

基于地学图形数据的地表分维计算方法研究

王 桥 吴纪桃

(中国科学院遥感应用研究所, 北京 100101)(武汉测绘科技大学, 武汉 430070)

摘 要 在研究地形表面分维计算的一般方法的基础上, 提出了几种基于地学图形数据的地表分维计算方法, 讨论了有关性质, 并给出了分析性实例。

关键词 地学图形数据自动处理, 分形几何, 分维

地形表面数据的表达与分析是地学图形数据自动处理中难于处理的问题。因为地形表面长期受到各种随机因素的影响, 形成了粗糙不平、形态多变的复杂景观, 要对其进行表达和分析, 首先需要对它的特征进行数学描述, 尽管过去的几十年中, 已提出过各种各样的方法(如基于地表水平切割数量指标与垂直切割数量指标的方法、基于面积坡度的方法等), 但总的看, 这些基于传统数学的方法主要适于光滑、规则图形, 对于地形表面这样的复杂现象, 其描述则过于粗糙, 很难有效地反映出地表形态结构的本质特征。由 Mandelbrot^[1]创立的分形几何是近年来发展起来的专门研究复杂、非规则现象的新型理论, 根据这一理论, 我们可以利用分维(分维数)来有效地描述地形表面的形状结构特征, 从而为地学图形数据处理提供一种新的实用模型。本文将在对现有的地表分维计算方法进行研究和扩展的基础上, 提出几种基于地学图形数据的地表分维计算方法, 并使之具有较好的适用性和可操作性。

1 利用分形交集公式的分维计算方法

设所考虑的地形表面可表示成

$$S = \{(x, y, Z(x, y)) | (x, y) \in G\} \quad (1-1)$$

我们可视 S 为 3 维空间中的一个分形子集, 其分维数记为 D ; 又设 S_1 是 3 维空间中与 S 相交的某

平面构成的子集, 则由文献[2]中有关分形交集的结果可知

$$\dim(S \cap S_1) = \dim(S) + \dim(S_1) - 3 \quad (1-2)$$

显然, $\dim(S_1) = 2$, 于是有

$$D = \dim(S) = \dim(S \cap S_1) + 1 \quad (1-3)$$

利用式(1-3), 可通过计算 $\dim(S \cap S_1)$ 来求出地形表面 S 的分维值 D 。下面我们给出两种方法。

1.1 基于等高线的方法

我们知道, 等高线可以看成地形表面与水平平面的交集。因此, 在认为地形表面是各向同性的情况下, $S \cap S_1$ 可取如下形式:

$$\begin{aligned} S \cap S_1 &= \{(x, y, c) | (x, y) \in G, c \in [a, b], \\ & a = \min_{(x, y) \in G} Z(x, y), \\ & b = \max_{(x, y) \in G} Z(x, y)\} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} S \cap S_1 &= \{(x, y, c) | (x, y) \in G, c = (a + b)/2, \\ & a = \min_{(x, y) \in G} Z(x, y), \\ & b = \max_{(x, y) \in G} Z(x, y)\} \end{aligned} \quad (1-4)$$

若 $\dim(S \cap S_1) = D_1$, 则根据(1-3)式有

$$D = D_1 + 1 \quad (1-5)$$

事实上, 严格的各向同性是不多见的, 为改善式(1-5)的估值, 我们进一步提出下列方法, 取

* 本文由国家自然科学基金(49571061)及测绘与遥感国家重点实验室开放基金(WKL)95(0301)资助
收稿日期:1996-08;收到修改稿日期:1996-09。

$$(S \cap S_1)_i = \{(x, y, c_i) | (x, y) \in E^2, c_i = a + \frac{(b-a)}{n_i}, a = \min_{(x,y) \in E^2} Z(x, y), b = \max_{(x,y) \in E^2} Z(x, y)\} \quad (1-6)$$

其中, n_i 是等高线的条数, $i=0, 1, 2, \dots, n-1$ 。
若 $\dim(S \cap S_1)_i = D_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 则有

$$D = \left(\sum_{i=0}^{n-1} D_i \right) / n + 1 \quad (1-7)$$

至于 $\dim(S \cap S_1)$ 或 $\dim(S \cap S_1)_i$ 的计算, 可按线状要素的分维估值方法进行, 这里不再赘述。

1.2 基于地表轮廓线的方法

我们知道, 地表轮廓线可以看成地形表面与竖直平面的交集。当地形表面是用DEM表达时, 很容易获得竖直方向的地表轮廓线, 从而可由(1-3)通过计算地表轮廓线的分维来求出地形表面的分维值。

设由正方形网格的DEM所表示的地形表面为: $S = \{(i, j, z(i, j)) | i, j = 0, 1, \dots, n\}$, 在认为地形表面是各向同性的情况下, $S \cap S_1$ 可取如下形式

$$\begin{aligned} (S \cap S_1)_k &= \{(k, j), z(k, j) | j = 0, 1, \dots, n\}, k \in [0, n] \\ \text{或} \\ (S \cap S_1)_l &= \{(i, l), z(i, l) | i = 0, 1, \dots, n\}, l \in [0, n] \end{aligned}$$

据式(1-3)有

$$D_k = \dim(S \cap S_1)_k + 1 \quad (1-8)$$

或

$$D_l = \dim(S \cap S_1)_l + 1 \quad (1-9)$$

此时, D_k, D_l 分别称为地形表面的列分维和行分维。一般情况下, 地形表面不能够总保持各向同性, 因此 D_k 与 D_l 往往存在差异, 为此, 我们取

$$D_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n D_k \quad (1-10)$$

$$D_l = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n D_l \quad (1-11)$$

则用下式来作为地形表面的分维值

$$D = (D_k + D_l) / 2 \quad (1-12)$$

上面 $\dim(S \cap S_1)_k, \dim(S \cap S_1)_l$ 的计算也可按线状要素的分维估值方法进行, 所以也不再讨论。

2 利用表面积—尺度关系的分维计算方法

对于所考虑的地形表面 $S = \{(x, y, z(x, y)) | (x, y) \in G\}$, 若用正方形网格覆盖 G , 即将 G 分成 $n(r) \times n(r)$ 个边长为 r 的小正方形, 是第 i 个小正方形 G_i 上对应的 S 的表面积在 r 较小的情况下, 可由折平面面积 S_1 来近似, 从而 S 的面积 A 可写成

$$A = \sum_{j=1}^{n^2(r)} S_j \quad (2-1)$$

显然, $S_j \propto r^2$, 于是有

$$A \propto \sum_{j=1}^{n^2(r)} = n^2(r)r^2 \quad (2-2)$$

据 Turcotte(1989),

$$n^2(r) \propto \frac{1}{r^D} \quad (2-3)$$

这里 D 即为曲面 S 的分维数。实际上(2-3)所描述的事实是, r 越小, $n^2(r)$ 越大, 从而曲面 S 越复杂(由 r 变小所反映的“细节”就越多), 或者说, D 值越大, 曲面的复杂程度越大。

比较式(2-2)与式(2-3), 我们可得出一种表面积—尺度关系

$$A \propto r^{2-D} \quad (2-4)$$

由量纲分析方法, 我们可进一步把式(2-4)写成等式的形式

$$A = C_0 r^{2-D} \quad (2-5)$$

其中, A 是欧氏面积, r 是码尺, C_0 为形状因子(常数)。

与分形分析中一般分维估值方法类似地可根据式(2-5)及线性回归分析原理得到

$$D = 2 - \frac{M \sum_{i=1}^M [(\log r_i)(\log A(r_i)) - \left(\sum_{i=1}^M \log r_i \right) \left(\sum_{i=1}^M \log A(r_i) \right)]}{M \sum_{i=1}^M (\log r_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^M \log r_i \right)^2} \quad (2-6)$$

式(2-6)给出了利用表面积—尺度关系求曲面分维

值的公式。显然, 在公式中, 我们需要由不同的 r_i , 求

出相应的面积 $A(r_i)$ ($i=1, 2, \dots, M$)。由式(2-6)可知,我们只要对固定的码尺 r , 求出相应的 S_j ($j=1, 2, \dots, n^2(r)$) 即可。下面我们给出一种比较简便的方法——三角平面法。

如图 1(a) 所示, 对于给定的 r , 我们可以把 G_j

$$S_j = \sqrt{P_j(P_j - |A_jB_j|)(P_j - |B_jC_j|)(P_j - |C_jA_j|)} + \sqrt{Q_j(Q_j - |B_jD_j|)(Q_j - |D_jC_j|)(Q_j - |C_jB_j|)} \quad (2-7)$$

其中, $P_j = \frac{1}{2}(|A_jB_j| + |B_jC_j| + |C_jA_j|)$, $Q_j = \frac{1}{2}(|B_jD_j| + |D_jC_j| + |C_jB_j|)$, 从而, 据式(2-1), 可求得

$$A(r) = \sum_{j=1}^{n^2(r)} S_j。$$

为改善计算效果, 我们还可以用 G_j 的中心点及 4 个顶点所对应的 5 个高程点形成 4 个空间三角形(见图 1(b)), 并以这 4 个三角形的面积之和作为 S_j 。

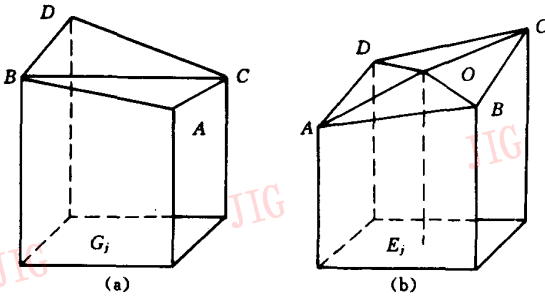


图 1 三角平面法原理

Fig. 1 The principle of triangular plane method

的 4 个顶点所对应的高程点作为空间三角形的顶点, 形成两个空间三角形: $\triangle A_jB_jC_j$ 和 $\triangle D_jB_jC_j$ ($j=1, 2, \dots, n^2(r)$), 并以这两个三角形的面积之和作为 S_j , 即:

日本学者中山在用分形理论分析气象卫星图象时, 提出了一种计算 N 的方法: 对 S 分割后, 小区域 G_{ij} 所对应的空间盒子数为

$$N_{ij}(r) = \frac{1}{r} (\max_{(x_k, y_l) \in G_{ij}} \{Z(x_k, y_l)\} - \min_{(x_k, y_l) \in G_{ij}} \{Z(x_k, y_l)\}) + 1 \quad (3-2)$$

按式(3-2), 每个小区域 G_{ij} 上计算空间盒子数的起算切面是不同的, 这不是我们通常在地图图形数据处理中所使用的分割。为此, 我们给出另一种方法。

记 $a = \min_{(x_k, y_l) \in G} Z(x_k, y_l)$, $b = \max_{(x_k, y_l) \in G} Z(x_k, y_l)$

用下式计算小区域 G_{ij} 所对应的空间盒子数:

$$N_{ij}(r) = \left[\frac{1}{r} (\max_{(x_k, y_l) \in G_{ij}} Z(x_k, y_l) - a) - \frac{1}{r} (\min_{(x_k, y_l) \in G_{ij}} Z(x_k, y_l) - a) \right] + 1 \quad (3-3)$$

或

$$N_{ij}(r) = \left[\frac{1}{r} (b - \min_{(x_k, y_l) \in G_{ij}} Z(x_k, y_l) - (b - \max_{(x_k, y_l) \in G_{ij}} Z(x_k, y_l))) \right] + 1 \quad (3-4)$$

这样, 以间距为 r 分割所对应的总盒子数即为:

$$N = \sum_i \sum_j N_{ij}(r) \quad (3-5)$$

3 利用计盒法原理的分维计算方法

对于离散化表示的地形面 $S = \{(x_j, y_j, Z(x_j, y_j)) | (x_j, y_j) \in G, i=1, 2, \dots, I; j=1, 2, \dots, J\}$, 根据分形理论的基本原理^[2], 如果用间距为 r 的平行平面沿水平、垂直两方向分割 S , 所得含 S 的盒子数为 N , 则有

$$N \propto \frac{1}{r^D} \quad (3-1)$$

其中 D 即为曲面的分维值。

显然, 与前面有关讨论类似, 只要根据不同的 r_j , 求出相应的盒子数 N_j , 就可利用式(3-1)求出 D 。因此, 计算的关键是求 N 。

4 利用分数布朗表面的统计性质的分维计算方法

随机分形理论的研究结果表明, 地形表面与分数布朗表面具有类似的统计性质^[1, 3~6]。因此, 对于地形表面 $S = \{(x, y, z(x, y)) | (x, y) \in G\}$ 及 $\forall (x_1, y_1) \in G, (x_2, y_2) \in G$, 有:

$$\text{Var}(|Z(x_2, y_2) - Z(x_1, y_1)|) = Kd^{2H} \quad (4-1)$$

其中, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, K 是常数。

在(4-1)两端取对数。

$$\begin{aligned} & \log\{\text{Var}(|Z(x_2, y_2) - Z(x_1, y_1)|)\} \\ & = 2H \log d + C \end{aligned} \quad (4-2)$$

其中 $C = \log k$

因为分数布朗函数的增量是平稳过程, 从而均值 $E(|Z(x_2, y_2) - Z(x_1, y_1)|) = C_0$, 因为, 式(4-2)中的高程增量方差可由变异差

$$\begin{aligned} & V(Z(x_2, y_2) - Z(x_1, y_1)) \\ & = \frac{1}{n} \sum (Z(x_2, y_2) - z(x_1, y_1))^2 \end{aligned} \quad (4-3)$$

来代替, 从而式(4-2)可写成

$$\begin{aligned} & \log[v(z(x_2, y_2) - z(x_1, y_1))] \\ & = 2H \log d + C \end{aligned} \quad (4-4)$$

与前面讨论相类似, 由式(4-4)及线性回归分析原理, 我们可求出 H , 从而可得出地形表面的分维

$$D = 3 - H \quad (4-5)$$

图 2 给出了分数布朗表面 H 取不同值时相应的分维取值情况。(Goodchild, 1988)

(x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 在 G 内的取法不同, 可以得到不同形式的分维, 例如, 我们有:

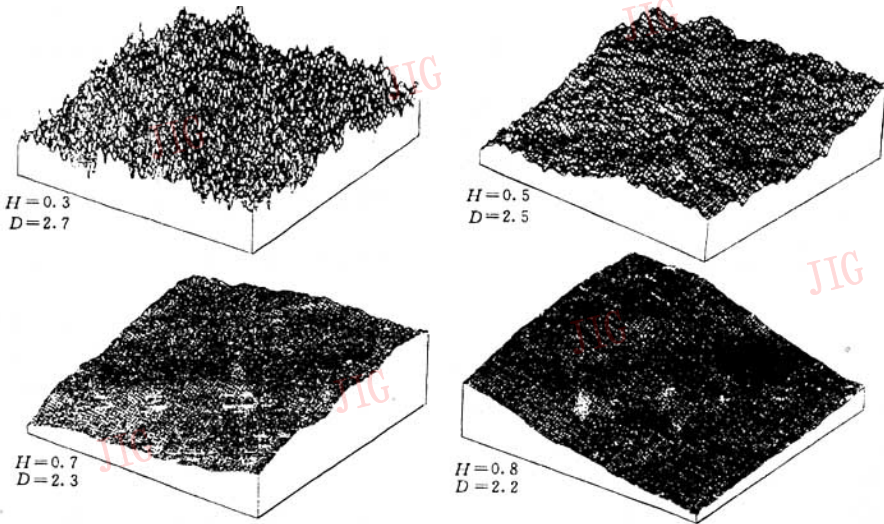


图 2 H 与 D 值之间的关系举例
Fig. 2 The example of relation between Hand D .

4.1 方向分维

取 $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = k_0$ (常数), 则由(4-5)求出的分维称为方向分维, 记为 D_{k_0} 。它反映了沿特定方向观察时, 地形表面的复杂程度。特别地, 取 $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = 0$ 或 $(x_2 - x_1)/(y_2 - y_1) = 0$ 所计算出的分维, 反映了水平方向和垂直方向地形表面的复杂程度, 我们分别记为 D_{y_0} 和 D_{x_0} 。

4.2 平均分维

前面已指出过, 地形表面一般不满足各向同性, 从而 $D_{y_0}, D_{x_0}, D_{+1}, D_{-1}$ 一般不相等, 我们称它们的算术平均值为平均分维, 记为

$$D_{\bar{}} = \frac{1}{4}(D_{r_0} + D_{x_0} + D_{+1} + D_{-1}) \quad (4-6)$$

4.3 局部分维与整体分维

取 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1 \subset G$, 则由(4-5)求出的分维称为局部分维, 它反映了 G_1 所对应的局部地形表面的复杂程度: 自然, 当 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 在 G 内的取法不受限制时, 所求出的分维就称为整体分维, 记为 $D_{\bar{}}$ 。

5 计算实例

下面以图 3 所示试验样区为例, 远用本节所提出的有关方法进行地形表面分维估值试验, 相应的结果如表 1 所示。

表 1
Table 1

方法 1	方法 2	方法 3	方法 4					
			D_{y_0}	D_{x_0}	D_{+1}	D_{-1}	$D_{\text{平}}$	$D_{\text{整}}$
2.17	2.19	2.20	2.13	2.17	2.18	2.12	2.15	2.16

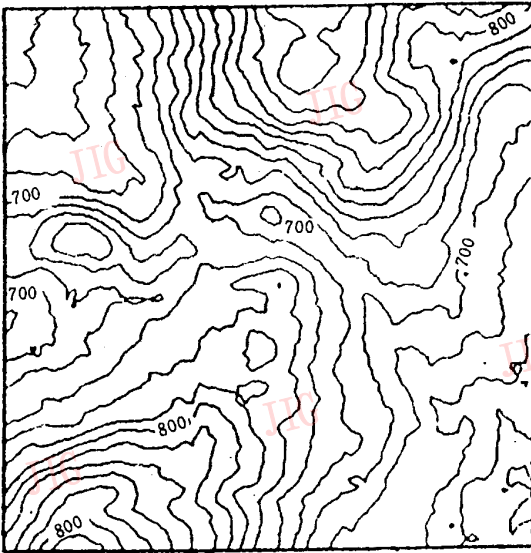


图 3 试验样区

Fig. 3 The test area

从上面计算结果可看出,各种方法求出的分维



王 桥,副教授,博士。现在中国科学院遥感应用研究所做博士后研究工作。已发表论文 30 余篇,出版专著 2 部。目前主要从事计算机制图、地理信息系统和地学数学模型研究。

Research on calculation Method of Fractal Dimension Based Topographic Data

Wang Qiao¹, Wu Jitao²

(1. The Institute of Remote Sensing Applications, CAS, Beijing 100101)

(2. Wuhan Technical University of Surveying & Mapping, Wuhan 430070)

Abstract The expression and analysis of topographic data is a difficult question to deal with in the automatic treatment of topographic data. In this paper, some new calculation methods of fractal dimension based topographic data are proposed after researching general fractal theory, related characters of these methods are discussed and some actual examples are given lastly.

Keywords Automatic treatment of topographic data, Fractal geometry, Fractal dimension.

值基本稳定在 2.20 左右,说明这些方法具有一定的稳定性。由于不同的计算方法基于不同的分形机制和操作方式,所以,所求出的结果表现出一定的差异是正常的。通常,把不同计算方法所得出的分维估值结果进行横向比较,往往意义不大,而对同一种方法所得出的结果加以纵向比较,则可得出一些地形表面特征的比较深刻的结论。最后值得指出的是,本文所提出的有关方法还存在一定的局限性,如有的只反映了特定方向上地表的形态,有的只是基于各向同性和增量平稳性的。若要对地形表面进行更深入的分形描述,还需进一步研究多分形方法。

参考文献

- 1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature Freeman W H New York, 1982.
- 2 Falconer K J. Fractal Geometry. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- 3 Mark K M, Aronson P B. Scale-dependent Fractal Dimensions of Topographic Surface. *Mathematical Geology*, 1984, 16(7): 671~683.
- 4 Gilbert L E. Are Topographic Data Sets Fractal? *Pure, Applied Geophysics*, 1989, 131(1): 241~254.
- 5 王桥, 吴纪桃. 分形、分维及其在地图制图中的应用. *地图*, 1992, (3): 5~11.
- 6 王桥. 分数布朗运动的小波变换. *武汉测绘科技大学学报*, 1995, 20(1): 14~17.