注:①  $W_{2^j} f^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\Psi}(2^j \omega)$

②  $A \|f\|_2^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|W_{2^j} f\|_2^2 \leq B \|f\|_2^2$

③ 二进小波变换是平移不变的,

记  $f_\tau = f(x-\tau)$ ,

则  $W_{2^j} f_\tau(X) = W_{2^j} f(x-\tau)$

定义 2.3(二维二进小波)

函数对  $\{\Psi^1(x, y), \Psi^2(x, y)\}$  称为二维二进小波,如果存在  $0 < A \leq B < \infty$  使得:

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} [|\hat{\Psi}^1(2^j \omega_x, 2^j \omega_y)|^2 + |\hat{\Psi}^2(2^j \omega_x, 2^j \omega_y)|^2] \leq B$$

定义 2.4(二维二进小波变换)

$Wf = \{W_{2^j}^1 f(x, y), W_{2^j}^2 f(x, y)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  叫做  $f(x, y)$  的二维二进小波变换,其中,

$$W_{2^j}^1 f(x, y) = f * \Psi_{2^j}^1(x, y);$$

$$W_{2^j}^2 f(x, y) = f * \Psi_{2^j}^2(x, y)$$

3 二进小波的构造理论及其例子

本节讨论二进小波的构造理论,分别给出适合阶跃状边缘检测的反对称二进小波和适合屋顶状边缘检测的对称二进小波的构造方法及具体例子。这里仅给出主要结论,细节和证明已有专论,此处不再赘述。

定义 3.1(母二进小波)

满足如下四个条件的函数  $\varphi(t) \in L^2(R)$  被称为一个母二进小波

(1)  $\varphi(t)$  是偶函数,即  $\varphi(-t) = \varphi(t)$ ;

(2)  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\varphi}(\omega) = 1$ ; (3)  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\varphi}(\omega) = 0$ ;

(4)  $\hat{\varphi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$ , 且  $H(\omega)$  满足

(i)  $H(\omega) \in L^2([- \pi, \pi])$ ; (ii)  $|H(\omega)| \leq 1$ ;

注:我们称  $H(\omega)$  为母二进小波  $\varphi(t)$  的生成元。

定理 3.2

设  $\varphi(t)$  是一个母二进小波,  $H(\omega)$  为其生成

元,  $N$  是任意固定的正整数,  $(a_1, \dots, a_N)$  是满足  $\sum_{k=1}^N |a_k| < 1$  的任意  $N$  维实数组,则由  $\hat{\Psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$  定义的  $L^2(R)$  中,函数  $\Psi(t)$  是一个二进小波。其中

$$G(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \sqrt{1 - |H(\omega)|^2} \right)$$

注:定理 3.2 的一个特殊情形就是  $N=1, a_1=0$ , 此时

$$G(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{1 - |H(\omega)|^2}$$

因为它是计算其它  $G(\omega)$  的基础,我们给它一个特殊记号  $G^0(\omega)$ 。

定理 3.3

定理 3.2 中定义的  $G(\omega)$  有如下性质:

(1)  $G(\omega) \in L^2([- \pi, \pi])$ ;

(2)  $G(\omega)$  是一个奇函数,

即  $G(-\omega) = -G(\omega)$ ;

(3) 记  $G(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-in\omega}$  是  $G(\omega)$  的 Fourier 级数,则有  $g_n = -g_{-n}, g_0 = 0$  特别地,

$$G^0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n^0 e^{-in\omega}, g_n^0 = -g_{-n}^0, g_0^0 = 0$$

(4)  $g_n = g_n^0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k (g_{n-k}^0 + g_{n+k}^0)$

注:定理 3.3 中(4)给出的公式描述了不同反对称二进小波之间的关系。

定理 3.4

条件同定理 3.2, 则由  $\hat{\Psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$  定义的  $L^2(R)$  中,函数  $\Psi(t)$  是一个二进小波。其中

$$G(\omega) = \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \right) \sqrt{1 - |H(\omega)|^2},$$

注:记  $G^0(\omega) = \sqrt{1 - |H(\omega)|^2}$ , 它是  $G(\omega)$  的一种特殊情形。

• 许传祥,石青云,程民德. 二进小波的构造理论( I )——一维母二进小波及其调制函数. 已投自然科学进展.

•• 许传祥,石青云,程民德. 二进小波的构造理论( II )——一维二进小波. 已投自然科学进展.

••• 许传祥,石青云,程民德. 二进小波的构造理论( III )——二维二进小波及其例子. 已投自然科学进展.

•••• 许传祥,石青云,程民德. 适于边缘检测的二进小波. 已投中国科学.

**定理 3.5**

定理 3.4 中定义的  $cG(\omega)$  有如下性质:

- (1)  $cG(\omega) \in L^2([-\pi, \pi])$ ;
- (2)  $cG(\omega)$  是一个偶函数, 即  $cG(-\omega) = cG(\omega)$ ;
- (3) 记  $cG(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n g_n e^{-in\omega}$ , 是  $cG(\omega)$  的 Fourier 级数, 则有:  $c_n g_n = c_{-n} g_{-n}$ , 特别地,  $cG^0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n g_n^0 e^{-in\omega}$ ;
- (4)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n g_n = 0$ ,  $2 \sum_{n \geq 1} c_n g_n = -g_0$ ;
- (5)  $c_n g_n = c_n g_n^0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k (c_n g_{n-k}^0 + c_n g_{n+k}^0)$

注: 定理 3.5 中(5)给出的公式描述了不同对称二进小波之间的关系。

**定理 3.6**

设  $\varphi(t)$  为一个母二进小波,  $H(\omega)$  为其生成元,  $N, M$  是任意正整数,  $(a_1, \dots, a_N)$  和  $(b_1, \dots, b_M)$  是满足  $\sum_{k=1}^N |a_k| < 1$  和  $\sum_{k=1}^M |b_k| < 1$  的任意实数组,  $\Psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  是由  $\hat{\Psi}(2\omega) = cG(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$  定义的函数, 其中

$$cG(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \sqrt{1 - |H(\omega)|^2} \right),$$

$\xi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  是由  $\hat{\xi}(2\omega) = L(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$  定义的函数, 其中

$$L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \sum_{k=1}^M b_k \cos k\omega \sqrt{1 + |H(\omega)|^2} \right),$$

$\Psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  是由  $\hat{\Psi}(2\omega) = cG(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$  定义的函数, 其中

$$cG(\omega) = \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \sqrt{1 - |H(\omega)|^2} \right).$$

则

(1)  $\{\Psi^1(x, y), \Psi^2(x, y)\}$ , 是一个二维反对称二进小波, 其中

$$\Psi^1(x, y) = \Psi(x) \cdot \xi(y),$$

$$\Psi^2(x, y) = \xi(x) \cdot \Psi(y)$$

(2)  $\{\Psi^2(x, y)\}$ , 是一个二维对称二进小波, 其中

$$\Psi^1(x, y) = c\Psi(x) \cdot \xi(y),$$

$$c\Psi^2(x, y) = \xi(x) \cdot c\Psi(y)$$

根据上面给出的一维和二维二进小波的构造理

论, 我们以中心  $B$  样条为基础, 给出一些二进小波的例子。

**定义 3.7 ( $m$  阶中心  $B$  样条)**

$N_m(t)$ :

$$N_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

$$N_m(t) = N_{m-1} * N_1(t), \quad m \geq 2$$

通过简单的计算可得:

$$\begin{aligned} \hat{N}_m(2\omega) &= \left[ \frac{\sin \omega}{\omega} \right]^m = \left[ \frac{\cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right]^m \\ &= \left( \cos \frac{\omega}{2} \right)^m \hat{N}_m(\omega) \end{aligned}$$

$$\text{令 } H(\omega) = \left( \cos \frac{\omega}{2} \right)^m,$$

则  $\hat{N}_m(2\omega) = H(\omega) \hat{N}_m(\omega)$

由此可以知道  $N_{2m}(t)$  是一个母二进小波。但是  $N_{2m+1}(t)$  不是母二进小波, 这是因为  $\hat{N}_{2m+1}(2\omega) = H(\omega) \hat{N}_{2m+1}(\omega)$ ,  $H(\omega) = \left( \cos \frac{\omega}{2} \right)^{2m+1}$ , 此时  $H(\omega)$  不再是一个以  $2\pi$  为周期的函数。大部分文献中用  $\tilde{N}_{2m+1}(t) = N_{2m+1}(t - \frac{1}{2})$  来解决这一问题, 但此时零对称性已破坏, 不适宜作边缘检测。我们按下面的方式来解决这一问题。

对于任意非负整数  $m$ , 令

$\tilde{N}_{2m+1}(t) = \frac{1}{2} N_{2m+1}(\frac{t}{2})$ , 则  $\tilde{N}_{2m+1}(t)$  是一个母二进小波, 且

$$\hat{\tilde{N}}_{2m+1}(2\omega) = H(\omega) \hat{\tilde{N}}_{2m+1}(\omega),$$

$$H(\omega) = (\cos \omega)^{2m+1}$$

**第一类例子:** 若是以  $\tilde{N}_3(t)$  为基础的二进小波,

则

$$\begin{aligned} H(\omega) &= (\cos \omega)^3 = \left( \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} [e^{-3i\omega} + 3e^{-i\omega} + 3e^{i\omega} + e^{3i\omega}] \end{aligned}$$

因此,  $h_0 = 0, h_{-1} = h_1 = \frac{3}{8}, h_{-2} = h_2 = \frac{1}{8}$ 。有关的滤波器系数见表 1。

表 1 以  $\tilde{N}_3(t)$  为基础的二进小波  
Table 1 Dyadic wavelets based on  $\tilde{N}_3(t)$

n	$a_1=0.0$		$a_1=-0.64$		$a_1=-0.78$		$a_1=-0.80$	
	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$
0	.776516		.776516		.776516		.776516	
1	.0	.776516	-.191525	.33465	-.233422	.309673	-.239407	.297703
2	-.177999	.420518	-.177999	.037467	-.177999	-.046325	-.177999	-.058296
3	.0	.420518	.086553	.210573	.105486	.164647	.108091	.158087
4	-.092479	.235560	-.092479	.025615	-.092479	-.020310	-.092479	-.026871

n	$sg_n$				$l_n$			
	$a_1=0.0$	$a_1=0.28$	$a_1=0.68$	$a_1=0.88$	$a_1=0.0$	$a_1=0.18$	$a_1=0.38$	$a_1=0.58$
0	.0	.0	.0	.0	.806281	.686007	.588470	.515217
1	.579798	.579798	.579798	.579798	.0	.067169	.121639	.162549
2	.0	.093333	.226667	.293333	.070887	.060312	.051737	.045297
3	.086869	.086869	.086869	.086869	.0	.007417	.013432	.017949
4	.0	.013022	.031625	.040927	.025973	.022098	.018956	.016592

第二类例子:若是以  $N_4$  为基础的二进小波,则

$$H(\omega) = \left( \frac{2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} [e^{-2i\omega} + 4e^{-i\omega} + 6 + 4e^{i\omega} + e^{2i\omega}]$$

因此,  $h_0 = \frac{3}{8}, h_{-1} = h_1 = \frac{1}{4}, h_{-2} = h_2 = \frac{1}{16}$ 。有关的滤波器系数见表 2。

表 2 以  $N_4$  为基础的二进小波  
Table 2 Dyadic wavelets based on  $N_4(t)$

n	$a_1=0.0$		$a_1=-0.48$		$a_1=-0.68$		$a_1=-0.72$	
	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$	$g_n$	$g_0+2\sum_{i=1}^n g_i$
0	.804857		.883328		.916024		.922563	
1	-.163482	.477893	-.333123	.217081	-.403807	.108410	-.417944	.086675
2	-.098017	.281860	-.047634	.121812	-.026642	.055126	-.022443	.041788
3	-.046444	.188972	-.017547	.086719	-.005506	.044114	-.003098	.035593
4	-.022389	.144194	-.008015	.070688	-.002026	.040061	-.000829	.033935

n	$sg_n$				$l_n$			
	$a_1=0.0$	$a_1=0.58$	$a_1=0.68$	$a_1=0.88$	$b_1=0.0$	$b_1=0.18$	$b_1=0.38$	$b_1=0.58$
0	.0	.0	.0	.0	.7906821	.673382	.591237	.524791
1	.556418	.523696	.518054	.506770	.066190	.117592	.161131	.192760

### 4 离散二进小波变换

$$\tilde{d}_n = \begin{cases} d_n & 0 \leq n < N \\ d_{2N-1-n} & N \leq n < 2N \\ d_{-n-1} & -N < n < -N \end{cases}$$

$$(\dots)_{2^j}(u) = \sum_l c_l u_{n-2^j l}$$

#### 定义 4.2

记  $D = \{d_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}, B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, C = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , 则  $D$  和  $(B,C)$  的  $2^j$  尺度离散卷积定义为:

$$\begin{aligned} D * (B,C)_{2^j}(n,m) &= \sum_l b_l (\sum_k c_k d_{n-2^j l, m-2^j k}) \\ &= \sum_k c_k (\sum_l b_l d_{n-2^j l, m-2^j k}) \end{aligned}$$

即先对  $D$  的每一行用  $C$  做  $2^j$  尺度离散卷积, 将计算结果的每一列用  $B$  做  $2^j$  尺度离散卷积; 或者先对  $D$  的每一列用  $B$  做  $2^j$  尺度离散卷积, 将计算结果每一行用  $C$  做  $2^j$  尺度离散卷积。

下面我们仍用  $H, G, L$ , 表示节 3 中给出的滤波器  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{l_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , 则数字信号二进小波变换的快速算法如下:

#### 算法 4.3 (一维信号二进小波变换)

信号  $D = \{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$   
 $j=0, S_1^d D = D$   
 while  $j < J$   
 $W_{2^{j+1}}^d D = (S_{2^j}^d D * G)_{2^j}$   
 $S_{2^{j+1}}^d D = (S_{2^j}^d D * H)_{2^j}$   
 $j=j+1$   
 End of while

#### 算法 4.4 (数字图象二进小波变换)

图象  $D = \{d_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$   
 $j=0, S_1^d D = D$   
 while  $j < J$   
 $W_{2^{j+1}}^d = S_{2^j}^d D * (G, L)_{2^j}; W_{2^{j+1}}^{2d} = S_{2^j}^d D * (L, G)_{2^j}$   
 $S_{2^{j+1}}^d = S_{2^j}^d D * (H, H)_{2^j}$   
 $j=j+1$   
 End of while

在实际问题中处理的信号都是时间、空间有限的, 即一维信号  $D = \{d_n\}_{0 \leq n < N}$ , 二维信号  $D = \{d_{n,m}\}_{0 \leq n < N, 0 \leq m < M}$ , 因此必须解决离散卷积的边界问题。一种简便且有效的办法是将原信号做对称延拓:

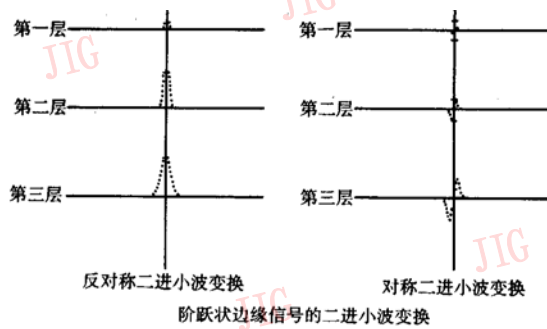


图1 反对称二进小波,  $\Psi$  适合检测阶跃状边缘  
 Fig.1 Zero-antisymmetrical dyadic wavelet  $\Psi$  suits for detection of the Step-form edge

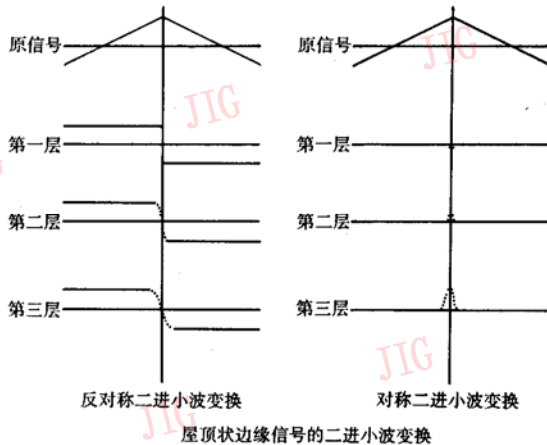


图2 对称二进小波,  $\Psi$  适合检测屋顶状边缘  
 Fig.2 Zero-Symmetrical dyadic wavelet  $\Psi$  suits for detection of the roof-form edge

### 5 基于二进小波变换的边缘检测与分类算法及实验结果

图1,2表明,反对称二进小波  $s\Psi$  适合检测阶跃状边缘,对称二进小波  $c\Psi$  适合检测屋顶状边缘。实验得出的这些结论是具有普遍性的,这是由它们的性质所决定的:

#### 性质 1

二进小波  $s\Psi$  和  $c\Psi$  都是零对称的,

即 $c\Psi(-t) = c\Psi(t)$ ,  $s\psi(-t) = -s\psi(t)$ , 对应的 $cg_{-n} = cg_n$ ,  $sg_{-n} = -sg_n$ , 因此都不会产生时间(或空间)偏移, 这是这些小波比以前的小波优越点之一, 也是它们适合作边缘检测的前提。

### 性质 2

$\sum_{n \in Z} cg_n = 0$ ,  $\sum_{n \in Z} sg_n = 0$ , 即它们都是高通滤波器, 这是它们适合作边缘检测的基础。

### 性质 3

$$\begin{aligned} & z^{-1} \cdot \dots \\ &= \frac{1}{2} [d_{n-1} - d_{n+1}] \\ &= \frac{1}{2} [(d_{n-1} - d_n) + (d_n - d_{n+1})] \end{aligned}$$

即 $W_2^1 D$ 相当于原始信号求一阶差分, 离散信号的一阶差分相当于连续信号的一阶导数。于是 $W$

不妨近似为 $cg_0 = 1$ ,  $cg_1 = cg_{-1} = -\frac{1}{2}$ ,  $cg_n = 0$ ,  $n \neq 0, 1, -1$ , 则

$$\begin{aligned} cW_2^1 D(n) &= (S_1 D)(n) - \frac{1}{2} (S_1 D)(n-1) \\ &\quad - \frac{1}{2} (S_1 D)(n+1) \\ &= d_n - \frac{1}{2} d_{n-1} - \frac{1}{2} d_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} [(d_n - d_{n-1}) - (d_{n+1} - d_n)] \\ &= -\frac{1}{2} [(d_{n+1} - d_n) - (d_n - d_{n-1})] \end{aligned}$$

即 $W_2^1 D$ 相当于对原始信号求二阶差分, 离散信号的二阶差分相当于连续信号的二阶导数, 于是 $W$ 相当于二阶导数, 因此二进小波 $c\Psi$ 小波适合检测屋顶状边缘。

### 性质 5

$\varphi, \xi$  都是零对称的平滑函数, 相当于对原始信号进行平滑, 以去掉噪声, 而且不会产生时间(空间)

偏移。

从图 1, 2 的试验结果可以看出, 反对称二进小波变换在屋顶状边缘附近会呈现“双峰”现象, 对称二进小波变换在阶跃状边缘附近会呈现“双峰”现象, 这就启发我们提出空间一致性约束: 在信号的二进小波变换中多个层次上都是极值点的位置才能代表边缘点。利用这一约束,  $s\psi, c\psi$  不仅能检测边缘, 而且还能对边缘进行分类。

#### 算法 5.1 (一维信号奇异点检测与分类)

$D, \dots, W_2^j D, S_2^j D;$

(3) 对  $W_2^j D$ ,  $j=1, \dots, J$  进行阈值处理: 即若

$|W_2^j D(n)| < \varepsilon$ , 则  $W_2^j D(n) = 0$ ;

(4) 检测  $W_2^j D$ ,  $j=1, \dots, J$  的局部模极大值点:  $t_j[0], \dots, t_j[S_j]$

(5) 利用空间一致性约束得到奇异点  $t[0], \dots,$

#### 算法 5.2 (图象信号边缘检测与分类)

输入: 图象信号  $D = \{d_{n,m}\}_{0 \leq n < N, 0 \leq m < M}$ ,

输出: 图象边缘及类型

算法流程:

(1) 选择二进小波  $\{\psi^1, \psi^2\}$ , 分解层次  $J$  和模阈值  $\varepsilon$ ;

(2) 对  $D$  进行二进小波变换得到:  $\{W_2^1 D, W_2^2 D\}, \dots, \{W_2^j D, W_2^j D\}, S_2^j D;$

(3) 计算模值  $M_2^j D$ :

$$M_2^j D(n, m) =$$

$$\sqrt{|W_2^j D(n, m)|^2 + |W_2^j D(n, m)|^2};$$

(4) 对模值  $M_2^j D$ ,  $j=1, \dots, J$  进行阈值处理; 若  $|M_2^j D(n, m)| < \varepsilon$ , 则置  $M_2^j D(n, m) = 0$

(5) 计算幅角  $A_2^j D$ : 若  $M_2^j D(n, m) = 0$ , 则  $A_2^j D(n, m) = 0$

$$\text{若 } |W_2^{2j} D(n, m)| < \text{tg} \frac{\pi}{8} \cdot |W_2^{1j} D(n, m)|,$$

$$\text{则 } A_2^j D(n, m) = 1;$$

若  $|W_2^j D(n, m)| < \text{tg} \frac{\pi}{8} \cdot |W_2^{2j} D(n, m)|$ ,

则  $A_2^j D(n, m) = 3$ ;

若  $W_2^j D(n, m) \cdot W_2^{2j} D(n, m) > 0$ , 则  $A_2^j D(n, m) = 2$ ; 否则  $A_2^j D(n, m) = 4$ ;

(6) 检测  $M_2^j D$ ,  $j=1, \dots, J$  的局部极大值点  $(n_j[0], m_j[0]), \dots, (n_j[S_j], m_j[S_j])$ , 即模在  $A_2^j D$  所指示的方向在呈局部极大值的点;

(7) 利用空间一致性约束得到极值点

$(n[0], m[0]), \dots, (n[s], m[s])$ ;

(8) 形成极值点图  $MD, AD$ ;

$$MD(n, m) = \begin{cases} \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J M_2^j D(n, m) \\ 0 \end{cases};$$

$$AD(n, m) = \begin{cases} A_2^j D(n, m) \\ 0 \end{cases}$$

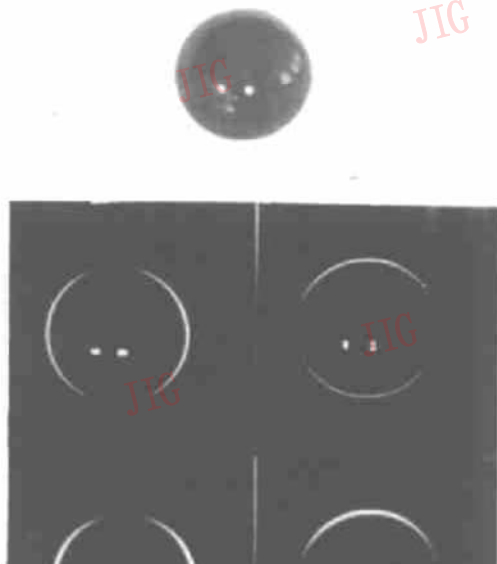


图3  
Fig. 3

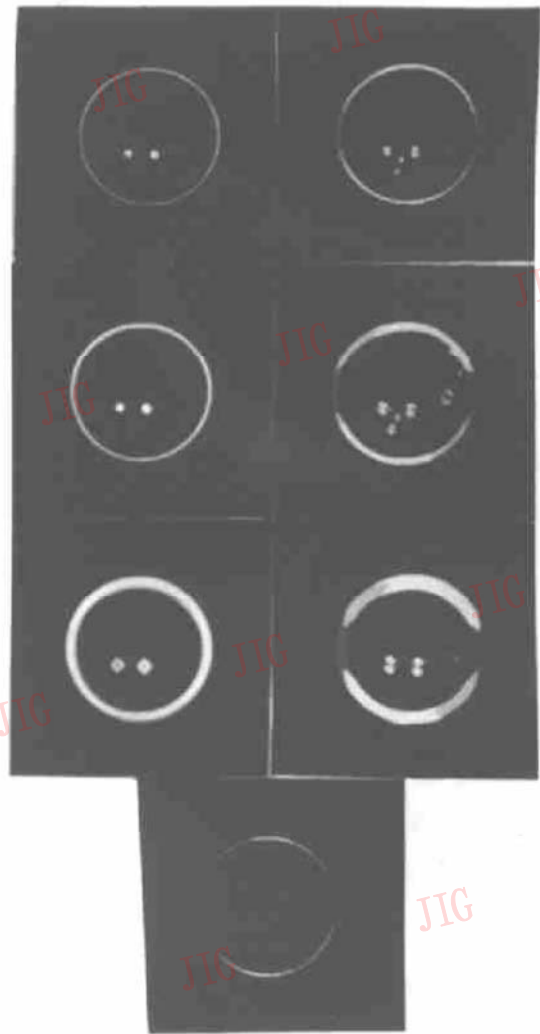


图4  
Fig. 4

(9) 形成极值链: 把边缘图中那些位置相邻近, 模值  $MD$  相近的点链接起来, 形成极值链:  $Chain[0], \dots, Chain[r-1]$ ;

(10) 除去短的极值链: 图象中的边缘都有一定

(12) 输出结果 停止。

我们在计算机上对本文提出的算法进行了实验。图3顶部是原图象, 下面三行给出了该图象的二进小波变换  $W_2^j D$  和  $W_2^{2j} D$ , 其中  $j=1, 2, 3$ , 尺度从上而下递增; 它们的模值  $W_2^j D$  和  $A_2^j D$  在图4中的上面三行给出, 图4的底部是检测到的边缘图。

## 6 小 结

## 参 考 文 献

[1] J. Canny. A Computational approach to edge detection

波变换具有平移不变性、零对称(或反对称)性、速降性、高通滤波性等特点,它为边缘检测、分类与刻画提供了一个强有力的工具。其次,我们从计算理论和算法两个方面研究了二进小波变换在边缘检测、分类与刻画中的应用,并在计算机上对上述算法进行了实验,给出了完整的实验结果和分析。理论分析和实验结果都表明,这些算法具有计算复杂度低、速度快、抗噪声能力强等优点。

[4] A. Cohen, I. Dubechies & J. C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Commun. on Pure and Applied Mathematics*, 1992, Vol. XLV, pp. 485-560.

[5] S. Mallat and Sifen Zhong. Characterization of signals from multiscale edges, *IEEE Trans. on PAMI*, 1992, Vol. 14, no. 7, July.

[6] M. G. Sun, Robert J. Sclabassi, C. C. Li & Y. P. Zhang. Symmetrical wavelet transform for edge localization, *Optical Engineering*, 1994, Vol. 33, No. 7, pp. 2272-2281, July.

许传祥, 1996年毕业于北京大学并获博士学位。现在北京大学数学科学学院信息科学系工作。主要研究领域为计算机视觉、小波分析和图象处理等。

## Zero-Symmetrical and Zero-Antisymmetrical Dyadic Wavelet and Its Application to Edge Detection

Xu Chuanxiang

(School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871)

Shi Qingyun

Cheng Minde

(Center for Information Science, Peking University)

(School of Mathematical Sciences, Peking University)

**Abstract** In this paper we construct two types of dyadic wavelets suiting for edge detection and description; one is zero-symmetrical, the other is zero-antisymmetrical. These results have enriched the theory of dyadic wavelet and laid a solid foundation for properly applying dyadic wavelet to edge detection and description. Then the application of dyadic wavelet to edge detection, classification and description are studied from computation theory and algorithm aspects. Experimental results are also given to show the effectiveness.

**Keywords** Zero-symmetrical, Dyadic wavelet transform, edge-detection.