

一种基于小波变换的FBM图象生成方法

曹汉强 朱光喜 朱耀庭 王翔

(华中理工大学电信系, 武汉 430074)

摘要 提出了一种基于小波变换的FBM图象生成方法, 实验证明这种基于小波变换的生成方法比传统的RM-DA方法和Fourier方法能更精确地生成二维FBM图象。

关键词 分形, 分形生成, 小波变换, FBM图象

1 引言

分形几何学用于描述自然界中极其复杂、极不规则的一类几何现象, 这类复杂的不规则的几何形体往往具有某种自相似的结构^[1]。随机分形几何学是在随机布朗运动的基础上推广产生的。随机布朗运动是一个独立增量过程, B. B. Mandelbrot 和 V. Ness 把它加以推广, 定义了分数布朗运动(Fractal Brawnian Motion—FBM), 记作 $B_H(t)$ ^[2]。FBM 是一种非平稳随机模型, 在分析、研究和模拟天文图象、大气湍流等具有自相似特性的自然现象时是非常常用的^[3,4], 二维 FBM 图象生成的主要方法是随机中点偏置法(RMDA)和傅里叶滤波方法^[5], RMDA 方法存在的问题是在 $H \neq \frac{1}{2}$ 时不能对 FBM 提供一个准确的描述, 不能保证新产生的点与其余点之间满足相关特性; 采用傅里叶滤波方法生成的 FBM 图象具有周期性特征, 要生成精确的 FBM 图象需先生成很大尺寸的图象, 然后只保留其中一小部分, 降低了效率。我们基于小波变换的多分辨率分析方法, 采用迭代小波变换的算法, 能有效地生成更精确

的 FBM 图象。

2 FBM 的小波变换及其性质

FBM 是具有零均值的非平稳过程, 其相关函数为:

$$R_{B_H}(t, s) = \frac{V_H}{2} [|t|^{2H} - |t-s|^{2H} + |s|^{2H}] \quad (1)$$

式中, $V_H = \Gamma(1-2H)\cos(H\pi)/(\pi H)$, $\Gamma(\cdot)$ 是伽玛函数; 对给定的 Δt , 增量 $\Delta B_H(t) = B_H(t + \Delta t) - B_H(t)$ 是平稳高斯过程, H 为分形参数, 反映了 FBM 的非规则程度。

小波变换是近年发展起来的一种非常有用的数学工具, 尤其是 Mallat 提出的多分辨率分析的理论, 大大促进了小波变换在图象处理中的应用。

设 $B_H(t)$ 的小波变换为 $T_{B_H}(s, w)$, 则 $T_{B_H}(s, w) = |w|^{-1/2} \int B_H(t) \Psi((t-s)/w) dt$ 其中, $\Psi(t)$ 是小波函数, $s \in R, w$ 是尺度参数, $w > 0$ 。

性质 1: 当 w 一定时, $T_{B_H}(t, w)$ 是一个平稳随机过程。

当 w 一定时, $T_{B_H}(t, w)$ 的相关函数为:

$$R_{T_{B_H}}(t, s) = E[T_{B_H}(t, w)T_{B_H}(s, w)] = w^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[B_H(\tau_1)B_H(\tau_2)] \Psi((\tau_1-t)/w) \Psi((\tau_2-s)/w) d\tau_1 d\tau_2 =$$

* 国家自然科学基金资助项目

收稿日期: 1996-10-22, 收到修改稿日期: 1997-01-20

$$\frac{V_H}{2w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [|\tau_1|^{2H} + |\tau_2|^{2H} - |\tau_1 - \tau_2|^{2H}] \Psi((\tau_1 - t)/w) \Psi((\tau_2 - s)/w) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2)$$

由小波的定义可知, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0$, 所以式(2)可化简为

$$R_{T_{B_H}}(t, s) = \frac{V_H}{2w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau_1 - \tau_2|^{2H} \Psi((\tau_1 - t)/w) \Psi((\tau_2 - s)/w) d\tau_1 d\tau_2$$

令 $u = (\tau_1 - t)/w, v = (\tau_1 - \tau_2)/w$ 进行代换后得

$$R_{T_{B_H}}(t, s) = w^{2H+1} f_\varphi\left(\frac{t-s}{w}\right) \quad (3)$$

式中 $f_\varphi(\theta) = -\frac{V_H}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{2H} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(u) \Psi(v-u+\theta) dudv$. 式(3)表明 $R_{T_{B_H}}(t, s)$ 在同一尺度下只与差值 $t-s$ 有关, 与起点无关, 故 FBM 的小波变换是一个平稳随机过程.

性质 2: 当 w 给定时, $T_{B_H}(t, w)$ 具有自相似性.

当 w 给定时, 令 $\tau = t-s$, 由式(3)

$$R_{T_{B_H}}(\tau) = w^{2H+1} f_\varphi\left(\frac{\tau}{w}\right) \text{ 可得:}$$

$$R_{T_{B_H}}(a\tau, aw) = (aw)^{2H+1} f_\varphi\left(\frac{a\tau}{aw}\right) = a^{2H+1} R_{T_{B_H}}(\tau, w) \quad (4)$$

表明 $T_{B_H}(s, w)$ 具有自相似性.

综上所述, FBM 的小波变换是一个具有自相似性的平稳随机过程. 当推广到二维时, FBM 的小波变换的上述性质仍然适用^[6], 因此小波变换能够方便地用来生成和分析 FBM 图象.

3 基于小波变换的二维 FBM 图象生成算法

在计算机实现上, 二进小波 (Dyadic Wavelet) 变换适于快速计算, 二进小波的基本小波为:

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}x - k), j, k \in \mathbb{Z}^2 \quad (5)$$

与之相应的尺度函数为:

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k), j, k \in \mathbb{Z}^2 \quad (6)$$

采用小波变换表示的二维 FBM 具有下列形式:

$$B_H(x, y) = \sum_j \sum_{n=0}^{2^j-1} \sum_{m=0}^{2^j-1} d_j^l[m, n] \Psi_{j,m,n}^l(x, y) \quad (7)$$

式(7)中, $\{d_j^l[m, n]\}$ 是由随机变量产生的小波扩展系数; $\Psi_{j,m,n}^l(x, y)$ 是一个尺度为 2^{-j} 、平移 (m, n) 的二维小波, $\Psi_{j,m,n}^l(x, y) = 2^{-j} \Psi^l(2^{-j}x - m, 2^{-j}y - n)$, 即应用 Mallat 算法对细节图象系数进行小波逆变换就可生成 FBM 图象. 但关键在于, 如何确定细节

图象系数与随机变量方差的关系. 对此, 我们有如下的结论: 随着分辨率的增加, 构成小波系数的随机变量方差应按 2^{2H+2} 下降.

证明: 在 Mallat 的二维小波表示中, 与 $\Psi^l(x, y), l=1, 2, 3$ 相应的细节图象被看作是 FBM 图象 $B_H(x, y)$ 的多分辨率分解, 即位于相应的细节图象内 (m, n) 处的细节系数表示为:

$$d_j^l[m, n] = \iint B_H(x, y) \Psi_{j,m,n}^l(x, y) dx dy \quad (8)$$

根据 Parseval 恒等式 $\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx =$

$$\frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \text{ 并以 } \Psi^1(x, y) \text{ 为例, 我们有 } d_j^1[m, n] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint \hat{B}_H(u, v) \hat{\Psi}_{j,m,n}^1(u, v) dudv, \hat{B}_H(u, v) \text{ 是 } B_H(x,$$

$$y) \text{ 的 Fourier 变换, } \hat{\Psi}_{j,m,n}^1(u, v) = 2^j \hat{\Psi}^1(2^j u,$$

$$2^j v) e^{-2^j(mu+nv)} \text{ 是 } \Psi_{j,m,n}^1(x, y) \text{ 的二维 Fourier 变换.}$$

若任取两个这样的系数相乘后在等式两边取数学期望值, 则得

$$d_j^1[m, n] d_k^{1*}[p, q] =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint \iint \hat{B}_H(u, v) \hat{B}_H(u', v') \times$$

$$\hat{\Psi}_{j,m,n}^1(u, v) \hat{\Psi}_{k,p,q}^{1*}(u'v') dudvdu'dv'$$

$$E\{d_j^1[m, n] d_k^{1*}[p, q]\} =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint \iint E[\hat{B}_H(u, v) \hat{B}_H(u', v')] \times$$

$$\hat{\Psi}_{j,m,n}^1(u, v) \hat{\Psi}_{k,p,q}^{1*}(u'v') dudvdu'dv' \quad (9)$$

已知 $S(u, v)$ 是二维 FBM 的平均功率谱, $S(u, v) = \sigma^2 / (\sqrt{u^2 + v^2})^\beta$, 式中 σ^2 是一个常数, $\beta = 2H + 2$, 则 $E[\hat{B}_H(u, v) \hat{B}_H(u', v')] = 4\pi^2 \sigma^2 (\sqrt{u^2 + v^2})^{-\beta}$, 代入式(9)得

$$E\{d_j^1[m, n] d_k^{1*}[p, q]\} = \sigma^2 2^{j+k} \iint (\sqrt{u^2 + v^2})^{-\beta} \times$$

$$\hat{\Psi}_{j,m,n}^1(u, v) \hat{\Psi}_{k,p,q}^{1*}(u'v') dudv =$$

$$\sigma^2 2^{j+k} \iint (\sqrt{u^2 + v^2})^{-\beta} \Psi^1(2^j u, 2^j v) \Psi^{1*}(2^k u, 2^k v) \times$$

$$e^{-i(2^j(mu+nv) - 2^k(pu+qv))} dudv \quad (10)$$

$$e^{-i(2^j(mu+nv) - 2^k(pu+qv))} dudv$$

$$e^{-i(2^j(mu+nv) - 2^k(pu+qv))} dudv$$

$$e^{-i(2^j(mu+nv) - 2^k(pu+qv))} dudv$$

$$e^{-i(2^j(mu+nv) - 2^k(pu+qv))} dudv$$

$l=2, 3$ 时同理可证. 所以,

$$E\{d'_j[m,n]d_k^{l*}[p,q]\} = \sigma^2 2^{j+k} \iint (\sqrt{u^2+v^2})^{-\beta} \hat{\Psi}^l(2^j u, 2^j v) \hat{\Psi}^{l*}(2^k u, 2^k v) \times e^{-i(2^j(mu+nv)-2^k(pu+qv))} dudv \quad (l = 1, 2, 3) \quad (11)$$

令 $j=k$ 并进行 $x=2^j u, y=2^k v$ 代换后, 得到给定分辨率的小波系数之间的相关性为:

$$E\{d'_j[m,n]d_k^{l*}[p,q]\} = \sigma^2 2^{j\beta} \iint (\sqrt{x^2+y^2})^{-\beta} |\hat{\Psi}^l(x,y)|^2 \times e^{-i((mx+ny)-(px+qy))} dxdy$$

再令 $p=m$ 和 $q=n$, 将 x, y 置换成 $u, v(u=x, v=y)$, 最后得到细节图象的方差为:

$$Var\{d'_j[m,n]\} = \sigma^2 2^{j\beta} \iint (\sqrt{u^2+v^2})^{-\beta} |\hat{\Psi}^l(u,v)|^2 dxdy \quad (12)$$

从上式不难看出, 双重积分与 j, m, n 无关, $Var(d'_j[m,n]) \propto 2^{j(2H+2)}$, 即细节图象的方差随着分辨率的增加按 2^{2H+2} 下降, 证毕。

在实际生成 FBM 图象时, 一般选取消失矩高的小波函数使 $B_H(x, y)$ 图象小波系数之间的相关

性减小, 但直接应用 Mallat 算法会使结果呈现某种周期性, 为了减少这种边缘效应的影响, 我们采用迭代小波变换的方法, 由低阶小波生成初始图象, 再通过迭代逐步生成较精确的 FBM 图象。具体实现算法如下:

- (1) 由低阶小波生成大小为 $D \times D$ 的初始图象, 作为近似图象;
- (2) 按方差 $2^{j(2H+2)}$ 产生随机变量并构成 3 个 $D \times D$ 大小的细节图象系数 $d'_j[m, n]$, 和近似图象一起构成一个 $2D \times 2D$ 大小的图象分解;
- (3) 小波逆变换生成 $2D \times 2D$ 大小的 FBM 图象, 再将去掉周边 $N/2$ 个象素的图象作为新的近似图象; N 为滤波器的长度。新的近似图象大小为 $(2D - N) \times (2D - N)$ 。
- (4) 增加小波阶次, 置换代变量, 重复(2)、(3), 直到达到希望的滤波长度。
- (5) 按该阶次小波继续生成直到达到满意的分辨率。

图 1 为上述算法示意图。

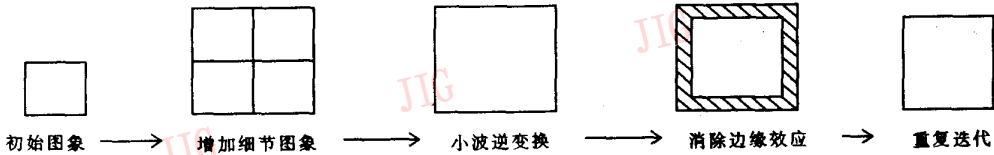


图 1 基于小波变换的 FBM 图象生成过程

Fig. 1 The process of FBM image synthesis based on Wavelet

4 实验结果与分析

我们使用上述算法在 486 微机生成的 FBM 图象及其相应的地形图如图 2 所示, 参数 H 从左至右分别为 0.2, 0.5 和 0.8, 随着 H 值的增大, 图象灰度逐渐趋于平坦。表 1 列出了对不同方法生成的 FBM 图象计算得出的 H 值, 不难看出基于小波变换方法生成的 FBM 图象与实际值更吻合。表 2 给出了在微机采用不同方法生成一幅 FBM 图象所需的计算时间(付里叶滤波方法为未消除边缘效应的图象)。

表 1 给定的 H 值与对生成的 FBM 图象计算出的 H 值的比较
Table 1 Comparison between the given value of H and the computed value for FBM images generated using different synthesis methods

给定 H 值	RMDA 方法	傅里叶滤波方法	小波变换方法
0.2	0.23	0.18	0.21
0.5	0.54	0.46	0.48
0.8	0.82	0.64	0.78

表 2 生成 FBM 图象所需的计算时间
Table 2 Comparison between the computation times in generated a image using different synthesis methods

生成方法	RMDA 方法	傅里叶滤波方法	小波变换方法
计算时间(s)	14	40	58

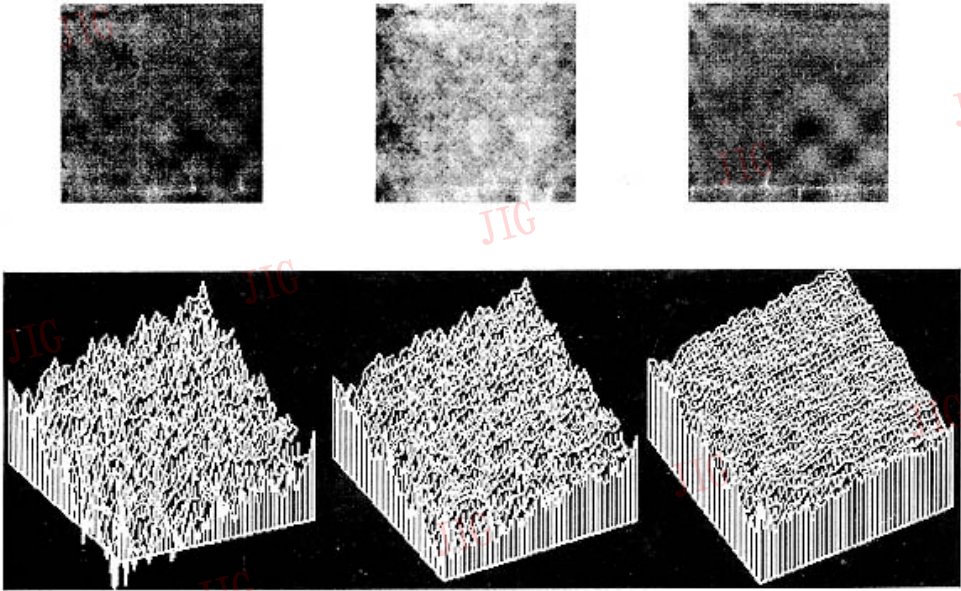


图 2 基于小波变换算法生成的 FBM 图象和地形图(从左至右 $H=0.2, 0.5$ 和 0.8)

Fig. 2 FBM images and the corresponding topographical map generated by our algorithm The parameter H varies from 0.2(left) to 0.5(middle) to 0.8(right)

5 结束语

本文提出了基于小波变换生成二维 FBM 图象的新方法,从理论上证明了细节图象系数与随机变量方差的关系,实验证明基于小波变换迭代算法能够较精确地生成 FBM 图象,是一种生成 FBM 图象的有效方法。

参考文献

- 1 Mandelbrot B B, The Fractal Geometry of Nature. San Francis-

- co, CA: Freeman 1982.

- 2 Mandelbrot B B. Fractional Brownian Motions, Fractional Noise and Application, SIMA Review, 1968, 10(4): 422~437.
- 3 Pentland A P. Fractal—based description of natural scene, IEEE Tran. Pattern Anal. Mach. Intell. PAMI-6 (6), 1984, 661 ~ 674.
- 4 Fournier A, Fussel D. Computer Rendering of Stochastic Models, Comm. of the ACM, 1982, 26(5) 371~384.
- 5 Peitgen H O, Saupe D. The Science of Fractal Image, Springer Verlag, 1988.
- 6 罗会国. 分形图象模型及其在图象处理中的应用. [博士论文]武汉:华中理工大学, 1995.



曹汉强, 1989 年武汉冶金科技大学硕士研究生毕业, 现在华中理工大学攻读博士学位, 主要研究领域为计算机图形学和图象处理, 致力于分形理论及其在图形图象处理中的应用研究。发表论文 10 篇。



吴蕾, 1987年合肥工业大学计算机应用专业本科毕业, 毕业后在中国工程物理研究院流体物理研究所从事图象处理研究工作, 现已获美国环俄明州立大学计算机工程专业硕士学位, 是计算机软件工程师。本文研究工作于1989年在流体物理研究所工作期间完成。

A Method of the Image Processing for Measuring the Distribution of Mass Velocity and Kinetic Energy of the Jet

Wu Lei

(South-west Institute of Fluid Physics Chengdu 610003)

Abstract A new method of image processing is developed for measuring the distribution of mass, velocity and kinetic energy of the jet. As a sample jet of oil punching bomb is given, the "Velocity—Mass (Percentage)" of this jet is given and conforms with the result of numerical simulation.

Keywords Jet, Flash X-Ray photography, Image Processing

(上接 877 页)

A Method Based On Wavelet For FBM Image Synthesis

Cao HanQiang, Zhu Guangxi, Zhu Yaoting, Wang Xiang

(Department of Electronics & Information Engineering Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract In this paper, a new algorithm based on wavelet for FBM image synthesis is given. FBM is a zero-mean nonstationary Gaussian random process. The synthesis of such images is important in fields such as the simulation of astronomical images and fractal image analysis. Since FBM exhibits a self-similarity with respect to scale, we show that FBM can be synthesized by using wavelets. Mallat's filter-based wavelet representation can be used to synthesize a good approximation to FBM.

Keywords Fractal, Fractal image synthesis, Wavelet, FBM image