

关于 KH 和 KJ 符号图的一些注解*

蔡利栋

(暨南大学计算机科学系, 广州 510632)

摘要 比较了 KH 符号图和 KJ 符号图的零曲率阈值设置问题, 指出 KH 零阈值相容不等式在 KJ 情况下仍然适用, 因此利用 KH 符号图作曲面分割实际上是一个更好的选择。

关键词 曲面分割, KH 和 KJ 符号图, 相容零阈值设置不等式

1 曲面形状与曲率符号

曲率是曲面的基本几何性质。从曲面的深度数据(depth data)出发可以计算出曲面的主曲率 C_1 与 C_2 , 或其高斯总曲率 K , 平均曲率 H 等等。依据它们的符号可以得到曲面的曲率符号(分布)图, 表征曲面上各点的局部几何形状, 进而完成曲面分割。

例如, C_1C_2 符号图可表征 6 种曲面形状, 分别为: 峰(Peak)、阱(Pit)、坪(Plane)、脊(Ridge)、谷(Valley)与鞍(Saddle), 列表如下:

表 1 C_1C_2 符号表征的 6 种曲面形状

$C_1 \backslash C_2$	-	0	+
-	峰(Peak)	脊(Ridge)	鞍(Saddle)
0	脊(Ridge)	坪(Plane)	谷(Valley)
+	鞍(Saddle)	谷(Valley)	阱(Pit)

如引入主曲率值的信息, 约定 $C_1 \leq C_2$, 则鞍形可进一步细分为: 最小曲面(Minimal)、鞍脊(Saddle ridge)与鞍谷(Saddle valley)。最小曲面对应于 $C_1 = -C_2$, 并有球面(Sphere)对应于 $C_1 = C_2$ 。因此在 C_1C_2 坐标系中曲面形状共有 9 种^[1](见图 1)。由于 $K = C_1 \cdot C_2$, $H = (C_1 + C_2)/2$ 已隐含了主曲率值的信息, 图 1 中的 9 种曲面形状都出现在图 2 的 KH 坐标系中。

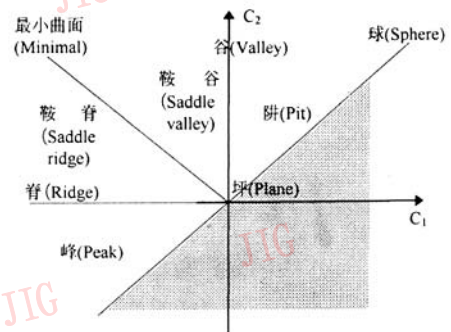


图 1 C_1C_2 坐标系中的曲面形状分布($C_1 \leq C_2$)

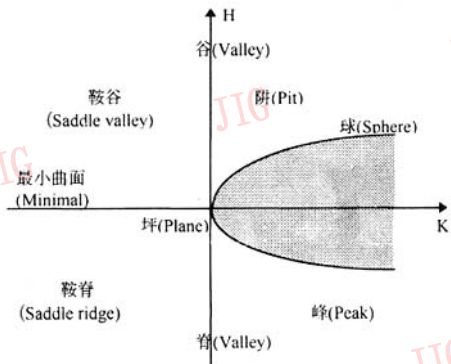


图 2 KH 坐标系中的曲面形状分布($K \leq H^2$)

其中的抛物线 $K = H^2$ 对应于图 1 中的球面 ($C_1 = C_2$)。抛物线所包围的阴影区域 $K > H^2$ 是 KH 坐标系中的“禁区”。该区域不可能表征任何真实的曲面

* 本课题研究得到国家自然科学基金(No. 69575019)、广东省自然科学基金(No. 950617)和国家教委回国留学人员启动基金资助
收稿日期:1996-09-18;收到修改稿日期:1997-04-11

形状。所以,不妨称之为“幻球”(Phanton sphere)。与此对应,KH 符号图只能表征 8 种曲面形状。这是因为在表 2 中 KH 9 种可能的符号组合方式只有 8 种存在,第 9 种组合(H=0,K>0)在数学上是自相矛盾的(对应于图 2 中 K 的正半轴,并为“幻球”的阴影区域所覆盖)。因此属于不可能情况。

表 2 KH 符号表示的 8 种曲面形状

K \ H	-	0	+
-	鞍脊 (Saddle ridge)	最小曲面 (Minimal)	鞍谷 (Saddle valley)
0	脊(Ridge)	坪(Plane)	谷(Valley)
+	峰(Peak)		阱(Pit)

但是,在深度实测数据的计算处理中,由于噪声干扰和离散误差的存在,曲率符号的判别并非象预期的那样简单。如果 K 和 H 的零阈值设置不协调,则上述第 9 种不可能的组合方式——“幻球”曲面将会荒谬地出现^[2]。

为此,利用 KH 符号作曲面分割时,需要注意 K 和 H 的零阈值 ϵ_K 和 ϵ_H 的合理设置,特别是二者之间的相容性(consistence)关系。在多尺度处理过程中,曲面上各点的 K 和 H 值随尺度不同而变化,单一的 K 和 H 的零阈值设置已不奏效,这个问题就更加突出。

2 KH 符号图中零阈值的相容性约束

由曲面的深度数据可计算出各点的主曲率 C_1 与 C_2 ,在设置了零阈值 ϵ_{C_1} 和 ϵ_{C_2} 后,就得到相应各点的主曲率符号并产生出 C_1C_2 符号图。注意到 C_1 与 C_2 的对称地位,可取:

$$\epsilon_{C_1} = \epsilon_{C_2} \quad (1)$$

这就是主曲率的零阈值之间的相容性约束条件,该条件在多尺度空间中仍然有效。至于高斯 K 和平均曲率 H:

$$K = C_1 \cdot C_2 \quad (2)$$

$$H = (C_1 + C_2)/2 \quad (3)$$

由于前者是主曲率之积,后者是主曲率之平均, $K \leq H^2$,两者的量纲不同。因此,简单地设置零阈值 $\epsilon_K = \epsilon_K$ 抑或 $\epsilon_K = \epsilon_H^2$ 并不妥当,都有可能导导致“幻球”曲面的出现。

定义绝对平均曲率 \bar{H} 为:

$$\bar{H} = (|C_1| + |C_2|)/2 \geq 0 \quad (4)$$

利用摄动分析,可以揭示出 K 和 H 的零阈值之间存在着一个不等式作为相容性约束,称为相容不等式^[3](推导见附录):

$$\epsilon_K \geq 2\bar{H}\epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (5)$$

这就表明:

(1) ϵ_H 和 ϵ_K 不能任意或孤立地设置。

(2) 一旦选定 ϵ_H ,可望自动得到 ϵ_K ,反之亦然。

(3) 随着绝对平均曲率 \bar{H} 趋于零,平均曲率 H 和高斯曲率 K 将一致趋于零,曲面形状变得平坦,所以 ϵ_H 和 ϵ_K 都应同时变小。

(4) 相容不等式(5)适用于多尺度空间,曲面平滑的尺度效应通过 \bar{H} 直接地引入到零阈值设置中来。

在实际处理中,可以考虑采用如下零阈值设置:

$$\epsilon_H = \max\{\epsilon_0, \min \bar{H}\} \quad (6)$$

$$\epsilon_K = 2 \text{Average } \bar{H} \cdot \epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (7)$$

其中 ϵ_0 为一个判断平面性的经验性常数,比如 $\epsilon_0 = 0.00005$, \min 与 Average 运算对整个曲面 S 进行。当然,这些只是实现多尺度空间中零阈值自动设置的指导性建议。在这个方向上的进一步工作有待于对曲率分布的更精细的统计分析。

3 KJ 符号图及零阈值设置

防止“幻球”曲面出现的另一途径则是设法通过坐标系变换来消除“幻球”分布的阴影区域。这就导致了 KJ 符号图表示。Besl 提出以复数域内的坐标变换去达到上述目的^[4]。他定义

$$\tilde{H} = (C_1 - C_2)/2 \geq 0 \quad (8)$$

$$J = 2H\tilde{H} \quad (9)$$

先以旋转变换把 C_1C_2 坐标系变为 $H\tilde{H}$ 坐标系,再以复数平方变换把 $H\tilde{H}$ 坐标系变为所要的 KJ 坐标系。

实际上, \tilde{H} 就是曲面上各点的测地挠率最大值,并有:

$$\tilde{H} = \sqrt{H^2 - K} \quad (10)$$

因此,复数 $z = H + i\tilde{H} = H + i\sqrt{H^2 - K}$ 的平方变换可以直接把图 2 中的 KH 坐标系变换成图 3 中的 KJ 坐标系。在 KJ 坐标系中“幻球”分布的阴影区域被成功地消除。其边界(即 Sphere)退化成 K 的正半轴。其余的曲面类型都被保留。

其实,复数域内的坐标系变换并无必要。实数域内的变换同样可达到目的。

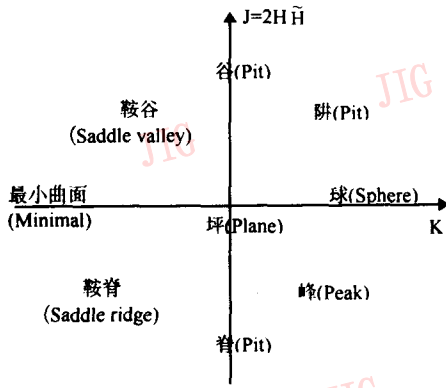


图3 KJ 坐标系中的曲面形状分布

定义 H 和 J 的一个泛函为:

$$\Phi(\alpha) = H^2 - \alpha K, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (11)$$

则 $K \geq 0$ 时, $\Phi(\alpha) = 0$ 是一族抛物线。其中

$\Phi(1) = 1$ 描述了图2中阴影区域的边界(即 Sphere); $H^2 - K = 0$;

$\Phi(0) = 0$ 描述了图2中被阴影区域所覆盖的 K 的正半轴: $H = 0, K > 0$;

$\Phi(\alpha) = 0, 0 < \alpha < 1$ 描述了图2中阴影区域(幻球)的余下部分。

定义变换:

$$J^2 = 4\Phi(0) \cdot \Phi(1) = 4H^2 \sqrt{H^2 - K} \quad (12)$$

$$\text{或 } J = 2H\tilde{H} \quad (13)$$

由于泛函 $\Phi(\alpha)$ 连续,并在 $K \geq 0$ 时对于 α 单调,映射 $(K, H) \rightarrow (K, J)$ 必定将 KH 坐标系中的阴影区域及其边界 $\Phi(\alpha) = 0, K \geq 0$ 连续压缩成 KJ 坐标系中的 K 轴正半部: $J = 0, K \geq 0$ 。

KJ 符号图的零阈值 ϵ_K 与 ϵ_J 也可以象 KH 符号图情况一样,通过对 K 和 J 的摄动分析来推导。由附录, K 和 J 的摄动误差分别为:

$$|E_K| \leq 2H\epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (14)$$

$$|E_J| \leq 2H\epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (15)$$

这表明 K 和 J 的零阈值 ϵ_K 与 ϵ_J 应满足相容性约束条件:

$$\epsilon_J = \epsilon_K \quad (16)$$

然而这一简洁的等式并未交待为何去设置零阈值。为此,可类似于 KH 符号图的处理,在计算出曲面 S 的所有主曲率 C_1 和 C_2 后,取

$$\epsilon_H = \max\{\epsilon_0, \min \bar{H}\}$$

$$\epsilon_J = \epsilon_K = 2A \text{verage} \bar{H} \cdot \epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (17)$$

可见, KJ 符号图的零阈值设置只是重复了 KH 符号图的过程。除了在形式上排除了“幻球”曲面出现的可能性,从而提供了某种心理上的安慰外,

在计算上并无实质性的差别。所以, KJ 符号图的出现并未使 KH 符号图失去存在的意义,反而说明了基于后者而推导出的 KH 零阈值相容不等式(5)对于前者也适用。因此,从零阈值设置的角度来看, KH 符号图实际上比 KJ 符号图更为有效。

4 结论

本文比较讨论了 KH 符号图和 KJ 符号图的零阈值设置问题。在实数域内给出了从 KH 坐标系变换到 KJ 坐标系的一个推导公式。本文说明了 KH 零阈值相容不等式在 KJ 情况下仍然适用。因此,从零阈值设置的角度看,利用 KH 符号图作曲面分割实际上是一个更好的选择。

参考文献

- 1 Besl P J, Jain R C. Invariant surface characteristics for three-dimensional object recognition in range images. *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, 1990, 33(1): 33~80.
- 2 Cai L D. Scale-based Surface Understanding Using Diffusion Smoothing, PhD Thesis, Univ. of Edinburgh, UK, 1990.
- 3 Cai L D, 1990: A Consistent Zero-Thresholding Inequality for the Gaussian and Mean Curvatures. *Computer-aided Surface Geometry and Design*, A. Bowyer (Ed.), Oxford University Press, UK, 1994: 365~372.
- 4 Besl P J. Geometric Signal Processing. R. C. Jain, A. K. Jain (Eds.) *Analysis and Interpretation of Range Images*, 1990: 174~175.

附录

设主曲率 C_1 和 C_2 中有微小摄动 ξ_1 和 ξ_2 :

$$|\xi_1| \leq \delta, |\xi_2| \leq \delta, \delta = \text{const} \quad (1)$$

则其在平均曲率 H 中产生的摄动 E_H 满足:

$$|E_H| = |[(C_1 + \xi_1) + (C_2 + \xi_2)]/2 - H| = (\xi_1 + \xi_2)/2 \leq \delta \quad (2)$$

所以, H 的零阈值 ϵ_H 应为:

$$\epsilon_H \geq \delta \quad (3)$$

在高斯曲率 $K = C_1 \cdot C_2$ 中产生的摄动 E_K 为:

$$|E_K| = |(C_1 + \xi_1)(C_2 + \xi_2) - K| = |C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + \xi_1\xi_2| \leq (|C_1| + |C_2|)\delta + \delta^2 \quad (4)$$

在 $J = (C_1^2 - C_2^2)/2$ 中产生的摄动 E_J 为:

$$|E_J| = |[(C_1 + \xi_1)^2 - (C_2 + \xi_2)^2]/2 - J| = |C_1\xi_1 - C_2\xi_2 + (\xi_1^2 - \xi_2^2)/2| \leq (|C_1| + |C_2|)\delta + \delta^2 \quad (5)$$

由正文中式(4), $\bar{H} = (|C_1| + |C_2|)/2$ 得

$$|E_K| \leq 2\bar{H}\delta + \delta^2 \leq 2\bar{H}\epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (6)$$

$$|E_J| \leq 2\bar{H}\delta + \delta^2 \leq 2\bar{H}\epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (7)$$

所以, K 和 J 的零阈值 ϵ_K 和 ϵ_J 分别为:

$$\epsilon_K \geq 2\bar{H}\epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (8)$$

$$\epsilon_J \geq 2\bar{H}\epsilon_H + \epsilon_H^2 \quad (9)$$



蔡利栋 1970年3月毕业于清华大学,曾在湖南省计算所从事数值分析与计算、模式识别等工作。1985~1989年在英国爱丁堡大学人工智能系攻读计算机视觉博士学位。1989~1994年在英国谢菲尔德大学人工智能视觉研究所从事计算机视觉工作,任副研究员与研究员。1994应邀到新西兰奥塔哥大学计算机科学系任客座教授。1995年起在暨南大学计算机科学系任教授,继续计算机视觉等方面的研究,现为系主任。已在国外发表学术论文20余篇,国内8篇。

Notes on Zero-Thresholding of KH and KJ Sign Images

Cai Lidong

(Department of Computer Science, Jinan University, Guangzhou 510632)

Abstract This paper compares the KH and KJ sign images in the context of the zero-thresholding at single and multiple scales. A function in the real number field is given for implementing the transformation from the KH coordinate to the KJ coordinate. It is shown that the consistent zero-thresholding inequality $\epsilon_K \geq 2\bar{H}\epsilon_H + \epsilon_H^2$ maintains effectiveness for both KH and KJ sign images. Therefore, from the viewpoint of zero-thresholding, the KH sign image is virtually a better choice for surface segmentation.

Keywords Surface segmentation, KH and KJ sign images, Consistent zero-thresholding

携手并进,共创中国市场的美好未来

为了推动国产软件技术的进步,提高软件设计水平,使国内独立的软件开发商更好地了解和应用惠普公司拥有的先进科学技术,并为广大用户提供领导市场的完整的大幅面打印解决方案,中国惠普公司将在近日推出“Designed For HP DesignJet”(惠普公司认证软件开发商)的活动。惠普公司希望通过此次活动使惠普与中国的独立的软件开发商精诚合作,资源共享,不断地开拓市场并提高市场占有率,以实现共同繁荣的目标。

在本次推广活动中,凡在中国范围内与惠普有合作关系的中国的独立的软件开发商,只要其软件完全支持 HP DESIGNJET 产品,并通过中国惠普公司有关专家的测试,均可向中国惠普有限公司提出申请。惠普公司将根据公司制定的“衡量标准”给

予相应的授权认证。具体衡量标准:软件发展方向符合惠普大幅面打印机的市场发展战略;每年在市场方向有一定的投入;在大幅面打印行业中有一定的影响力或占有主导地位。

中国惠普公司为参加此次活动的软件开发商制定了详细的“参加者权益”和“参加者义务”条款,给予被认证者更多的优势、实惠及利益。如向被认证者有计划地提供测试机会、组织开发商培训、邀请被认证者参加惠普公司的市场宣传活动及开发商大会、成绩特别突出者将获特殊奖励。

中国惠普公司将以此次活动为契机,与中国软件界的优秀开发商携起手来,共创中国市场的美好未来。