用 DCT 进行最小二乘相位估值的求解

向茂生　李树楷

（中国科学院遥感应用研究所，北京　100101）

摘　要　已知相位差进行相位估值，在干涉雷达，自适应光学，补偿式成像，图象处理等方面起着关键作用。文中以 2-范数的概念，推证了最小二乘相位估值问题可以转化成泊松方程，并用离散余弦变换(DCT)的方法进行求解，效果很好。

关键词　最小二乘估值，DCT，2-范数

1　引　言

在干涉雷达，自适应光学，补偿式成像，图象处理等方面，一个共同的问题是由已测量的相位差进行相位的估值。到目前为止，进行这种估值所采用的方法分 2 类：积分法和最小二乘法。如果没有测量噪声存在，积分是一种简单，直接的方法。否则，积分将导致噪声的传递。为了减少噪声对估值的影响，在积分法中必须对被强噪声污染的点进行识别。在没有进行污染点识别的条件下，非加权最小二乘法（简称最小二乘法〕是一种有效的方法。

最小二乘意义的相位估值问题可以转化成牛曼(Neumann)条件下的泊松方程。文献[1]用直接的方法〔令误差平方和中各变量的偏导数为零〕，文献[2]用傅立叶变换的方法，分别推导了这一关系。

泊松方程的求解，分为迭代法和直接法。一般迭代法（如 Jacobi 迭代法，Gauss－Seidel 迭代法，SOR 方法等〕，由于收敛速度慢，通常不适用于大的数据〔如 64×64 以上〕。多层网格迭代是一种改进的迭代方法，可以大大提高收敛速度，但软件编程较复杂。DCT 法是一种简单，快速的直接方法。

2　由最小二乘意义的相位估值到泊松方程

设 $\phi_{i,j}$为二维离散相位值，$i=0,1,\ldots,N-1$，$j=0,1,\ldots,N-1$，并令相邻 2 点的相位差为 $\psi^l_{i,j}$，$l=1,2$。$\psi^1_{i,j}$，$\psi^2_{i,j}$分别代表纵方向和横方向的相位差。则：

$$\psi^1_{i,j} = \phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}$$
$$i = 0,1,\ldots,N-2,\; j = 0,1,\ldots,N-1 \quad (1)$$

$$\psi^2_{i,j} = \phi_{i,j} - \phi_{i,j+1}$$
$$i = 0,1,\cdots,N-1,\; j = 0,1,\cdots,N-2 \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} \\ \phi_{0,1} \\ \phi_{0,2} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,N-2} \\ \phi_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \psi^1_{0,0} \\ \psi^1_{0,1} \\ \vdots \\ \psi^1_{N-2,N-1} \\ \psi^2_{0,0} \\ \vdots \\ \psi^2_{N-1,N-3} \\ \psi^2_{N-1,N-2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

令：

$$\boldsymbol{A\Phi} = \boldsymbol{b} \quad (4)$$

其中，A 是一个大小为$[2N(N-1)]\times[N\times N]$的矩阵。

收稿日期：1997-03-26；收到修改稿日期：1997-06-23

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix} \tag{5}
$$

式(4)是一线性方程组，共有 $2N(N-1)$个方程，只有 N2 个未知数，属于矛盾方程，没有解。因此，只能求最优近似解。在这里，讨论它的最小二乘解。

如果一估计值 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$($\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 为一个有 N^2 个分量的向量)满足

$$\|A\tilde{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{b}\| \leqslant \|A\tilde{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{b}\| \tag{6}$$

则称 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 是方程组 $A\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解，其中 $\|\cdot\|$ 为 2-范数。下面来寻找满足上述条件的 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$。

令
$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=A^{*}\boldsymbol{b} \tag{7}$$

则
$$\begin{aligned}
&\|AA^{*}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\| \leqslant \|A\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{b}\| \leqslant\\
&\|AA^{*}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}+A\boldsymbol{\Phi}-AA^{*}\boldsymbol{b}\| \leqslant\\
&\|(AA^{*}-I)\boldsymbol{b}+A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b})\|
\end{aligned}$$

写成内积形式，即

$$\begin{aligned}
&((AA^{*}-I)\boldsymbol{b},(AA^{*}-I)\boldsymbol{b}) \leqslant\\
&((AA^{*}-I)\boldsymbol{b}+A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b}),\\
&(AA^{*}-I)\boldsymbol{b}+A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b})) \leqslant\\
&((AA^{*}-I)\boldsymbol{b},(AA^{*}-I)\boldsymbol{b})+\\
&2((AA^{*}-I)\boldsymbol{b},A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b}))+\\
&(A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b}),A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b}))
\end{aligned}$$

要求上式成立，只要 $((AA^{*}-I)\boldsymbol{b},A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b}))=0$，即可。

亦即　$(\boldsymbol{b},(AA^{*}-I)^{\mathrm{T}}A(\boldsymbol{\Phi}-A^{*}\boldsymbol{b}))=0$

上式成立的充要条件是 $(AA^{*}-I)^{\mathrm{T}}A=0$，即

$$A^{\mathrm{T}}AA^{*}=A^{\mathrm{T}}$$

则有
$$A^{*}=[A^{\mathrm{T}}A]^{-1}A^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

这样，满足不等式(6)的 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 为：

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=A^{*}\boldsymbol{b}=[A^{\mathrm{T}}A]^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{9}$$

即
$$[A^{\mathrm{T}}A]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{10}$$

这是一个可以求解的线性方程组。

将式(10)展开，可以得 N^2 个方程。其中对应于内点的$(N-2)^2$ 个方程为：

$$\begin{aligned}
&4\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}-\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j-1}-\phi_{i,j+1}=\\
&\psi^1_{i,j}-\psi^1_{i-1,j}+\psi^2_{i,j}-\psi^2_{i,j-1}
\end{aligned} \tag{11}$$

令
$$\rho_{i,j}=\psi^1_{i,j}-\psi^1_{i-1,j}+\psi^2_{i,j}-\psi^2_{i,j-1}$$

则
$$\begin{aligned}
&4\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}-\phi_{i+1,j}-\\
&\phi_{i,j-1}-\phi_{i,j+1}=\rho_{i,j}
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $i=1,2,...,N-2,\ j=1,2,...,N-2$

对应于 $4(N-1)$个边界点，则：

$$\begin{aligned}
&\psi^1_{-1,j}=0,\psi^1_{N-1,j}=0\\
&j=0,1,...,N-1\\
&\psi^2_{i,-1}=0,\psi^1_{i,N-1}=0\\
&i=0,1,...,N-1
\end{aligned} \tag{13}$$

由此得出结论，求解最小二乘意义的相位估值问题等效于求解牛曼条件下的泊松方程。

下面解释一下这种估值的物理意义。将(11)式写成迭代形式：

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}^{(k+1)}_{i,j}=\\
&\frac{1}{4}(\phi^{(k)}_{i-1,j}+\phi^{(k)}_{i+1,j}+\phi^{(k)}_{i,j-1}+\phi^{(k)}_{i,j+1})+\\
&\frac{1}{4}(\psi^1_{i,j}-\psi^1_{i-1,j}+\psi^2_{i,j}-\psi^2_{i,j-1})
\end{aligned} \tag{14}$$

可以看出，网格上某一点的相位值可以由它相邻网格上的相位值加上变化率(相位差值)来求得。由于纵横方向有 4 个相邻点，如果用这 4 个相邻点的值与它们变化率的和的平均值来求取该点的相位值，则所求得的值具有最小平方误差。

3 用 DCT 法求解泊松方程

微分关系可以通过适当的积分变换,转化成代数形式。式(11),(12)是泊松方程的空间域形式。如果对两端进行 DCT 变换,则有:

$$\hat{\phi}_{i,j} = \frac{\hat{\rho}_{i,j}}{2(\cos\frac{\pi}{N}i + \cos\frac{\pi}{N}j - 2)} \tag{15}$$

其中,$\hat{\phi}_{i,j}$,$\hat{\rho}_{i,j}$,分别是 $\phi_{i,j}$和 $\rho_{i,j}$的 DCT 变换形式。当 $i=j=0$ 时,上式无意义,此时取 $\hat{\phi}_{0,0}=\hat{\rho}_{0,0}$。

下面是用 DCT 法求解泊松方程的一般步骤:

(1)对 $\rho_{i,j}$进行 2D-DCT 变换。即:

$$\hat{\rho}_{i,j} = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} 4\rho_{m,n}\cos\left[\frac{\pi}{2N}i(2m+1)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2M}j(2n+1)\right] \tag{16}$$

其中,$i=0,1,2,\ldots,N-1$, $j=0,1,2,\ldots,N-1$。

(2)将 $\hat{\rho}_{i,j}$代入式(15),计算 $\hat{\phi}_{i,j}$。

(3)对 $\hat{\phi}_{i,j}$。进行 2D-DCT 逆变换,即:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{N\times M}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_1(m)\omega_2(n)\hat{\phi}_{i,j}\cos\left[\frac{\pi}{2N}m(2i+1)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2M}n(2j+1)\right] \tag{17}$$

其中, $i=0,1,2,\ldots,N-1$, $j=0,1,2,\ldots,N-1$.

$$\omega_1(0)=\omega_2(0)=1/2,\ \omega_1(l)=\omega_2(l)=1,$$
$$l=1,2,\ldots,N-1$$

4 计算结果及分析

用 64×64 个数据进行上机计算,表 1 是部分(局部)结果,精度为 10^{-7},完全能够满足机载、星载干涉雷达的要求。计算量为 10^7.如果用快速算法,计算量降为 10^5。迭代法、直接 DCT 法、快速 DCT (F-DCT)法的计算量分别为 KN^2(K 为迭代次数)、N^4、$N^2\log_2N$。表 2 是 $N=64$ 时的结果比较。由表 2 可以看出,精度为 10^{-7}的 DCT 法计算量相当于精度为 0.01 的 G-S(高斯-赛得尔)法的计算量。精度为 10^{-7}的 F-DCT 法计算量相当于精度为 0.1 的 G-S 法的计算量。因此,无论是精度还是计算量,DCT 法远远优于迭代法.而且,迭代法的精度无法满足干涉雷达的需要。

表 1 部分相位数据

Table 1 Parts of phase data

i \ j	ρ 的值 0	ρ 的值 1	ρ 的值 2	相位的估值 φ 0	相位的估值 φ 1	相位的估值 φ 2
0	2.295 916	−2.276 998	0.038 322	10.842 790	11.986 629	11.970 298
1	0.663 855	−0.644 458	0.039 281	10.196 814	10.738 821	10.839 243
2	−0.968 729	0.988 629	0.040 288	9.736 730	9.288 139	9.625 806
3	−2.601 839	2.622 268	0.041 346	9.058 619	8.039 827	8.521 487

表 2 DCT 法与 G-S 法的比较

Table 2 Efficiency of the computation with DCT and G-S

	G-S			DCT	F-DCT
精度	0.1	0.01	0.001	10^{-7}	10^{-7}
迭代次数	17	702	2628		
计算量	3.5×10^5	1.4×10^7	5.4×10^7	5.1×10^7	1.3×10^5

5 结 论

在已知相位差的条件下,最小二乘相位估值能够有效抑制噪声误差的传播。本文以 2—范数的概念,推证了这种相位估值问题可以转化成求解泊松方程,并通过模拟计算,证明 DCT 是求解泊松方程的高效方法。但最小二乘法的缺点是,它无法排除噪声污染点对局部误差的影响。另外,用该方法进行干涉雷达(InSAR)相位估值(unwrapping)时,鬼线(ghost line)现象必须考虑。

参 考 文 献

1 Fried D L. Least-square fitting a wave-front distortion estimation to an array of phase-difference measurements. J. Opt. Soc. Am, 1977,67(3):370~375.

2 Hudgin R H. Wave-front reconstruction for compensated imaging . J. Opt. Soc. Am,1977,67(3):375~378.

向茂生，1989年毕业于西北工业大学航空电子工程系，获电磁场与微波技术专业硕士学位。现为中科院遥感所博士生。研究方向有：电磁场与微波技术，信号与图象处理，SAR与InSAR。

李树楷，1962年毕业于武汉测绘科技大学航测系。现为中科院遥感所研究员，博士生导师。主要从事遥感与摄影测量应用研究。当前正从事新型遥感对地观测集成技术系统研究。

DCT-Based Algorithm for Least-Squares Phase Estimation

Xiang Maosheng, Li Shukai

(*Institute of Remote Sensing Applications, Beijing* 100101)

Abstract The estimation of phases from measurements of phase differences plays an important role in radar interferometry, adaptive optics, compensated imaging and image processing. The derivation of Possion's equation from the least-squares estimation with the concept of the 2-norm is presented in this paper. It has been shown that the equation can be solved by use of the cosine transforms.

Keywords Least-squares estimation, DCT, 2-norm

虎跃龙腾 景象一新

九八康柏代理开年大会在京召开

1998年2月15日，“98’康柏代理开年大会”在北京隆重召开。康柏中国区总裁谢克人先生出席并主持了会议。

会上，康柏对97年的代理情况做了总结和回顾，对做出突出业绩的代理商进行了表彰。

谢克人先生在会上向代理商阐述了98年康柏“全面合作伙伴”策略，并就康柏在中国市场的目标和使命发表了演说。谢克人先生明确提出康柏公司在中国的IT市场上，将把自己的目标定在PC销量和营业额中国第一的位置上。为此将大力推动他所倡导的“全面合作伙伴”计划，其中也包括与代理商的合作。

为配合“全合作伙伴”策略的实施，使代理对康柏98年的战略及运作模式有一个全面、透彻的了解，康柏制定了一系列新的措施，例如：针对代理商的大客户登记制度，借此扩大大客户订单的成功率；加强技术支持和培训，使康柏的服务从单纯的产品维修保养，上升到以系统增值服务和满足用户需求为最终目的的有偿服务；加强广告宣传和市场推广活动投入；完善现有的代理商队伍，帮助代理商提高自身素质和水平，对代理的类型进行重新分类，以总经销、总代理、产品总代理和一级代理/系统集成为上下层次的代理渠道体系已经确立起来，并将在未来的一年中付诸实行；依靠在上海、沈阳、广州、成都所设的办事处分别给予各地代理商以全力的支持；完整的代理奖励计划。

1998年将是康柏做出重大改革的一年，也是康柏公司实现2000年目标，具有战略性意义的一年。康柏和代理商，将以共赢理念及相互信任为合作的基础，通力合作，拓展中国市场。