

随机 Koch 曲线岛及其分维测定的计算机模拟

李玉清¹ 李 蓬² 赵咏秋¹ 刘雅晶³ 李启楷¹

(1. 大冶特钢股份有限公司技术中心, 黄石 435001) (2. 北京航空航天大学, 北京 100083) (3. 北京科技大学, 北京 100083)

摘 要 获得的“ \wedge ”生长基础的树形结构和森林结构成为有限嵌套层次随机 Koch 曲线岛计算机模拟的基础。定义了3类随机 Koch 曲线岛,并分析了只有周长——面积法才可能得到第2类和第3类曲线岛的稳定分维值。给出了模拟3类曲线岛及其分维值测定的计算程序。从计算结果,明确了实际测定分维和统计维数时应如何选择小岛,所需测量的小岛对数以及分维和统计维数同嵌套层次的关系,3类曲线岛所对应的 $\lg P - \lg A$ 回归直线的分布及其同嵌套层次的关系。

关键词 树形结构,随机 Koch 曲线岛,分维,统计维数,计算机模拟

1 引言

在金属断口上可用周长——面积法和周长——最大直径法测定剖面小岛周界分形结构的分维值^[1~3]。我们构造了不同分形曲线岛,并研究了岛的不同构造方式同分维和统计维数的关系^[4];研究了 Koch 曲线岛和两种广义 Koch 曲线岛的嵌套层次及其同定码尺条件下分维测定方法的关系;对修改 Koch 曲线岛的分析结果表明,除了周长——最大直径法可获得该分形结构的分维理论值外,周长——面积法也可能得到该分形结构的理想分维值。

本文将获得的“ \wedge ”生长基础的树形结构和森林结构作为有限嵌套层次随机 Koch 曲线岛计算机模拟的基础。对所定义的3类随机 Koch 曲线岛,分析了分维测定的方法,并给出其构造和分维测定的计算机模拟,获得了有意义的计算结果,某些结果对随机 Koch 曲线岛分维和统计维数的实验测定有指导作用。

2 随机 Koch 曲线岛迭代过程的计算机模拟基础

若随机 Koch 曲线岛初始图形(正 n 边形)的边

长为 E_0 , 随机变量 C 在区间 $(0, 1/3)$ 上均匀分布, 对岛的各边, 去掉位于 E_0 正中、长度为 $E_0 E_{11}$ (对某边, E_{11} 为 C 的随机生成值) 的线段, 并用与之组成等边三角形的另外两边代替, 即生成出一个“ \wedge ”; 将这样的迭代过程独立地、连续地进行下去, 最终得到一个每边由极限曲线 F 构成的随机 Koch 曲线岛, 其 Hausdoff 维数 S 是方程:

$$S + 1 = 12 \times 10^{-(S+1)} - 6 \times 3^{-(S+1)}$$

的解, 且 $\dim_H F = 1.144$ ^[5]。

当嵌套层次 $m=1$ 时, 不仅生长出边长为 $E_0 E_{11}$ 的“ \wedge ”, 如图 1 所示, 还为 $m=2$ 的“ \wedge ”的生长提供 2 个生长基础 $E_0 E_{11}$ 和 $E_0 F_{11}$; 同样, $m=2$ 的“ \wedge ”生成后, 为 $m=3$ 的“ \wedge ”提供 8 个生长基础。对每边, E_{ij} 独立、随机生成, $F_{ij} = (1 - E_{ij})/2$, $i=1, 2, \dots, m$; $i \geq 2$ 时, $j=1, 2, \dots, 2^{2(m-1)}$ 。于是, 随着嵌套层次的增加, 曲线岛每边“ \wedge ”的生长基础构成树形结构; 对应于初始图形为正 n 边形的曲线岛, “ \wedge ”生长基础构成的森林结构则是由这样的 n 个树形结构组成的。相应于森林结构第 m 层的接点数为 $2^{2m-1}n$, 即为 $m+1$ 层“ \wedge ”的生长提供的生长基础数。

如果“ \wedge ”一律往外生长, 则将形成的曲线岛称为第 1 类随机 Koch 曲线岛, 如图 2(a); 如果从 $m=1$ 或 2 开始, “ \wedge ”以相同几率往外和往内生, 就构成第 2 类或第 3 类随机 Koch 曲线岛, 如图 2(b) 或

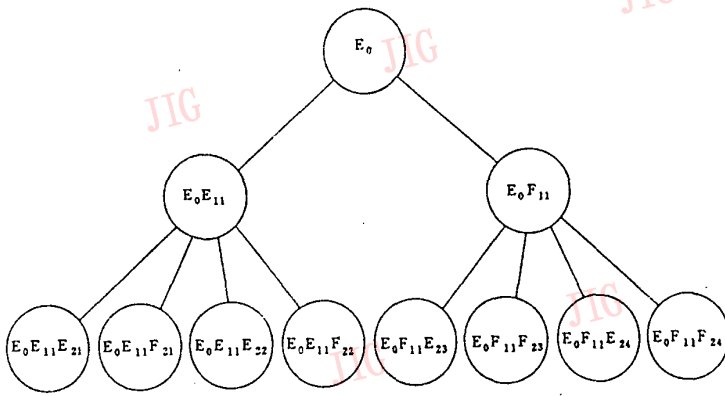


图1 随机 Koch 曲线岛每边“Λ”生长基础的树形结构
Fig.1 The tree structure of “Λ” growing base at each side of the random Koch curve island

图2(c)。

图2中初始图形为正三角形、边长 E_0 为 3^{m-1} 的三对岛的嵌套层次 m 分别为2(左)和3(右),且三个 m 相同的岛的 E_{ij} 相等。用周长—面积法,由图2(a)的一对岛获得其分维值 1.13803。

从图2不言而喻,这3类随机 Koch 曲线岛的凸壳形状和大小或面积均随嵌套层次而变,因而采用周长—最大直径等方法或周长—面积法均不能获得该分形结构的稳定分维值^[3];然而,对不重复的各对岛的测量次数(time)足够多时,第2类和第3类岛的面积 A_0 和 A'_0 的平均值将趋于恒定,且 A_0 的平均值接近初始图形的面积,因而采用周长—面积法可能获得这2类曲线岛的稳定分维值。

定,且 A_0 的平均值接近初始图形的面积,因而采用周长—面积法可能获得这2类曲线岛的稳定分维值。

3 计算程序

3.1 有关计算公式

初始图形为正 n 边形、嵌套层次为 m 的岛的初始图形周长和面积分别为

$$P_0 = 3^{m-1}n \quad (1)$$

$$A_0 = 3^{2(m-1)}(n/4)\cot(\pi/n) \quad (2)$$

若每生长一个“Λ”,按图1得到的周长增量为 dP ,则相应的面积增量

$$dA = (\sqrt{3}/4)(dP)^2 \quad (3)$$

若嵌套层次为 m_i 和 m_j 的一对岛周长、面积、初始图形面积和 $m=1$ 时面积的对数差分别为 $d\lg P$ 、 $d\lg A$ 、 $d\lg A_0$ 和 $d\lg A'_0$,可按式计算3类随机 Koch 曲线岛的分维值 D 、 D_0 和 D'_0 :

$$\begin{pmatrix} D \\ D_0 \\ D'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d\lg P/d\lg A \\ 2d\lg P/d\lg A_0 \\ 2d\lg P/d\lg A'_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

3.2 计算程序

图3给出计算程序的总框图。该程序适用于计算初始图形为正 n 边形、有限嵌套层次 $m_i=2 \sim m_{max}$ 和 $m_j=1 \sim (m_{max}-1)$ 的各对(或全部)岛的对数差 $d\lg P$ 和 $d\lg A$ 、 $d\lg A_0$ 及 $d\lg P$ 和 $d\lg A'_0$ 分别计算分维 D 、 D_0 及 D'_0 (或统计维数 D_s 、 D_α 及 D'_α);可打印或绘出

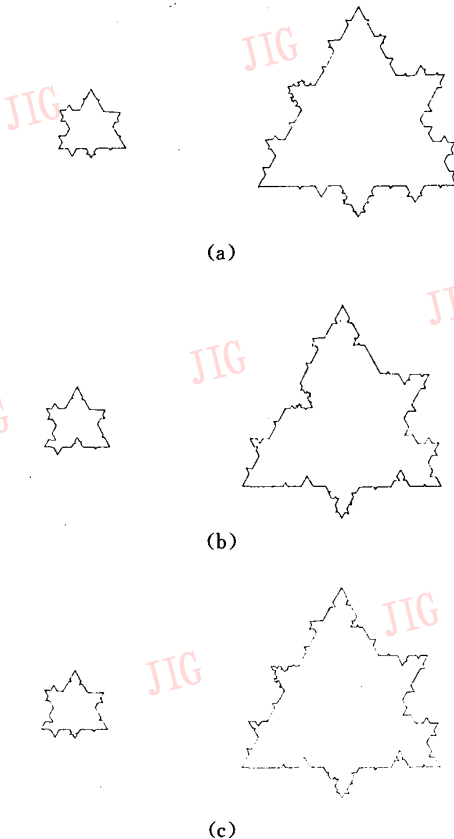


图2 初始图形为正三角形、边长为 3^{m-1} 、嵌套层次 $m=2$ (左)和3(右)的(a)第1类、(b)第2类和(c)第3类随机 Koch 曲线岛

Fig.2 (a)The first (a), (b)the second and (c)the third kinds of random Koch curve islands. The primary patterns are equilateral triangles with side length 3^{m-1} and the nested tier $m=2$ (left) and 3 (right) for the islands

每次的计算结果；可任意设置计算不重复的各对岛的次数 time 值，并打印出 time 次的平均计算结果。

1.144。因此，仅从分维的稳定性来考虑，在实验测定中应选择尺寸相差较大的一对岛。

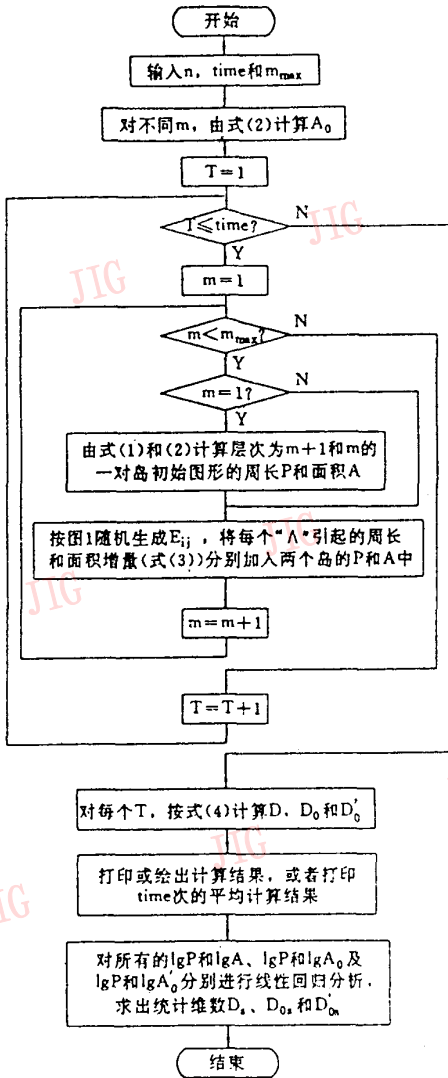


图 3 有限嵌套层次的随机 Koch 曲线岛的构造及其分维测定的计算程序总框图

Fig. 3 Simple block diagram of compute program on both structure and fractal dimension determination of the random koch islands with finite nested tier curve

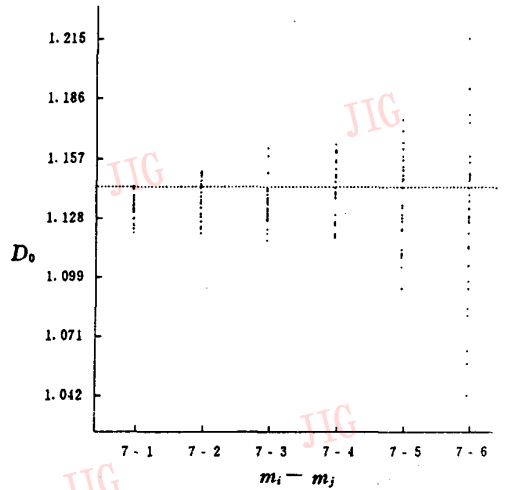
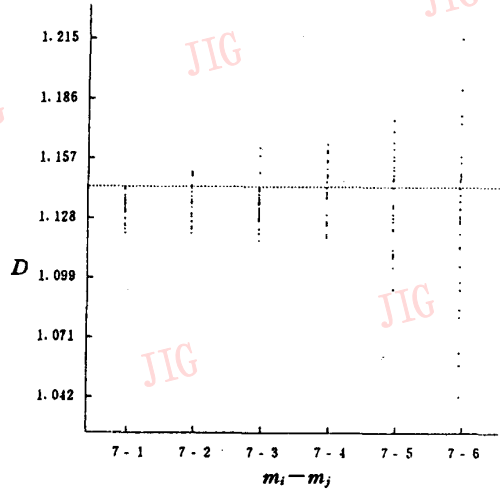


图 4 由嵌套层次为 m_i 和 m_j 的 30 对第 1 类和第 2 类随机 Koch 曲线岛所获得的 D 和 D_0 同 m_i - m_j 的关系

Fig. 4 The relationship between D (and D_0) and m_i - m_j, obtained from 30 pairs of the first kind or second kind of random Koch curve islands with nested tier m_i and m_j

5 计算结果及其分析

对嵌套层次为 m_i 和 m_j 的一对岛的 5 次、10 次、20 次和 30 次计算结果均表明，由 m_i 和 m_j 差值越大的一对岛所计算的分维值 D 或 D_0 越接近，反之分散度越大，如图 4，而且平均分维值均低于

图 5 左表示 m_i = m_max = 5, 6, 7, m_j = 1, 2, ..., m_i - 1 时，对 m_i, m_j 各种组合的一对第 1 类、第 2 类和第 3 类随机 Koch 曲线岛计算 30 次所获得的平均分维值 D、D_0 和 D'_0。由此可见，D 随 m_j 的增大而增大，但 m_i = 7, m_j > 4 时，D 随 m_j 增大而有减小的趋势；D_0 和 D'_0 随 m_i 增大趋于稳定。

图5右表示 $m_{max}=5,6,7$ 时, 对 m 分别从 1, 2, $\dots, m_{max}-3$ 至 m_{max} 的岛系列的 $\lg P, \lg A$ 进行线性回归分析所获得的平均统计维数 D_s, D_{os} 和 D'_s ($\text{time}=30$)。可以看到, 随着回归分析所涉及岛的最低嵌套层次的增高, D_s 增大, 而且 D_s 随 m_{max} 的增大而有增高趋势, 但 D_{os} 和 D'_s 值相当稳定。

图5表明, 对于有限嵌套层次的3类随机 Koch 曲线岛, 其分维和统计维数一般均低于 1.144, 与图

4 所显示的结果一致。然而, 图5说明, 如果实验测定中选择尺寸差别较大的一对岛, 虽然得到的分维值较稳定(图4), 但会使平均分维偏低; 由于所包含的小岛(m 较小)较多, 也会使统计维数 D_s 偏低。因此, 实验测定 D_s, D_{os} 和 D'_s 时应兼顾这两方面, 选择的每对岛的尺寸差别应适中; 测定 D_s 时应避免选择尺寸过小的岛。

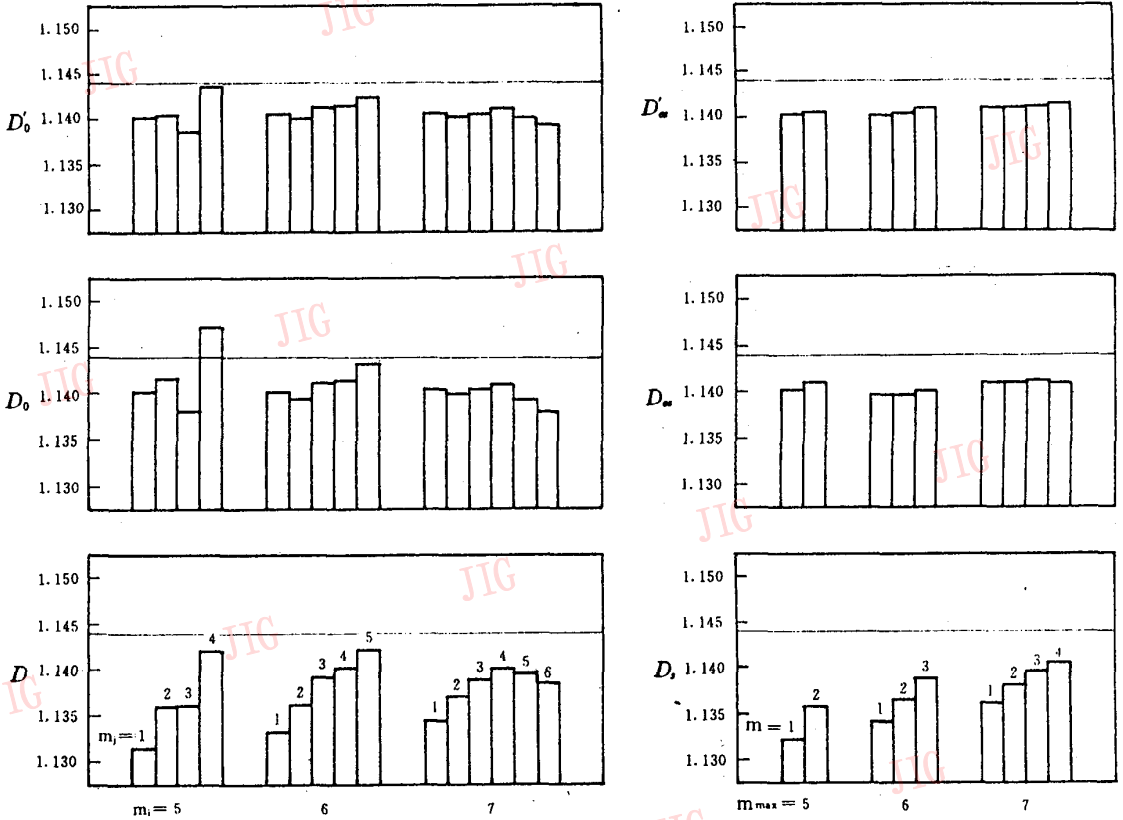


图5
Fig. 5

图5还表明, 对于第2类和第3类随机 Koch 曲线岛, 实验测定中选择的岛的尺寸对其统计维数 D_{os} 和 D'_s 几乎没有影响, 而且正如前面分析中所预期的那样, 岛的嵌套层次对 D_{os} 和 D'_s 也无显著影响。

图6表示从 time 对岛 ($m=5$) 计算的平均分维和统计维数同 time 的关系。重复计算结果表明, 要获得接近的分维值, 需测量 30 对以上的岛, 而只需测量 20 对岛就可得到十分接近的统计维数。

图7示出 $\text{time}=30$ 时, 平均分维和统计维数同岛的嵌套层次 m 的关系的重复计算结果。图7表明, $m < 5$ 时, D_s, D_{os} 和 D'_s 均随 m 增大而显著增大, $m \geq 5$ 时, 它们虽不稳定, 但其变化同 m 增大无明显

关系; 直到 $m=7, D_s$ 随 m 增大而逐渐增大; $m \geq 5$ 时, D_{os} 和 D'_s 较稳定, 且同 m 增大无明显关系。

$m=3, 4, \dots, 7, \Sigma \text{time}=230$ 时, 平均统计维数 D_s, D_{os} 和 D'_s 及 $\lg P - \lg A$ 回归直线的平均截距 K 的计算结果如表1。表1表明, D_s 随 m 增大明显增大, 而 D_{os} , 特别是 D'_s 随 m 的变化较小; 第1类、第3类和第2类随机 Koch 曲线岛的 $\lg P - \lg A$ 回归直线依次自下而上分布; 后两者的 K 随 m 变化很小, 但前者随 m 增大有减小趋势。由此可见, 相应于第1类岛的回归直线随 m 增大逆时针方向旋转, 使其斜率增大, 而截距减小。

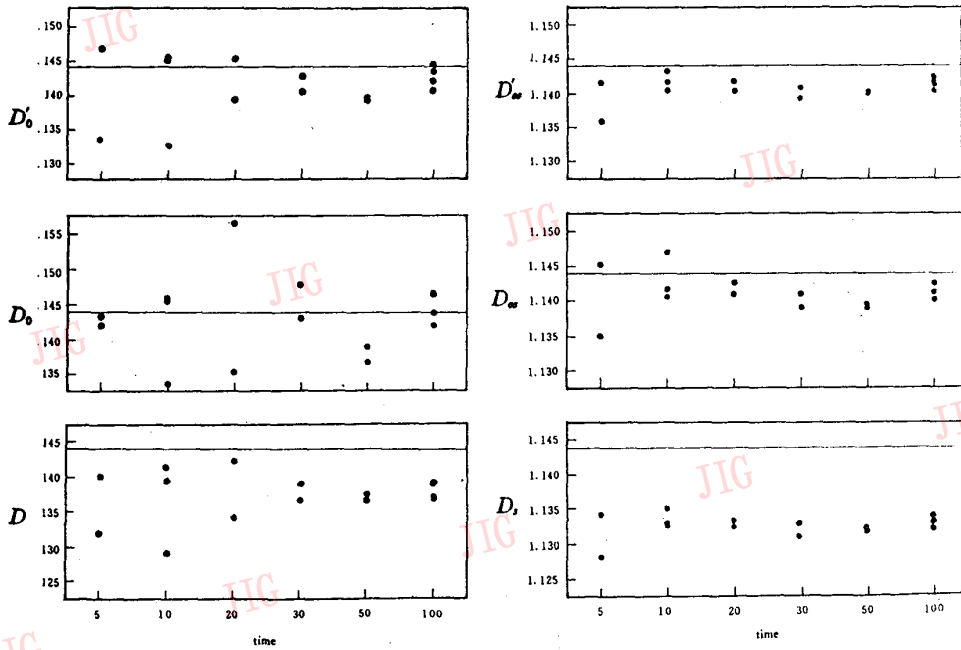


图 6 $m=5$ 时, 平均分维 D, D_0 和 D'_0 及平均统计维数 D_s, D_{os} 和 D'_{os} 同时间的关系
 Fig. 6 The relationship between average fractal dimensions D, D_0, D'_0 (and average statistical dimensions D_s, D_{os}, D'_{os}) and time when $m=5$

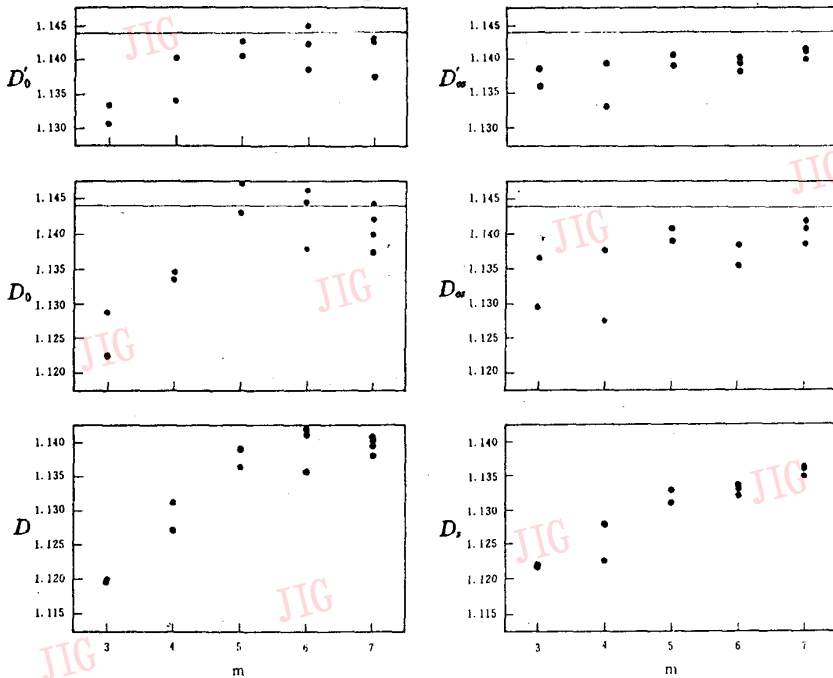


图 7 $\text{time}=30$ 时, 平均分维 D, D_0 和 D'_0 及平均统计维数 D_s, D_{os} 和 D'_{os} 同嵌套层次 m 的关系
 Fig. 7 The relationship between average fractal dimensions D, D_0, D'_0 (and average statistical dimensions D_s, D_{os}, D'_{os}) and nested tier m when $\text{time}=30$

表1 三类随机 Koch 曲线岛的平均统计维数及 $\lg P - \lg A$ 回归直线的平均截距同嵌套层次 m 的关系
 Table 1 The relationship between average statistical dimension (and average intercept of $\lg P - \lg A$ regression straight lines) and nested tier m for three kinds of the islands

m	$D_s(K)$	$D_{os}(K)$	$D'_{os}(K)$
3	1.124 800(0.721 191)	1.138 443(0.751 370)	1.139 762(0.725 119)
4	1.128 793(0.720 134)	1.139 269(0.751 543)	1.139 680(0.724 990)
5	1.133 893(0.716 599)	1.140 541(0.750 403)	1.140 217(0.724 762)
6	1.136 369(0.714 306)	1.139 805(0.750 369)	1.140 366(0.724 134)
7	1.138 357(0.712 069)	1.140 932(0.750 162)	1.141 000(0.724 291)

5 结 论

(1) 获得的随机 Koch 曲线岛“ Λ ”生长基础的树形结构和森林结构,成为初始图形为正 n 边形的随机 Koch 曲线岛计算机模拟的基础。

(2) 定义了 3 类随机 Koch 曲线岛。当对不重复的各对岛的测量次数足够多时,采用周长—面积法可获得第 2 类和第 3 类曲线岛的稳定分维值,而对第 1 类曲线岛,周长—面积关系或周长—最大直径关系失效。

(3) 给出了计算初始图形为正 n 边形、有限嵌套层次的随机 Koch 曲线岛的周长 P 和面积 A ,并由各对(或全部)岛的 $\lg P$ 和 $\lg A$ 、 $\lg P$ 和 $\lg A_0$ 及 $\lg P$ 和 $\lg A'_0$ 分别计算 3 类岛的分维 D 、 D_0 及 D'_0 (或统计维数 D_s 、 D_{os} 及 D'_{os})的计算程序。

(4) 由计算结果可获得如下结论:

(4.1) 有限嵌套层次 3 类随机 Koch 曲线岛的分维和统计维数一般均低于 1.144。实验测定 D 、 D_0 和 D'_0 时,选择的每对岛的尺寸差别应适中;测定 D_s 时,应避免选择尺寸过小的岛。岛的大小(嵌套层次)对 D_{os} 和 D'_{os} 的测定无显著影响。

(4.2) 要获得较接近的分维值,需测量 30 对以上的岛,但只需测量 20 对岛就可得到十分接近的统计维数。

(4.3) 嵌套层次 $m < 5$ 时,分维值随 m 增大而显著增大; D_s 随 m 增大而逐渐增大; $m \geq 5$ 时, D_{os} 和 D'_0 较稳定,且同 m 增大无明显关系。

(4.4) 第 1 类、第 3 类和第 2 类随机 Koch 曲线岛的 $\lg P - \lg A$ 回归直线依次自下而上分布;后者回归直线的截距随 m 变化很小,前者的回归直线随 m 增大逆时针方向旋转,且截距减小。

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot B B, Passoja D E, Paullay A T. Fractal character of fracture surfaces of metals. Nature, 1984, 308(19): 721~722.
- 2 龙期威,穆在勤. 有限层次分形结构和固体的断裂行为. 中国科学, 1994, 24: 94~100.
- 3 刘国权,于海波,许洋,秦湘阁. 分形统一方程与分维稳定性. 中国科学, 1995, 25: 111~1120.
- 4 赵咏秋,李玉清,冯永和. 三次 Koch 曲线岛的构造方式与维数. 中国电视学与图象分析, 1997, (2): 6~11.
- 5 Falconer K J. Fractal geometry, mathematical foundation and applications. England: John Wiley and Sons, 1990.



李玉清, 1965 年毕业于武汉大学物理系, 大冶特殊钢股份有限公司技术中心高级工程师, 主要研究方向: 奥氏体合金晶界沉淀; 分形几何在材料科学中的应用, 有著作《高温合金晶界间隙相》, 作为第一作者在国内发表论文 70 余篇, 作为第一完成人的两个项目分别获 1995 年度湖北省科技进步一等奖和冶金工业部科技进步二等奖。



李蓬, 1993 年和 1995 年在东北大学分别获金属物理专业和计算机软件专业学士学位, 1998 年在北京航空航天大学获材料物理专业硕士学位。从事非晶态、晶界、Ti-Al 合金和分形几何等方面的研究工作, 发表论文多篇。



赵咏秋, 1982年毕业于武汉汽车工业大学金属材料专业, 大冶特殊钢股份有限公司技术中心高级工程师, 国际体视学会会员。主要从事体视学和材料科学研究, 在国内外刊物上发表论文10余篇, 译著一部。



刘雅晶, 1993年和1996年在东北大学分别获金属物理学士学位和材料科学与工程硕士学位, 现在北京科技大学攻读博士学位, 从事高温合金和分形几何等方面的研究工作, 发表论文多篇。



李启楷, 1983年毕业于中山大学物理系, 大冶特殊钢股份有限公司技术中心高级工程师, 现在北京科技大学攻读硕士学位, 主要从事材料物理和分形几何等方面的研究工作, 已发表论文多篇。

Computer Modeling on Both Random Koch Curve Islands and Determination for Their Fractal Dimension

Li Yuqing¹, Li Peng², Zhao Yongqiu¹, Liu Yajing³, Li Qikai¹

(1. Technology Center, Daye Special Steel Corp Ltd, Huangshi 435001)

(2. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

(3. Beijing University of Science and Technology, Beijing. 100083)

Abstract The tree and forest structure of "Λ" growing bases obtained had made the foundation of computer modeling on random Koch curve island. Three kinds of random Koch curve islands were defined. It was analysed that stable fractal dimension of the second and the third kinds of the above islands could be obtained only from the perimeter-area relation. The compute programe modeling the above islands and their fractal dimension was provided. From compute results, it was cleared that how the islands was selected and the number of island pairs needed in determining of fractal dimension and statistical dimension. The results also showed that both the relationship between fractal dimension (or statistical dimension) and nested tier, and the relationship between distributions of regression straight lines of $\lg P - \lg A$ from three kinds of the islands and nested tier.

Keywords Tree structure, Random Koch curve -island, Fractal dimension, Statistical dimension, Computer modeling