

# 中华博士 园地

这是本刊特为海内外正在就读和学成立业的博士、博士后青年学者们开辟的一片科普园地。深学浅著,是一门德识、慧学、素质修养的学问。你们的新知识、新调研、新观察、新目光、新展望,能够用尽可能深入浅出、通俗流畅的语言,汇报给祖国、人民、家乡父老子弟乡亲们吗?中华博士园地,乃耕耘忠孝之地、科教兴国、民族昌盛之地。要用慈母听得懂的语言,写出你们的心声!



## 关于小波我们应该知道些什么? ——小波基本问题探讨

田金文

(华中理工大学图象所,图象信息处理与智能控制国家教委开放研究实验室,武汉 430074)

小波理论是近些年兴起的一个崭新的信号分析理论。它的出现吸引了许多领域的学者对之进行深入的研究。小波变换是一种新的可达到时(空)域或频率域局部化的时—频域或空—频域分析方法。它被认为是傅里叶分析发展的新阶段,具有许多其它时(空)—频域分析(如 Gabor 变换, Vignier-Wille 分布)所不具备的优良特性。如正交性、方向选择性、可变的时(空)频域分辨率、可调整的局部支持、以及分析数据量小等。这些良好的分析特性使得小波变换成为信号处理的一种强有力的新工具和手段。而且,小波变换的多尺度分解特性更加符合人类的视觉机制,与计算机视觉中由粗到细的认识过程十分相似,更加适于图象信息的处理。目前,小波理论已在许多信号处理领域得到了成功的应用。

我们特别指出,尽管小波是一个比较新的研究领域,但是已经有了许多可以利用的文献和成果。首先,有 3 个特别关注小波分析的杂志:《Applied Computational Harmonic Analysis》、《Journal of Fourier Analysis》和《Advances in Computational Mathematics》;第二,有几种杂志发表了有关小波分析的特别专辑,如《Constructive Approximation》、《IEEE Transactions on Signal Processing》、《IEEE Transactions on Information Theory》、《International Journal of Optical Computing》、《Journal of Mathematical Imaging and Vision》和《Optical Engineering》。以及 Internet 网上的大量文献信息,小波文摘杂志《Wavelet Digest》(其 Email 地址为: Wavelet Digest <mailer@wavelet.org, 其 WWW 服务器地址为: <http://www.wavelet.org>)。另外还出版了一些特别的小波文集<sup>[1~12]</sup>。

**田金文** 现为华中理工大学图象所博士研究生。目前的研究方向是小波分析、立体视觉、图象处理和分形几何。

虽然小波已经得到了广泛的研究和应用,但仍有一些值得我们探索和研究的问题,在这里,我们将讨论如下的 3 个问题:什么是小波?小波是如何工作的?小波可以在那些领域发挥作用?

## 1 什么是小波?

什么是小波,这是每个学习小波分析的人都迫切需要了解的概念,在小波分析的教科书里、专著里的定义是不能令人完全满意的,我们首先回顾一下通俗的定义。

小波是满足某些要求的函数。术语(非常著名的)“小波”来源于它的积分等于零的要求,即在  $t$  轴的上下“波动”。小波的“小”意味着函数具有良好的局部性,其它的要求是技术上的,并且大部分要求是为了保证正小波变换和逆小波变换可以快速和容易地计算。

在以上的定义,可以看到对小波的一个基本要求是它的积分为零,但是许多著名的小波(许多专家也这样称呼)并不满足积分为零的要求,如 Morlet 小波, Gabor 小波, 以及 Lazy 小波等。

我们再来看一下数学上的小波定义。

**定义 1** 设  $\psi \in L^2 \cap L^1$  且  $\hat{\psi}(0) = 0$ , 则按如下方式生成的函数族  $\{\psi_{a,b}\}$

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), b \in R, a \in R/\{0\}$$

叫分析小波或连续小波,  $\psi$  叫基本小波或母小波。

为什么要求  $\psi \in L^2 \cap L^1$  且  $\hat{\psi}(0) = 0$ ,  $\psi \in L^2$  意味着小波函数的能量是有限的,而  $\psi \in L^1$  的要求则纯粹是为了小波函数可进行 Fourier 变换,为什么小波函数非要进行 Fourier 变换,其原因恐怕与传统的小波构造一定要借助于 Fourier 变换有关,我们在后面将会看到,小波变换可以不通过 Fourier 变换来构造,因此条件  $\psi \in L^1$  也非本质。我们再来看条件  $\hat{\psi}(0) = 0$ , 这个条件在小波的定义中是最令人费解的,为什么一定要求  $\hat{\psi}(0) = 0$  呢? 注意到  $\hat{\psi}(\omega)$  是小波函数  $\psi$  的 Fourier 变换,因此

$$\hat{\psi}(0) = \int_R \psi(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = \int_R \psi(t) dt$$

这样,条件  $\hat{\psi}(0) = 0$  等价于  $\int_R \psi(t) dt = 0$ 。而

$\int_R \psi(t) dt = 0$  就意味着小波函数  $\psi$  具有“波动”性,也

就是说小波函数可以在  $t$  轴上下波动,但是并不意味着这个波是一个“很小”的波;另一方面,由于小波函数的积分(我们认为是 Lebesgue 积分)存在,那么小波函数在趋于无穷时,一定是几乎处处趋于零的,因此小波函数一定具有速降性或紧支性,因此也可以说小波是“小”的,这种“小”意味着小波的局部

性,而非小波真的很小。

当然,我们也可以举出若干个不满足上述定义的小波的例子,如前面的 3 个例子。那么究竟什么是小波呢? 我们先来看一下 Sweldens<sup>[13]</sup> 的描述:

(1) 小波是一般函数的建筑块 (Wavelets are building blocks for general functions);

(2) 小波具有时-频局部化特性 (Wavelet have space-frequency localization);

(3) 小波具有快速变换算法 (Wavelet have fast transform algorithms)。

小波函数是一般函数的建筑块,意味着小波函数的平移和伸缩可以构成某个空间的框架,也即一般的函数(信号)可以用小波进行展开(表示),但这并不意味着小波函数一定是空间的基底,如果构成基底的话,也没有要求小波基底一定是正交的,半正交的或着是双正交的,因此我们已知的小波都满足这个基本的要求。

小波具有时-频局部化特性,意味着小波函数一定要具有某种紧性或消失矩特性(我们后面再定义什么是消失矩),小波的时-频局部化并不意味着小波函数的积分为零! 可以证明我们常用的小波函数也都具有时-频局部化的特性。

最后,我们再来看小波具有快速算法,这对基于计算机的数字信号(图象)处理来说是重要的,幸运的是,我们目前已有的小波变换也都具有快速算法,包括 Mallat 塔式算法、不分样最大重叠算法、atrous 算法、基于 FFT 的快速算法、以及基于提升模型的小波快速算法等。

那么,我们自然要问:前面的通俗定义和数学定义是小波的定义吗? 我们的回答是:它们都是小波的定义,但它们仅描述了小波的某个侧面。是否可以给小波一个严格的定义呢? 鉴于小波分析是一个飞速发展的学科,我们认为目前严格定义什么是小波还为时尚早,因此,我们还是像分形集合中关于分形维数的定义一样,给出一个模糊一点的定义(实际上是描述)。Sweldens 对小波的描述具有高度的概括性和一般性,但我们认为小波变换的另一个特性在 Sweldens 的描述中没有涉及到,那就是小波的适应构造问题,对 Sweldens 的描述稍加改进,我们给出如下的小波定义:

小波是具有下述性质的函数或滤波器:

(1) 小波是一般函数的建筑块;

(2) 小波具有时-频局部化特性;

(3) 小波具有快速变换算法。

(4) 在某些应用中小波具有一个适应的构造方法。

上面的描述中,我们模糊了小波函数与小波滤波器之间的区别。事实上,许多小波函数的解析表达是困难的,而其滤波器是容易得到的,从数字信号(图象)处理的角度看,滤波器比小波函数本身更重要,但是所有小波分析的基础是建立在函数论的基础之上的,因此小波的这两种表达(小波函数表达和滤波器表达)都是重要的,而且我们也特别要强调指出,在某些应用中,二者是有区别的,特别涉及到理论分析的时候。

存在着许多种小波,我们可以选择光滑小波、紧支集小波、具有简单表达式的小波、以及对应着简单滤波器组的小波等等。最简单的是 Haar 小波,在下节中我们作为一个例子讨论它。

像 Fourier 分析中的正弦和余弦函数一样,小波可以作为一个基底来表示其它的函数。一旦小波(有时称为母小波) $\psi$  被确定,我们可以构造母小波的平移、伸缩基 $\{\psi(\frac{t-b}{a}), (a,b) \in R^+ \times R\}$ 。在定义小波基中取  $a$  和  $b$  的某些特殊值具有特别的意义,例如取  $a=2^{-j}, b=k2^{-j}$ , 其中  $k$  和  $j$  是整数,  $a$  和  $b$  的这样选择将给出一个稀疏基。另外,这样选择自然地给出了信号处理中的多尺度分析与小波世界的联系。

初学小波的人们常常会问:为什么不使用传统的 Fourier 分析方法呢? 小波分析与 Fourier 分析存在着几个重要的差异,首先, Fourier 基函数在频率域内是局部化的,但在时间域内不是; Fourier 变换中小的频率变化将引起时间域内每一点的变化,小波在频率/尺度(通过伸缩)和时间域(通过平移)都是局部化的。在许多情况下,这种局部化是非常重要的。第二,许多函数类可以用小波以更完备的方式表示。例如,表示带有不连续性和具有尖峰测试函数,为了得到可比较的逼近精度,一般情况下利用更少的小波基函数比正弦一余弦基函数。小波分析的另一个特点是适应小波基的构造,即根据问题的不同可以构造满足特定要求的小波函数。

这种稀疏码使得小波在数据压缩中是一个杰出的工具。例如, FBI 已经将小波作为数字化指纹图象的压缩标准,其压缩比达到了 20:1,而且原始图象与解码后的图象之间的差异,只有专家才能看得出来。小波可以应用到许多方面,它们中的某些是非常令人激动的。

所有这些已经暗示着统计学家们可以从小波中获益。我们可以很容易、很快实现对大的数据和含有噪声的数据进行离散小波变换(与离散 Fourier 变换相类似),并利用小波变换对数据进行编码。如果说 Fourier 变换有快速算法的话,那么小波变换则有更快的快速算法。众所周知, FFT 的计算复杂性为  $O(n \log_2 n)$ , 而小波变换的计算复杂性下降到  $O(n)$ 。

## 2 小波是如何工作的?

### 2.1 Harr 小波

为了解释小波是如何工作的,我们首先介绍一个例子。我们选择一个所有小波中最简单、最古老(我们可以毫不夸张地说,所有小波之母), Harr 小波函数  $\psi(x)$ , 它是一个在  $[0, \frac{1}{2}]$  上取值为 1, 而在  $[\frac{1}{2}, 1]$  上取值为 -1 的阶梯函数, 图 1 给出了 Haar 小波的图形。

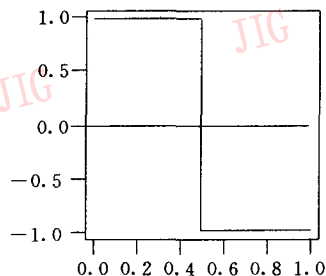


图1 Harr小波

早在 80 年前,人们已经知道了 Haar 小波,并将其应用于各种数学领域。众所周知,任何连续函数可以由 Haar 函数系一致逼近(布朗运动甚至可以用 Haar 小波来定义)。函数的伸缩和平移

$$\psi_{jk}(x) = C \cdot \psi(2^j x - k)$$

定义了  $L^2(R)$  中的一个正交基, ( $L^2(R)$  为所有平方可积函数的全体), 这意味着  $L^2(R)$  中的任何元素可以利用这些基函数的线性组合来表示(可能无穷多)。

$\{\psi_{jk}(x)\}$  的正交性是容易验证的, 很明显, 当  $j=j'$  和  $k=k'$  不同时成立时, 有

$$\int \psi_{jk}(x) \psi_{j'k'}(x) dx = 0 \quad (1)$$

如果  $j \neq j'$  (比如说  $j' < j$ ), 那么, 小波函数  $\psi_{j'k'}$  的非零值包含在小波  $\psi_{jk}$  为常数的区域中, 这使得积分式 (1) 等于零;

如果  $j=j'$ , 但  $k \neq k'$ , 那么在乘积  $\psi_{jk}\psi_{j'k'}$  中至少存在一个因子为零, 于是函数  $\psi_{jk}$  是正交的。

使得这个正交基规范化的常数是  $2^{j/2}$ 。从

$$1 = C^2 \int \psi^2(2^j x - k) dx = C^2 2^{-j} \int \psi^2(x) dx = C^2 2^{-j}$$

在图2中, 画出了函数的图形  $\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}$  的图形。集合  $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  定义了  $L^2$  的一个标准正交基。相应地, 我们将考虑形如  $\{\phi_{jk}, \psi_{jk}, j < j_0, k \in \mathbb{Z}\}$  的标准正交基, 其中  $\phi_{00}$  被称为相应小波基  $\psi_{jk}$  的尺度函数。后面我们将进一步给出尺度的更正规的定义。对 Haar 小波来说, 尺度函数是非常简单的, 它是区间上的特征函数, 即  $\phi(x) = 1 (0 \leq x \leq 1)$ 。

统计学家们可能对由数据集生成的函数的小波表示感兴趣, 设  $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1})$  是一个大小为  $2^n$  的数据向量, 由  $Y$  可按如下的方式生成一个  $[0, 1]$  区间上的逐段为常数的函数,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k \cdot 1_{(k2^{-n} \leq x < (k+1)2^{-n}}$$

其中  $1_{(k2^{-n} \leq x < (k+1)2^{-n}}$  表示在区间  $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$  上为 1, 而其它地方为 0。显然, 函数(数据)  $f(x)$  属于  $L^2[0, 1]$ , 因此  $f(x)$  有如下形式的小波分解,

$$f(x) = c_{00}\phi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}\psi_{jk}(x) \quad (2)$$

由于  $f(x)$  是阶梯函数, 求和相对于  $j$  是有限的, 并且每一个可以由最多  $(n-1)$  个尺度水平来精确描述。对每一个水平, 由于  $f(x)$  的值域是有限的, 因此相对于  $k$  的求和也是有限的, 特别地, 不需要尺度函数  $\phi_{00}$  的平移。

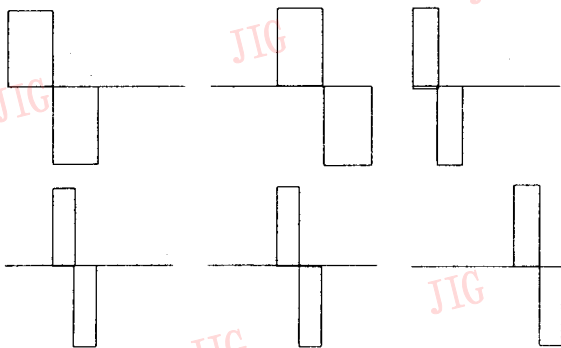


图2 Harr 小波的平移和伸缩

我们固定数据向量  $Y$ , 并找到形如式(2)的小波分解。设  $Y = (1, 0, -3, 2, 1, 0, 1, 2)$ , 图3给出了对

应的阶梯函数<sup>[14]</sup>, 下面的矩阵方程组给出了  $Y$  与小波系数之间的联系。注意常数  $2^j (1, \sqrt{2} \text{ 和 } 2)$  相对于 Haar 小波来说分别对应着不同尺度水平 ( $j=0, 1 \text{ 和 } 2$ )。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} \\ d_{00} \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{20} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{bmatrix}$$

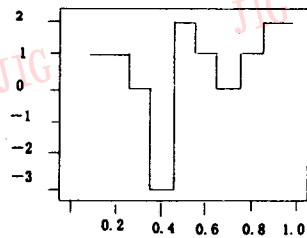


图3 在  $[0, 1]$  区间上的“数据”

其解为

$$\{c_{00}, d_{00}, d_{10}, d_{11}, d_{20}, d_{21}, d_{22}, d_{23}\} = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right]$$

于是

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\psi_{00}(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\psi_{11}(x) + \frac{1}{4}\psi_{20}(x) - \frac{5}{4}\psi_{21}(x) + \frac{1}{4}\psi_{22}(x) - \frac{1}{4}\psi_{23}(x) \quad (3)$$

解的正确性很容易验证。例如, 当  $x \in [0, \frac{1}{8})$  时,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1$$

我们可能已经有了如下的疑问, “当向量  $Y$  的长度变得更大的时候, 我们将如何做呢?” 很明显, 不可能再利用解矩阵方程的方法了。

### 2.2 Mallat 多尺度分析, 滤波器组, 正小波变换和逆小波变换

Haar 小波的缺点是缺乏连续性, 因此为了表示

光滑函数, Haar 基的选择既不自然也不经济。

### 2.2.1 Mallat 多尺度分析(MRA)

作为一个更一般的框架,我们解释 Mallat 多尺度分析(Multiresolution Analysis,简称 MRA)。为了给出不同小波基的构造性描述,MRA 是一个有效的工具。设  $L^2$  是一个平方可积函数的全体,一个 MRA 是一个逼近  $L^2(R)$  的闭子空间的增加序列  $\{V_j\}_{j \in Z}$ 。

从选择一个尺度函数开始,除了 Haar 函数外(它的尺度函数是区间  $[0,1]$  的特征函数),尺度函数被选择为满足某些连续性、光滑性和截尾性的要求。但更重要的是,函数族  $\{\phi(x-k), k \in Z\}$  形成参考空间  $V_0$  的一个标准正交基。下列关系式描述了上面的分析:

$$(1) \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

空间  $\{V_j\}$  是嵌套的,空间  $L^2(R)$  是所有  $V_j$  的并,换句话说,  $\bigcup_{j \in Z} V_j$  在  $L^2(R)$  中稠密,所有  $\{V_j\}$  的交是空集。

$$(2) \dots f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in Z$$

空间  $V_j$  和  $V_{j+1}$  是“相似的”,如果空间  $V_j$  由  $\{\phi_{jk}(x)\}_{k \in Z}$  张成,那么  $V_{j+1}$  由  $\{\phi_{j+1,k}(x) = \sqrt{2} \phi_{jk}(2x)\}$  生成。

我们现在看小波是怎样引出的。由于  $V_0 \subset V_1$ ,  $V_0$  中的任何函数可以写成  $V_1$  中的基函数  $\{\sqrt{2} \phi(2x-k)\}_{k \in Z}$  的线性组合,特别地

$$\phi(x) = \sum_k h_k \sqrt{2} \phi(2x-k) \quad (4)$$

系数  $h_k$  被定义为  $\langle \phi(x), \sqrt{2} \phi(2x-k) \rangle$ 。现考察在  $V_j$  中  $V_{j+1}$  的正交补  $W_j$  (即  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ ), 定义

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^k h_{1-k} \phi(2x-k) \quad (5)$$

可以证明,  $\{\sqrt{2} \phi(2x-k), k \in Z\}$  是  $W_1$  的标准正交基。

同理, MRA 的相似性给出  $\{2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), k \in Z\}$  是  $W_j$  的标准正交基。由于  $\bigcup_{j \in Z} W_j$  在  $L^2(R)$  中稠密,因此  $\{\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), j, k \in Z\}$  是  $L^2(R)$  的基。

对于给定的函数  $f \in L^2(R)$ , 我们可以找  $N$ , 使得  $f_N \in V_N$  并且  $f_N$  逼近  $f$  得到预定的精度(根据  $L^2$  的闭性), 如果  $g_i \in W_i$  和  $f_i \in V_i$ , 那么

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1} = \sum_{i=1}^M g_{N-M} + f_{N+M} \quad (6)$$

等式(6)是  $f$  的小波分解。例如,数据函数(3)在  $V_n$

中,如果我们应用对应于 Haar 小波的 MRA, 并注意到  $f = f_n$  和  $f_0 = C$ 。

### 2.2.2 信号处理语言

用信号处理理论的语言,我们重复多尺度分析的描述。Mallat 多尺度分析联系着信号处理中的所谓“金字塔”算法, Mallat 的多尺度分析也隐含着“正交镜像滤波器”。

从前节中的式(4)和(5),

$$\phi(x) = \sum_{k \in Z} h_k \sqrt{2} \phi(2x-k) \quad (7)$$

$$\text{和 } \psi(x) = \sum_{k \in Z} g_k \sqrt{2} \phi(2x-k) \quad (8)$$

在信号处理的术语中,  $l^2$  序列  $\{h_k, k \in Z\}$  和  $\{g_k, k \in Z\}$  是正交镜像滤波器,  $h$  和  $g$  有如下的联系

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}$$

序列  $\{h_k, k \in Z\}$  被称为低通或低带滤波器, 而  $\{g_k, k \in Z\}$  被称为高通或高带滤波器。应用 Fourier 变换和正交性, 可以证明  $\{h_k, k \in Z\}$ 、 $\{g_k, k \in Z\}$  的下列性质:

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}$$
$$\sum_k g_k = 0$$

描述 Mallat 的多尺度分析以及给出确定小波系数的有效程序的最紧密方式是滤波器的算子表示。

对序列  $a = \{a_n\}$ , 算子  $H$  和  $G$  分别由下面的关系式定义:

$$(Ha)_k = \sum_n h_{n-2k} a_n, (Ga)_k = \sum_n g_{n-2k} a_n$$

算子  $H$  和  $G$  对应着一步小波分解。唯一的差别是上面的定义中不包括式(4)、(5)中的因子  $\sqrt{2}$ 。

用  $\tilde{c}^{(n)}$  表示具有长度为  $2^n$  的原始信号, 那么  $\tilde{c}^{(n)}$  可以用函数  $f(x) = \sum_k \tilde{c}_k^i \phi_{nk}$ ,  $f \in V_n$  表示。在小波变换的每一步, 我们移动到一个更粗糙的近似

$$\tilde{c}^{(j-1)}, \tilde{c}^{(j-1)} = H\tilde{c}^{(j)}, \tilde{d}^{(j-1)} = G\tilde{c}^{(j)}$$

这里,  $\tilde{d}^{(j-1)}$  是由平均  $\tilde{c}^{(j-1)}$  近似  $\tilde{c}^{(j)}$  丢掉的“细节”。长度为  $2^n$  的序列  $\tilde{y} = \tilde{c}^{(n)}$  的离散小波变换, 可以表示为另一个长度为  $2^n$  的序列(注意序列  $\tilde{c}^{(j-1)}$  的长度是  $\tilde{c}^{(j)}$  的长度的一半):

$$(\tilde{d}^{(n-1)}, \tilde{d}^{(n-2)}, \dots, \tilde{d}^{(1)}, \tilde{d}^{(0)}, \tilde{c}^{(0)}) \quad (9)$$

因此, 离散小波变换可以综合成一个单直线:

$$\tilde{y} = (Gy, GHy, GH^2y, \dots, GH^{n-1}y, H^n y)$$

根据  $H$  和  $G$ , 重构公式也是非常简单的, 我们

首先定义共轭算子  $H^*$  和  $G^*$  如下:

$$(H^* a)_n = \sum_k h_{n-2k} a_k$$

$$(G^* a)_n = \sum_k g_{n-2k} a_k$$

反复应用上式,得到

$$(Gy, GHy, GH^2, \dots, GH^{n-1}y, H^n y) \rightarrow y =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (H^*)^j G^* \tilde{d}^{(j)} + (H^*)^n \tilde{c}^{(0)}$$

方程式(7)和(8),它们产生的滤波器系数对 Haar 小波来说非常简单:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(2x) + \phi(2x-1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2x-1) \\ \psi(x) &= \phi(2x) - \phi(2x-1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2x-1) \end{aligned} \quad (10)$$

在式(10)中,滤波器系数是

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, g_0 = -g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{y} = c^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{d}^{(2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^{(2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{d}^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{d}^{(0)} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^{(0)} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

图 4 分解过程

图 4 给出了分解算法应用到数据集上。

在式(2)中,为了获得小波系数,我们用因子  $2^{-\frac{N}{2}}$  乘  $d^{(j)}, j=0,1,2$  和  $C^{(0)}$  的分量,简单地

$$d_{jk} = 2^{-\frac{N}{2}} d_k^{(j)}, 0 \leq j < N(=3)$$

在 Haar 小波的情况下,  $2^{-\frac{3}{2}} c_0^{(0)} = c_{00} = \frac{1}{2}$  是样本  $Y$  的平均是非常有趣的。

图 5 中,图示地给出了对我们例子的重构算法。

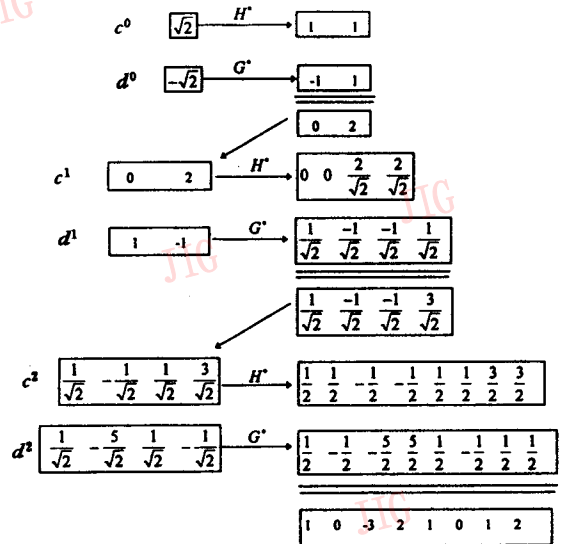


图 5 重构的例子

### 3 小波可以在那些领域发挥作用

除了理论方面的研究外,小波分析的应用领域是非常宽广的,它主要包括以下几个方面:(1)地震信号处理,(2)语音信号处理,(3)量子力学,(4)图象处理,(5)计算机视觉,(6)成像系统,(7)随机过程,(8)分形几何,(9)地理信息系统,(10)模式识别与智能控制系统等。

除此之外,美国联邦调查局的指纹分析,公路管理局的高速公路路面检测,法国政府的石油、天然气以及地震数据处理等关键技术都采用了小波分析技术。

#### 参考文献

- 1 Chui C K, ed. Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, San Diego, 1992.
- 2 Benedetto J, Frazier M, eds. Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, Beta Taton, 1993.
- 3 Koornwinder T H, ed. Wavelets: an elementary treatment of theory and applications, No. 1 in Series in Approximations and Decompositions, World Scientific, Singapore, 1993.
- 4 Lemarie P G, ed. Les Ondelettes en 1989, No. 1438 in Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1990.
- 5 Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications, SIAM, Philadelphia, 1993.

- 6 Schoenberg I J. , Cardinal interpolation and spline function, J. Approx. Theory, 1996(2):167~627.
- 7 Wickerhauser M V. Adapted Wavelet Analysis: from Theory to Software, Washington University, St. Louis, Missouri, 1994.
- 8 Ruskai M B, Beylkin G, Coifman R, et al. Wavelet and their applications.
- 9 Kaiser G. A Friendly Guide to Wavelets, Lowell Massachusetts, 1994.
- 10 Farge M. Hunt J C R, Vassilicos J C, et al. Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms, Clarendon Press-Oxford, 1993
- 11 Benedetto J, Frazier M, eds. , Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, Boca Raton, 1993
- 12 Combes J M, Grossmann A, Tchamitchian P, eds. , Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space, Inverse Problems and Theoretical Imaging. Springer-Verlag, 1989.
- 13 Sweldens W. Wavelets; What Next? Proc. of the IEEE, 1996, 84(4): 680~685.
- 14 Vidakovic B, Muller P. Wavelets for Kids - A Tutorial Introduction. Technical Report, Duke University (ftp://ftp.isds.duke.edu/pub/Users/Brani/papers/wavkidsA.ps.Z).

## VTEL 公司收购德国最大视讯公司

全球数字视讯技术的领导者 VTEL 公司于 5 月 28 日宣布了收购德国 SYSTEMHAUS BISSINGER (SHB) 公司电讯和多媒体分公司的协定。SHB 是欧洲视讯系统的最早生产厂家。新公司将更名为 VTEL GERMANY。

SYSTEMHAUS BISSINGER 是 1992 年以来 VTEL 在德国销售数字视讯产品的主要成员。公司在德国视讯市场有较大份额,并且给宝马(BMW)汽车公司,化学制造商 BASF,德国铁路公司 DEUTSCHE BAHN,和欧洲最大的建筑公司之一 HOCHTIEF 提供 VTEL 的系列产品。

23 名 SYSTEMHAUS BISSINGER 的雇员将继续留任,以协助新 VTEL GERMANY 扩大其在德国、奥地利和瑞士的业务。原 SYSTEMHAUS BISSINGER 电讯及多媒体分公司经理 JOSEF HEINLE 将就任 VTEL GERMANY 的总经理。

SYSTEMHAUS BISSINGER 由 SIEGFRIED BISSINGER 创立,是一家有 28 年历史的公司。它严格遵循下面的成功定式—技术创新,知识进步,服务可靠。公司总部设在 GUNDELFINGEN。此外,公司还在这一地区的其它六个城市设有办事处。

## 《电子设计》中文版与读者见面

最近,美国彭顿(Pondon)出版公司与中询亚太有限公司及原电子部科技情报研究所三方鼎立合作,将在美国电子领域排名第一位的《电子设计》(Electronic Design)杂志以中文版的形式介绍给中国电子行业的广大读者。

《电子设计》中文版(EDC)将以技术、应用、产品、方案为报道宗旨,面向中国电子行业的工程技术人员及国内外电子产品生产商,通过双向交流的方式,介绍国外先进的电子技术产品,为国内外厂商推广行销产品开辟新的渠道。

《电子设计》中文版的内容将涵盖电子、电信、电脑领域的方方面面,具体包括集成电路、电子元件、

电源、数字信号处理、平板显示器、电子测试仪器、电子设计软件、DVD 等用于通信、电脑及消费类电子产品生产制造的技术和产品。

据悉,早在 1994 年《电子设计》杂志即已通过版权授予的形式与国内刊物合作进入了中国市场。3 年多来,其丰富的信息、新颖实用的技术内容受到中国电子行业众多读者,尤其是工程技术人员的青睐和好评。

今天,《电子设计》中文版更以全新的面貌展现在中国读者面前。除保留原有选自美国原版杂志的技术应用文章外,《电子设计》中文版尚采取国内组稿及采编的方式,反映中国电子市场的新动向。