

基于形态学的任意三维物体变形的算法及实现

刘文予 陈都 万菲 朱光喜

(华中理工大学电信系, 武汉 430074)

摘要 提出三维物体变形的形态学方法, 给出了此方法的理论证明, 用一个统一的数学模型来描述变形内插的关系, 较好地解决任意形状物体的变形。实验表明这种方法是一种有效的变形方法, 克服了现有方法的缺点, 实现简单, 并可推广至一般的造型系统中, 为计算机图形学开辟了一种新途径。

关键词 变形, 形态学, 动画

1 引言

三维变形是把一个三维物体平滑过渡到另一个三维物体。通常的三维变形算法是一线性内插^[1]。如果是有相同拓扑结构和等数目的顶点的多面体的物体, 三维变形就是简单的相应顶点之间的内插。对于不同拓扑结构和不同数目的顶点的多面体物体。可以通过把多面体三角化增加顶点数达到同拓扑结构和同数目的顶点^[2]。此方法对有孔多边形处理非常困难并且很难保证三角剖分的均匀性及变形的平滑性。另一种方法是把多面体物体用傅里叶变换到频谱空间进行内插, 再反变换到物体空间^[3]。这些算法都没有实质上解决拓扑关系不一致的物体变形的统一描述及对凹和有孔物体的变形处理。

本文提出了一种全新的基于数学形态学的方法, 通过点的膨胀和面的腐蚀来不断改变物体形状, 达到从物体平滑过渡到另一个物体, 并且可以用一个统一的数学模型来描述变形物体间的关系。传统的形态学方法应用于点集图象中取得了很大成功, 本文把形态学方法引入实体造型中, 为形态学应用开辟了一个新的领域。由于形态学算法的非线性, 可以较好解决任意形状(包括有孔和凹多面体)间物体的变形, 有效地克服其它变形算法的缺点。它具有直观, 控制简单等优点, 并可保证变形的平滑性。此外, 形态学算法也可推广到一般的造型系统中。

2 基本原理

设 E^3 为具有拓扑结构 $\psi(E^3)$ 的拓扑空间, $\psi(E^3)$ 中的子集称为拓扑空间 E^3 的开集。

定义 1: 一个实体是 E^3 中的一个有限的、封闭子集。

定义 2: 如果集合 $X \in E^3$ 的补集 X' 是 E 中的开集, 称 X 为 E^3 的闭集, E^3 的闭集全体记为 $\tau(E^3)$ 。

定义 3: 包含 X 的最小闭集称为 X 的闭包, 记为 \bar{X} , 包含于 X 中的所有开集之并集称为 X 的内部, 记为 $\overset{\circ}{X}$ 。

定义 4: 一个点集 A 的规则性 $r(A)$ 由下式定义

$$r(A) \equiv G(i(A))$$

其中 $G(A)$ 和 $i(A)$ 表示 A 的闭包和内部, 称满足 $r(A) \equiv A$ 的集合是规则的。下面的讨论都是针对规则的实体多面体进行的。

定义 5^[4]: 设 E^3 中的集合 X , 结构元素 B 为 E^3 或其子空间 E^2, E^1 中的一个子集。称集合 X 关于结构元素 B 的形态和、形态差分别定义为如下实体。

$$X \oplus B \{x; B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

$$X \ominus B \{x; B_x \subseteq X\}$$

其中 $B_x = \{x-b; b \in B\}$

形态差可以转化为形态和进行计算, 因此我们只讨论形态和算法。

定理 1: 2 个多面体的形态和的闭包与坐标系选

择无关,与坐标变换无关,只与前后形状有关。

$X \oplus B$ 与 $B \oplus X$ 的多面体闭包形状相同,仅相差一个平移变换。

设 X 的最小边界盒的中心为 (X', Y', Z') , B 的最小边界盒的中心为 (X'', Y'', Z'') 。

把 $X \oplus B$ 的边界盒的中心平移到 $(\frac{x'+x''}{2}, \frac{y'+y''}{2}, \frac{z'+z''}{2})$, 则 $X \oplus B$ 与 $B \oplus X$ 在任何坐标系下,都有 $X \oplus B = B \oplus X$ 。

定理 2: 2 个实体集合 A 和 B 的形态和边界 $E(A \oplus B)$ 是它们各自边界的形态和边界的子集。

$$\text{即 } E(A \oplus B) \subset E((E(A) \oplus (E(B))))$$

证明: $\because A \oplus B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$

设任一点 $x \in E(A \oplus B)$, 即 x 是 $E(A \oplus B)$ 某一边上的点, 则有 $f(x) = 0$, $f(x)$ 为边的直线方程, 不妨设 $f(x') > 0$, 为边的外部, 也即 $x' \notin X, X = A \oplus B$, 则 f 的 2 个顶点 x_1, x_2 一定是 A, B 的某个顶点, 否则

$\because x_1 \in E(A \oplus B), \because x_1 \in A \oplus B, x_1 = a+b | a \in A, b \in B$. 即一定可以找一点 c 属于 a 的闭球, 使 $x'_1 = a+c+b \in A \oplus B$, 即 x'_1 也在边 f 上, 与 x_1 是 f 的顶点矛盾。

$\because x_1, x_2$ 是 A, B 的某个顶点, 故有 x_1, x_2 属于 A, B 的边集,

即 $x_1, x_2 \in E(A) \oplus E(B)$, 并且一定在 $E(A) \oplus E(B)$ 的边上,

有 $f \in E(E(A) \oplus E(B))$, 即 $E(A \oplus B) \subset E(E(A) \oplus E(B))$ 。

当且仅当 A, B 为边集时, 有 $E(A \oplus B) = E(E(A) \oplus E(B))$ 。

定理 3: 设任意 2 个凸多面体的实体 A, B , 记 $E(A \oplus B)$ 的闭包为 $\bar{X}(A \oplus B)$, $E(A) \oplus E(B)$ 的闭包记为 $\bar{X}(E(A) \oplus E(B))$, 则有

$$\bar{X}(E(A) \oplus E(B)) = \bar{X}(A \oplus B)$$

证明: $\because E(A \oplus B) \subset E(E(A) \oplus E(B))$

\therefore 有 $V(A \oplus B) \subset V(E(A) \oplus E(B))$, V 表示顶点集

即有 $\bar{X}(A \oplus B) \subset \bar{X}(E(A) \oplus E(B))$

又 $\because E(A) \subset A$, 由形态运算的单调性

$$E(A) \oplus E(B) \subset A \oplus E(B), E(B) \subset B,$$

$\therefore A \oplus E(B) \subset A \oplus B$, 即 $E(A) \oplus E(B) \in A \oplus B$, 故有 $\bar{X}(E(A) \oplus E(B)) \subset \bar{X}(A \oplus B)$ 得证。

由于 $E(A) \oplus E(B)$ 不能构成一个实体, 处理起

来困难, $E(A) \oplus E(B)$ 还缺乏面的描述, 考虑 $V(A) \oplus F(B)$, 显然 $V(A) \oplus F(B) \in A \oplus B$ 。

因为 $F(B)$ 由 $E(B)$ 构成边界, $V(A) \in E(A)$, 因此 $V(A) \oplus F(B) \subset \bar{X}(A \oplus B)$, 并且 $V(A) \oplus F(B)$ 正好是 $\bar{X}(A \oplus B)$ 的边界, 也即它是 $A \oplus B$ 的一部分。

推论 1: $A \oplus B$ 的面只能是 $E(A) \oplus E(B)$, $V(A) \oplus F(B)$, $V(B) \oplus F(A)$ 中的某一个, 即 $\bar{X}(A \oplus B) = \bar{X}(E(A) \oplus E(B) \cup V(A) \oplus F(B) \cup V(B) \oplus F(A))$ 推论比定理 6 给出更强的条件, 对凹多面体也成立, 为计算 $\bar{X}(A \oplus B)$ 带来方便。

定理 4: 对给定的一个面 F 和一个顶点 V, a, b 为比例系数, 则 $aF \oplus bV$ 的法线和 F 的法线一致, 与 V 无关, 对于 2 个互不平行的边 E_a 和 E_b , 面为 $E_A \oplus E_B$ 的法线是一个定值。

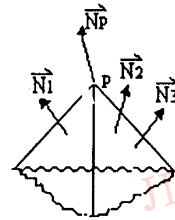


图 1 顶点 p 的局部方向定义

定义 6: 设多边形的某个顶点 p 与 K 个面相邻, 每个面的法线矢量为 $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_k$, 则顶点 P 的局部方向矢量定义为。

$$\vec{N}_p = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \vec{N}_i$$

显然 \vec{N}_p 与 \vec{N}_i 的次序无关。

定义 7: \vec{N} 为多面体实体集合 A 中顶点 p 上的局部方向, 当且仅当 p 点存在一个局部半球与半空间 $\{x: (x-p) \cdot \vec{N} > 0\}$ 的交在 A 的外部, 则称此点为凸点, 否则为凹点。

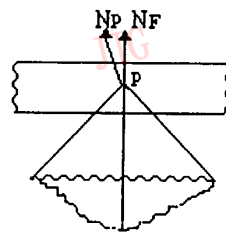


图 2 F 与 p 满足 DHS(F, p) 关系

定义 8: 设平面 F 的法线为 \vec{N}_F , 当且仅当顶点 p 存

在一个局部半球与半空间 $\{x: (x-p) \cdot \vec{N}_F > 0\}$ 的交在 A 的外部, 称面 F 与顶点 p 满足 DHS(Different Half Space) 关系, 记为 $DHS(F, p)$ 。

通常, 过 p 点作一以 \vec{N}_F 为法线的平面, 若此平面在任何局部方向未切到实体 A , 则 \vec{N}_F 与 p 点满足 DHS 关系。此时, \vec{N}_F 面需与 P 的相邻 K 个面作判断。显然, 不满足 $DHS(F, p)$ 的面 F 一定在实体的内部, 可以去掉。

推论 2: 设 B 中平面 F 的法线为 \vec{N}_F , A 中的某点 p 的局部方向为 \vec{N}_p , 如果 \vec{N}_F 与 \vec{N}_p 的夹角大于 90° , 则 $p \oplus F$ 一定在 $\bar{X}(A \oplus B)$ 的内部, 即 $p \oplus F$ 面可去掉。

如果 p 点为凹点, 过 p 点作平面一定与实体 A 相交, 即不可能存在平面满足 $DHS(F, p)$ 关系, 此时可由 p 点与邻边与另一多面体的点面形态和或边, 边形态和进行计算。只有凸点作 DHS 关系判断。

3 变形算法的实现与分析

3.1 变形算法的实现

定义 9: 对于 2 个多面体 A, B , 其中间状态为 $C(t)$, $t \in (0, 1)$, 则 $C(t) = \bar{X}((1-f(t)) * A \oplus f(t) * B)$, 其中 $f(t)$ 为一控制函数, $f(t) \in [0, 1]$ 。当 t 由 0 变到 1, $C(t)$ 为 A, B 形体内插结果, $C(t)$ 实现从形体 A 变形到形体 B 。

由定理 3 和推论 1, $A \oplus B$ 可由 $E(A) \oplus E(B)$, $V(A) \oplus F(B)$, $V(B) \oplus F(A)$ 来构造。显然, 由上三项式求出的边和面有许多是相同或在 $\bar{X}(A \oplus B)$ 的内部, 必须去掉。只有满足 DHS 关系的点和面才是 $\bar{X}(A \oplus B)$ 的边界。

算法流程如下:

(1) 判 A, B 的所有点是否凸点, 作上标志, 并计算所有凸点的局部方向。

(2) 对于 A 中的每一个凸点 V_A 和 B 中的每一个面 F_B , 测试 \vec{N}_{V_B} 和 \vec{N}_{F_A} 的夹角是否大于 90° , 若小于 90° , 测试 $DHS(\vec{N}_{F_B}, V_A)$ 是否成立, 若成立, 则 $V_A \oplus F_B$ 加入 $C(t)$ 中。

(3) 对于 B 中的每一个凸点 V_B 和 A 中的每一个面 F_A , 测试 \vec{N}_{V_B} 和 \vec{N}_{F_A} 的夹角是否大于 90° , 若小于 90° , 测试 $DHS(\vec{N}_{F_A}, V_B)$ 是否成立。若成立, 则 $V_A \oplus F_B$ 加入 $C(t)$ 中。

(4) 对于 A 中的每一边 E_A 和 B 中的每一边

E_B , 测试 $DHS(N_E, a)$ 和 $DHS(N_E, b)$ 是否成立。若成立, $E_A \oplus E_B$ 加入 $C(t)$ 中。其中 $N_E = E_A \times E_B$, a, b 分别为 E_A, E_B 的端点。

(5) 求 $C(t)$ 的闭包。

求闭包分 2 步进行。首先删除闭包内部的面和边, 闭包内部的面和边由凹点引起。求 2 个平面的交线, 由此交线把平面分成几个部分, 如果此平面的一部分在多面体内部则去掉此面。如果 2 个平面共面, 并且它们的交不为空, 则需把此 2 平面合并成一个大平面, 直至所有的平面都不满足上述 2 种条件。首先求 2 个平面的交点 n_1, n_2 , 还需在整个面表中搜索, 把交点插入多边形的顶点表中得 2 个顶点序列: $a_1, a_2, a_3, n_2, a_4, n_1, a_1$; $b_1, n_2, b_2, b_3, b_4, n_1, b_1$, 见图 3。

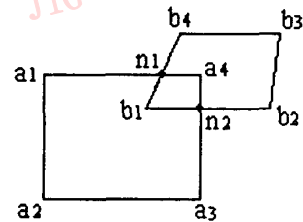


图 3 2 个多边形的求并

从此 2 序列中任一点出发遇交点则转另一序列, 如从 a_1 出发, 得 a_1, a_2, a_3, n_2 转 b 序列 b_2, b_3, b_4 , n_1 转 a 序列 a_1 。即最后输出的合并多边形的顶点序列为 $a_1, a_2, a_3, n_2, b_2, b_3, b_4, n_1, a_1$ 。

如果从 b_1 出发, 得到 b_1, n_2, a_4, n_1 序列, 这是 2 个多边形的交, 此种情况应排除。

然后在面表和顶点表中删除原多边形和顶点, 加入新的合并后的多边形。形体的表示采用 3 个链表、面表、边表及顶点表, 在 $C(t)$ 中每生成一个面, 我们都认为其点、边、面都是新的信息加入面表、点边内, 事实上, 每个点可以作为几个面的元素加入点与面的形态和运算, 所以点表有冗余。每条也可分属 2 个不同的面, 边表隶属于面表。所以在边和边的形态和运算中生成的面表有冗余, 为了消除点表和面表的冗余, 需对点表和面表进行整理。

整理的算法如下:

(1) 定义: 记录数组 for $i=0$ to 总点数 $du[i] = -1$

$du[0]$ 对应 1 号点, $du[i]$ 对应 $i+1$ 号点。

如果 m 号点与 n 号点是同一点, 即它们的坐标值相同, 则 $du[m-1] = du[n-1] = m$ 。

(2) 顺序检查 $du[i]$

if $du[i] \neq -1$ and $du[i] \neq i+1$, 则删除点表中第 $i+1$ 号点

(3) 遍历面表, 检查每一个面的点表, 取出点号 x , if $du[x-1] \neq -1$ and $du[x-1] \neq x$, 则替换点号 $x \leftarrow du[x-1]$.

此方法可以对任意多面体(包括凹多面体和有孔多面体)进行变形处理。图 4 和图 5 给出了 2 个凸多面体和凹多面体与凸多面体进行形态和的结果。实线表示闭包边界, 虚线表示闭包内部和小平面合并前的结果。

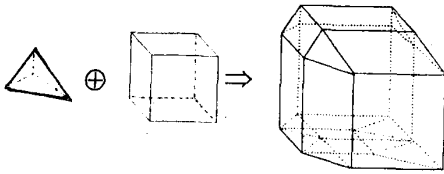


图 4 2 个凸多面体形态和的结果

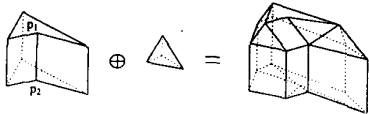


图 5 凹多面体与凸多面体形态和的结果, 其中 p_1, p_2 为凹点

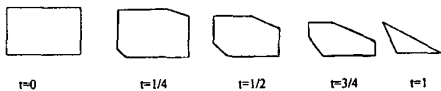


图 6 四边形变形为三角形的过程,

取 $t=0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ 时 $(1-t)A \oplus tB$ 的结果

3.2 溶化和膨胀的变形过程

设一个物体(如冰或金属等)不断溶化, 则它的体积不断减小, 并且形状会不断发生变化, 尖锐的地方溶化快, 平坦的地方溶化慢, 物体不断溶化不断趋向光滑。同理, 膨胀是溶化的反过程, 如消气后的气球吹成椭球的过程。可以用一个算子来描述此溶化过程。设原物体为 A 、结构元 B , 则溶化的中间状态为 $C(t) = A \oplus tB$, t 是时间参数, $t \in [0, 1]$, 当 $t=0$, $C(0) = A$, $t=1$, $C(1) = A \ominus B$ 即物体 A 不断与体积变大的结构元作形态差, 不同的要求可选取不同的

结构元。最简单常用的一种结构元为球, 当 B 包含于 A 之后, $C(1) = A \ominus B = 0$, 即物体 A 全部消失, 同理, 膨胀的过程可以描述为 $C(t) = A \oplus tB$ 。

3.3 算法分析

算法的正确性在原理部分已作分析, 下面讨论算法的时间复杂度。我们考虑最坏情况下, 2 个多面体的形态和最多会生成多少个面。设多面体 A, B 的顶点数、边数、面数分别为 $numV_A, numE_A, numF_A, numV_B, numE_B, numF_B$ 。算法第 2 步最多会产生 $numV_A * numF_B$ 个面, 实际上不会有这么多。由于背面的面不满足 DHS 条件。因此, 最多会产生 $1/2 * (numV_A * numF_B)$ 个面。

同理第 3 步会产生 $1/2 * (numV_B * numF_A)$ 个面。

第 4 步会产生 $1/4 * (numE_A * numE_B)$ 个面。

则总面数为 $1/2 * (numV_A * numF_B) + 1/2 * (numV_B * numF_A) + 1/4 * (numE_A * numE_B)$ 。

然后在此总面数中进行合并, 因此算法的复杂度是 $O(numV_A * numF_B + numV_B * numF_A + numE_A * numE_B)$ 个面进行计算, 这是非常费时的。因此, 快速算法的关键是从大量的候选面中尽快选出实际参加运算的面, 使总面数的复杂度能降低。

4 结束语

任意三维多面体变形是一个复杂过程。本文采用形态学方法, 具有数学模型统一, 变形效果好, 适合于不同拓扑结构的任意物体的特点。由于形态和、差是一种非线性算法, 也可推广至三维物体造型中, 并可与常规的造型方法相结合, 来构造更复杂的物体, 由于形态和、差的运算量大, 因此, 寻找快速算法是今后应用的重点。

参考文献

- 1 James R Kent, Wayne E Carlson, Kichard E Parent. Shape Transformation for Polyhedra Objects. Proc. SIGGRAPH '92; 47~54.
- 2 刘文子, 潘晓明, 朱光喜等. 柔性物体变形及动画的实现. 华中理工大学学报 1996, 24(8): 13~16.
- 3 John F Hughes. Scheduled Fourier Morphing. Proc. SIGGRAPH'92; 43~46.
- 4 吴敏金. 图像形态学. 上海: 上海科学技术文献出版社.



刘文予 华中理工大学电子与信息工程系副教授。主要研究领域包括计算机视觉, 图象识别, 计算机图形学及多媒体信息处理。发表论文 20 余篇。



万菲 22岁, 1995年获华中理工大学工学学士, 现为华中理工大学电子与信息工程系硕士研究生。

陈都 1996年毕业于华中理工大学电子与信息工程系, 现在广州通信公司工作。

朱光喜 1945年生, 1969年毕业于华中工学院, 现为华中理工大学电子与信息工程系教授, 任系主任。长期从事计算机图象, 图形处理, 多媒体通信等领域的工作, 获得多项研究成果, 在国内外发表论文近 100 篇。现主要从事 CSCW, 数字电视, 多媒体通信等工作。

An Algorithm of 3-D Objects Morphing and Its Implementation Based on Morphology

Liu Wenyu, Chen Du, Wan Fei, Zhu Guangxi

(Dept. of electri. & Infor. Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074)

Abstract A new morphology method of 3-D objects Morphing is proposed and the principle of the method is proved. The relationship of morphing interpolation is described by a uniform mathematics model and the problem of two arbitrary polyhedrons morphing is solved. Experimental results show that the new method is good for morphing and the defect of old method is overcome. It's very easy to complete and the method can be popularized to modeling system.

Keywords Morph, Morphology, Animation

小资料

AGP

AGP 是图形加速端口 (Accelerated Graphics Port) 的简写, 顾名思义, 它是 Intel 为提高个人电脑的图形性能专门开发的新硬件结构。它不仅仅是一个硬件插口, 而是为提高图形性能而设计的一整套

实现规则, 包括硬件结构设计及算法实现。Pentium I 处理器加 AGP 图形加速卡将给个人电脑带来专业级的图形性能, 能进行精细的图象处理, 享受流畅的电脑三维游戏, 用软件播放 DVD 等等。