

对不同分辨率图象进行空间分辨率改善的频域方法

郝鹏威 朱重光

(中国科学院遥感应用研究所, 北京 100101)

摘要 图象空间分辨率的改善在遥感图象和计算机视觉的一些应用中非常必要。已有的一些空间分辨率改善的频域方法是针对多幅相同空间分辨率图象的频谱解混叠方法。本文从分辨率低的欠采样图象会导致相应空间频率域频谱混叠的理论出发, 给出了多次欠采样图象在频率域混叠的更一般的公式, 并给出一种针对不同分辨率图象解频谱混叠的逐行迭代方法。最后通过计算机仿真实验对本文所述理论进行了验证。实验表明, 该迭代解法在有噪声情形下也具有很好的收敛性。

关键词 频谱混叠, 图象重构, 图象空间分辨率, 分辨率改善

1 引言

在遥感图象和计算机视觉的一些应用中, 需要从已有的一些低分辨率图象来获得更高分辨率的图象, 这对于已有数据的挖潜和设备分辨率需求的降低有着非常重要的意义。

用多幅欠采样图象来提高图象的空间分辨率的设想最初由 R. Y. Tsai 和 T. S. Huang 提出^[1]。他们希望通过提高图象的空间分辨率能从一系列同一地区不同时相的低分辨率遥感影像来获得能提供更加详细信息的高分辨率图象。他们采用的模型为图象无噪声、无退化和大小完全相同(空间分辨率相同)的图象采样模型, 并用频谱混叠公式给出了一个解混叠的方法。在此基础上, S. P. Kim 等人又研究了混入噪声和图象有模糊退化情形下的模型, 并给出了加权迭代法和正则化迭代法 2 种解混叠的方法^[2, 3]。但是他们采用的都是图象大小或图象空间分辨率完全相同(或假设如此)的图象, 而对从大小不同或分辨率不同的图象来重构更高分辨率图象的问题未加涉及。

本文考虑了从不同分辨率图象来提高图象的空间分辨率的情形。从欠采样的低分辨率图象会引起相应空间频率域的频谱混叠的理论出发, 给出了多

次欠采样图象空间频率域混叠的一般公式, 并针对不同分辨率图象解频谱混叠问题给出一种逐行迭代解法。实验表明, 该迭代解法在有噪声情形下也具有很好的收敛性。

2 信号欠采样引起的频谱混叠

对于频谱为 $F(\omega)$ 的一维信号 $f(t)$, 如果它时间有限(在 $t=0 \sim l$ 外为 0)和频率带宽有限(低频带外 $|\omega| \geq B$ 有 $F(\omega)=0$), 就可以选择整数 N 使之满足 $\frac{2\pi}{l/N} \geq 2B$, 则以间隔 $T=l/N$ 对 $f(t)$ 进行的采样将不会使相应频谱发生混叠, 原连续信号 $f(t)$ 也便可以根据这些样本重建出来。 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 同时也存在离散 Fourier 变换(DFT):

$$\begin{cases} \tilde{F}(k \frac{2\pi}{NT}) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-jk \frac{2\pi}{N}n} \\ f(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}(k \frac{2\pi}{NT})e^{-jk \frac{2\pi}{N}n} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\tilde{F}(\ast)$ 是 $F(\ast)$ 以 $2\pi/T$ 为周期的周期延拓:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} \delta(t - nT) dt = \end{aligned}$$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\frac{2\pi}{T}) \quad (2)$$

对于 $0 \leq k < N$ 内 $\tilde{F}(\cdot)$ 的离散频谱点有:

$$\tilde{F}(k\frac{2\pi}{l}) = \tilde{F}(k\frac{2\pi}{NT}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k\frac{2\pi}{T}n + \frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F((k + nN)\frac{2\pi}{l}) = \begin{cases} \frac{1}{T} F(k\frac{2\pi}{NT}) & (0 \leq k < [\frac{N+1}{2}]) \\ \frac{1}{T} F((k - N)\frac{2\pi}{NT}) & ([\frac{N+1}{2}] \leq k < N) \end{cases} \quad (3)$$

其中, $[\cdot]$ 表示取整。 N 可取 $\frac{2B}{2\pi/l}$ 的下限, 即不小于 $\frac{Bl}{\pi}$ 的最小整数。此时, $F(\omega)$ 在 $|\omega| \leq 2\pi/T$ 外为 0,

$F(k\frac{2\pi}{NT})$ 在 $-\lceil \frac{N}{2} \rceil \leq k < \lceil \frac{N+1}{2} \rceil$ 外为 0。

现以 $T_1 = l/N_1 (N_1 < N)$ 间隔对 $f(t)$ 进行采样, 则这一采样必为欠采样, 对应频谱就会发生混叠现象, 而发生混叠之 DFT 谱 $\tilde{F}_1(\cdot)$ 与未混叠之 DFT 谱 $\tilde{F}(\cdot)$ 之间有如下关系:

$$\tilde{F}_1(k\frac{2\pi}{N_1T_1}) = \sum_{n=0}^{N_1-1} f(nT_1)e^{-jk\frac{2\pi}{N_1}nT_1} = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k\frac{2\pi}{l} + n\frac{2\pi}{T_1}) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F((k + nN_1)\frac{2\pi}{l}) = \frac{N_1}{N} \left\{ \sum_{0 \leq k+nN_1 < [\frac{N+1}{2}]} \tilde{F}((k + nN_1)\frac{2\pi}{l}) + \sum_{-\lceil \frac{N}{2} \rceil \leq k+nN_1 < 0} \tilde{F}((k + N + nN_1)\frac{2\pi}{l}) \right\} \quad (4)$$

其中, k 从 0 到 $N_1 - 1$ 取值。

对于频谱为 $F(u, v)$ 的二维信号 $f(x, y)$, 若它在时(空)域内有限 ($0 \leq x \leq l_x$ 和 $0 \leq y \leq l_y$, 外 $f(x, y) = 0$) 和频域有限 ($|u| \geq B_u$ 和 $|v| \geq B_v$ 时有 $F(u, v) = 0$), 就可选择整数 N_x, N_y 使之满足 $\frac{2\pi}{l_x/N_x} \geq 2B_x$ 和 $\frac{2\pi}{l_y/N_y} \geq 2B_y$, 则以间隔 $T_x = l_x/N_x$ 和 $T_y = l_y/N_y$ 对 $f(x, y)$ 进行的采样将不会使相应二维频谱发生混叠, 原连续二维信号便可以通过其 $N_x \times N_y$

个样本来重构。与一维情形类似, 对 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 有:

$$\begin{cases} \tilde{F}(k_x\frac{2\pi}{l_x}, k_y\frac{2\pi}{l_y}) = \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} f(n_xT_x, n_yT_y) \cdot e^{-j2\pi(\frac{k_x n_x}{N_x} + \frac{k_y n_y}{N_y})} \\ f(n_xT_x, n_yT_y) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} \tilde{F}(k_x\frac{2\pi}{l_x}, k_y\frac{2\pi}{l_y}) \cdot e^{j2\pi(\frac{k_x n_x}{N_x} + \frac{k_y n_y}{N_y})} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\tilde{F}(\cdot, \cdot)$ 为 $F(\cdot, \cdot)$ 之二维时(空)间的周期延拓。

现对 $f(x, y)$ 以 $T_{x1} = l_x/N_{x1}$ 和 $T_{y1} = l_y/N_{y1}$ ($N_{x1} < N_x$ 或 $N_{y1} < N_y$) 进行采样, 则这一采样必为欠采样, 同样会使其二维频谱发生混叠。与一维式(4)类似, 也可建立混叠之 DFT 谱与未混叠之 DFT 谱之间的联系:

$$\tilde{F}_1(k_u\frac{2\pi}{l_x}, k_v\frac{2\pi}{l_y}) = \frac{N_{x1}N_{y1}}{N_xN_y} \sum_{n_x n_y} \tilde{F}(k_u + n_x N_{x1}, k_v + n_y N_{y1}) \quad (6)$$

其中, k_u 从 0 到 $N_{x1} - 1$ 取值, k_v 从 0 到 $N_{y1} - 1$ 取值, 以及

$$\begin{aligned} \sum_{n_x n_y} \tilde{F}(\hat{n}_x, \hat{n}_y) = & \sum_{0 \leq \hat{n}_x < [\frac{N_x+1}{2}] \\ 0 \leq \hat{n}_y < [\frac{N_y+1}{2}]} \tilde{F}(\hat{n}_x\frac{2\pi}{l_x}, \hat{n}_y\frac{2\pi}{l_y}) + \\ & \sum_{-\lceil \frac{N_x}{2} \rceil \leq \hat{n}_x < 0 \\ -\lceil \frac{N_y}{2} \rceil \leq \hat{n}_y < 0} \tilde{F}\{(\hat{n}_x + N_x)\frac{2\pi}{l_x}, (\hat{n}_y + N_y)\frac{2\pi}{l_y}\} + \\ & \sum_{-\lceil \frac{N_x}{2} \rceil \leq \hat{n}_x < 0 \\ 0 \leq \hat{n}_y < [\frac{N_y+1}{2}]} \tilde{F}\{(\hat{n}_x + N_x)\frac{2\pi}{l_x}, \hat{n}_y\frac{2\pi}{l_y}\} + \\ & \sum_{0 \leq \hat{n}_x < [\frac{N_x+1}{2}] \\ -\lceil \frac{N_y}{2} \rceil \leq \hat{n}_y < 0} \tilde{F}(\hat{n}_x\frac{2\pi}{l_x}, (\hat{n}_y + N_y)\frac{2\pi}{l_y}) \end{aligned} \quad (7)$$

式(6), (7)形成了一个二维信号的频谱混叠公式。

当然, 对于发生了混叠的频谱, 由于频谱的混叠过程相当于是一个降秩变换, 因此, 这一过程也是不可逆的, 单单从一个这样的变换去求逆解混叠是不可能的。要进行频谱解混叠, 还必须要有信号多通道或多次欠采样值, 才可以从同一个原始信号的多个相异

的降秩变换来实现求逆。

3 频谱混叠的逐行迭代解法

有了同一个原始信号(一维或多维的)的多通道采样值或多次采样值,只要这些采样值之间有着互不包含的信息,就有可能实现变换求逆从而实现频谱的解混叠。

假设原始一维或多维信号离散频谱的向量表达式为 f , 在 M 次欠采样中的第 i 次欠采样的离散频谱的向量表达式为 \hat{f}_i , 则其频谱混叠的降秩变换可表达为: $\hat{f}_i = T_i f$ 。对于一维信号, 此式表现为式(4), 对于二维信号, 此式表现为式(6)、(7)。从这些公式可以看出, 变换是一些线性变换, 并可表达为线性方程组: $\hat{f}_i = A_i f$ 。其中, A_i 为把混叠成 \hat{f}_i 的矩阵, 具体将由式(9)给出。从而有多次欠采样对应在频率域发生混叠的一般公式:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \dots \\ \hat{f}_i \\ \dots \\ \hat{f}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_M \end{bmatrix} \cdot f \quad (8)$$

从式(4)、(6)、(7)还可以看出, \hat{f}_i 的每个值只与 f 中的一些值相对应, 而这些值又只与 \hat{f}_i 中的一个值相对应。如果对这种严格的多对一的变换求解, 只有在获得多组采样值后才有可能。

对于文献[1~3]所使用的采样间隔(分辨率)完全相同的变换模型, 相当于是把式(8)分裂为若干互不相关的小方程组, 从而求解。由式(8)可见, 此类问题的求解可以不必苛求时延的互不相等。

如果所获得的多组采样值的采样间隔(分辨率)不相同, 式(8)就不可能分裂为若干互不相关的小方程组。对于这种情况下的整个问题的求解可采用 Kaczmarz 逐行迭代法^[4]进行。Kaczmarz 方法是用 $X^{p+1} = X^{(p)} + a_{i_p} \cdot (b_{i_p} - a_{i_p}^T \cdot X^{(p)}) / (a_{i_p}^T \cdot a_{i_p})$ ($i_p = p \bmod N$) 形式进行方程组 $a_i^T \cdot X = b_i$ ($i = 1 \sim N$) 的迭代求解。本文给出一种类似于 Kaczmarz 方法的逐行迭代法, 使之能求矛盾方程组的最小二乘解, 从而使算法的抗噪声能力增强。

式(8)中第 i 次欠采样 \hat{f}_i 对应的式(4)或式(6)(7)可简单表示为:

$$\hat{f}_{i,k} = c_i \cdot a_{i,k}^T \cdot f_{i,k}$$

其中, $\hat{f}_{i,k}$ 表示第 i 次欠采样 \hat{f}_i 的第 k 个离散频谱值; $f_{i,k}$ 表示理想无混叠的离散频谱 f 中对 $\hat{f}_{i,k}$ 有

贡献的频谱值的集合 $F_{i,k}$ 组成的向量; $c_i = N_i / N$ (一维) 或 $c_i = N_{xi} N_{yi} / N_x N_y$ (二维); $a_{i,k}$ 表示 $f_{i,k}$ 对 $\hat{f}_{i,k}$ 贡献的权值向量。对于理想采样情形, $a_{i,k}$ 是一个全为1的向量, 并且有 $\bigcap_k F_{i,k} = \emptyset$ 及 $\bigcup_k F_{i,k} = E(f$ 的所有频谱值的全集集合)。用 $s_{i,k}$ 表示集合 $f_{i,k}$ 中元素的个数, 则有 $s_{i,k} = a_{i,k}^T \cdot a_{i,k}$ 和 $\sum_k s_{i,k} = N$ (一维) 或 $\sum_k s_{i,k} = N_x N_y$ (二维)。 $df_{i,k}$ 用表示 $f_{i,k}$ 的变化量, 用 df 表示 f 的变化量, 则用逐行迭代法求解的具体算法如下:

- (1) 给定 f 的初始值 $f^{(0)}$, 迭代次数 $p=0$;
- (2) $df=0$;
- (3) 对 i 从 1 到 M 循环执行第 4~5 步;
- (4) 对 k 从 1 到 N_i (对二维信号 k 从 1 到 $N_{xi} N_{yi}$) 循环执行第 5 步;
- (5) $df_{i,k} = df_{i,k} + a_{i,k} \cdot (\hat{f}_{i,k} / c_i - a_{i,k}^T \cdot f_{i,k}^{(p)}) / s_{i,k}$;
- (6) $f^{p+1} = f^{(p)} + df / M$;
- (7) $p = p + 1$;
- (8) 对 $f^{(p)}$ 进行高频成份抑制性滤波;
- (9) 如 $f^{(p)}$ 满足误差精度要求则结束迭代, 否则, 转到第 2 步。

本算法对于任意的初始值 $f^{(0)}$ 都收敛。但为使算法稳定、收敛速度快, f 的初始值 $f^{(0)}$ 可按文献[2]的方法给定, 并且在上述算法中增加了用以抑制高频成份的第 8 步。

考虑到采样过程中可能混入的噪声, 在实际操作中 $s_{i,k}$ 可除以一个与信号信噪比成比例的权值 w_i 。这相当于是计算线性方程组的加权最小二乘解。

如果原始图象有模糊性退化, 依然可采用本文所述算法, 只是 $a_{i,k}$ 和 $s_{i,k}$ 在计算中有所不同。

4 实验与讨论

为验证本文所述方法的正确性及其优劣, 本文采用了放射状的分辨率测试图(图1)和一个有2行大小不等的文字的飞机垂尾图象(图2)进行仿真实验。原始图象的大小都是 128×128 。由图1中所加的等分辨率线可以看出, 原始图象的空间分辨率大于 $1/2$ 线而接近 $1/4$ 线。图2中飞机垂尾上的2行文字清晰可辨。

图3和图4各16幅图象分别是对图1和图2进行双三次样条插值后重采样的结果, 其大小分别由 33×33 到 48×48 。由图3中所加的等分辨率线可

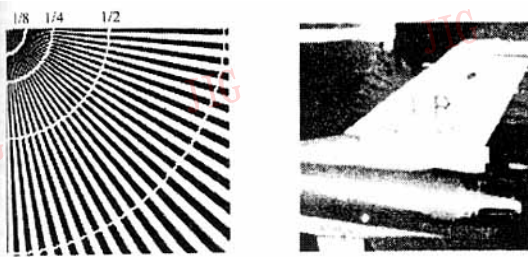


图 1 原始分辨率测试图象 图 2 原始飞机垂尾图象

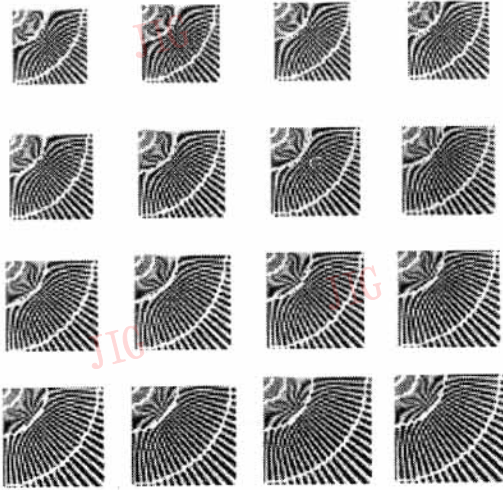


图 3 图 1 的 16 幅不同分辨率的重采样图象

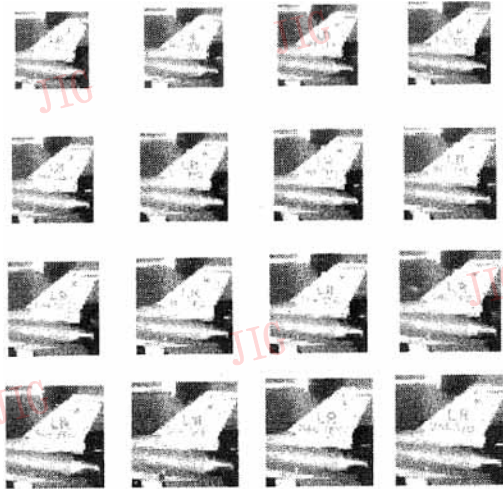


图 4 图 2 的 16 幅不同分辨率的重采样图象

可以看出,所有图案在 1 线以下均已发生变形,这表明图象的空间分辨率在重采样后已明显下降。在图 4 中,图象空间分辨率在重采样后的下降表现为文字(尤其是下面一行小字)残缺不全、难以辨认。

用本文所述算法对图 3 和图 4 分别进行图象空

间分辨率改善的计算,结果分别为图 5 和图 6。由图 5 可以看出,在 1/2 线与 1 线之间的图案已完全恢复,1/2 线以下的图案部分得到了恢复。在图 6 中,图象虽然有些模糊,但所有 2 行文字已完全可以辨认。图 5 和图 6 比起图 1 和图 2 来有所退化的原因在于本文所述算法中使用了抑制高频成份的滤波器。本文所采用的滤波器是 Hamming 窗。

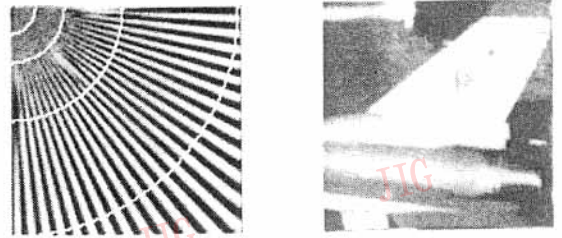


图 5 对图 3 的 16 幅图象分辨率的改善结果 图 6 对图 4 的 16 幅图象分辨率的改善结果

给图 3 和图 4 中的每一幅欠采样图象加入信噪比(SNR)为 0 ~ 20dB 的 Gauss 白噪声,然后再对它们进行图象空间分辨率改善的计算,其结果很令人满意。用本文所述算法对于不加噪声和分别加入信噪比为 0dB, 5dB, 10dB, 15dB 和 20dB 的 Gauss 白噪声的图象进行计算,并用如下误差参数来考察算法的收敛性:

$$\epsilon_{Error} = \frac{\|f^{(p)} - f_{original}\|_F}{\|f_{original}\|_F} \quad (10)$$

其中, $f^{(p)}$ 表示第 p 次迭代结果图象, $f_{original}$ 表示原始图象, $\| * \|_F$ 表示 Frobenius 范数。计算结果表明,对图 3 和图 4 计算的收敛情况非常相似。图 7 为对图 4 进行计算的收敛情况,图中信噪比大于

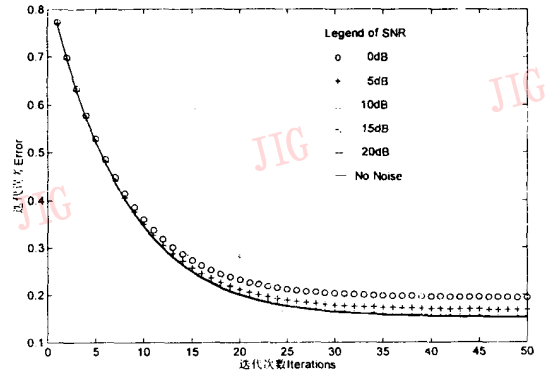


图 7 本文算法的迭代误差与迭代次数和图象信噪比的关系

10dB 的曲线都非常接近,与不加噪声情形基本一致。由此也证实了本文所述算法具有很强的抗噪声能力,说明该算法正确、有效、收敛速度快。

参考文献

- 1 Tsai R Y, Huang T S. Multiframe Image Restoration and Registration. *Advances in Computer Vision and Image Processing*, JAI Press Inc. , 1984.
- 2 Kim S P, Bose N K, Valenzuela H M. Recursive Reconstruction of High Resolution Image from Noisy Undersampled Multiframe. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1990,38(6):1013~1027.
- 3 Kim S P, Su Wenyu . Recursive High-Resolution Reconstruction of Blurred Multiframe Images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1993,2(4):534~539.
- 4 Hackbusch W. *Iterative Solution of Large Sparse System of Equations*. Springer-Verlag, 1994.



郝鹏威 1988年毕业于西北工业大学计算机系,获学士学位,1994年毕业于西北工业大学CAD/CAM中心,获硕士学位。现为中国科学院遥感应用研究所博士生。主要从事计算机图形学、科学可视化、数字图象处理等方面的研究。



朱重光 1963年毕业于武汉测绘科技大学,现为中国科学院遥感应用研究所研究员,博士生和博士后导师,国家遥感应用工程技术研究中心图象工程部总工程师。主要研究领域为遥感图象处理分析局部自适应理论,图象反演病态理论,图象处理系统集成等,近年来在国内外期刊和会议上发表论文40余篇。

A Frequency Method for Image Resolution Improvement from Multiframe of Different Resolutions

Hao Pengwei, Zhu Chongguang

(*Institute of Remote Sensing Applications, CAS, Beijing 100101*)

Abstract In the applications such as remote sensing and computer vision, to reconstruct a high-resolution image from multiframe of low-resolution images is required. Former work was based on the same resolution frames. This paper is based on the theorem of spectral aliasing resulting from undersampled low-resolution image, and a general formula of the spectral aliasing is proposed for the problem of different resolutions. A row-action method even for noisy and blurred frames are given in the DFT domain as well. Computer simulations demonstrate the performance of the algorithm.

Keywords Spectral aliasing, Signal reconstruction, Image spatial resolution, Resolution improvement.