

调和映射的构造及其在图形学中的应用*

周 昆 潘志庚 马小虎 石教英

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘 要 调和映射可用于建立区域之间的映射关系。其最大优点是能使映射过程所产生的形变最小, 可用来对网格表面参数化。本文详细介绍了调和映射的构造方法, 并对它在图形学中的应用进行了详细讨论。

关键词 调和映射, 网格简化, 细节层次, 纹理映射

1 引 言

在计算机图形学和几何造型中, 经常用三角形网格来描述物体模型。这主要是因为一些图形硬件支持三角形的绘制。另外, 很多可用的数据都是网格数据(如用测量方法得到的地形数据是正规四边形网格数据或散乱点数据, 可视化中很多初始数据也是以网格数据的形式存在的)。

对三角形网格数据所表示的复杂形状构造参数化是一种非常有用的操作, 可用在很多应用中。如虚拟环境中多细节层次模型的构造、纹理映射、用非正规有理 B 样条(NURBS)面片来对网格表面进行近似等。很显然, 如何构造网格数据的参数化表示变得非常关键, 这也是本文所要讨论的问题。一种有效的方法是使用基于调和映射(harmonic map)^[1]的方法。调和映射可用于建立区域之间的映射关系, 其最大优点是能够保证映射过程所产生的形变最小。构造调和映射所要解决的问题可描述如下:

给定一个三角形网格 $TM(V, T)$, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是顶点的集合, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ 为三角形集合; 存在一个平面 $\alpha: ax + by + cz + d = 0$; TM 投影到平面 α 上后是非自交的。我们要把 TM 映射到平面 α 上的某一多边形区域, 使得 TM 的拓扑结构在映射后发生的形变最小。

2 调和映射的构造

2.1 映射 TM 的边界顶点

设 TM 有 k 个边界顶点, 不妨设为 (v_1, v_2, \dots, v_k) 。从这些边界顶点中选取几个映射到平面 α 上的一个凸多边形 P 的顶点上。然后将 TM 的其余边界顶点映射到多边形 P 的相应边上, 它们的位置是由它们在边界边上的位置决定的。这样 TM 的边界顶点都映射到了多边形 P 上。

2.2 映射 TM 的内部顶点

设要求的映射为 ρ , 且 $\rho(v_i) = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ 。其中 $\rho(v_i) (i=1, 2, \dots, k)$ 取前一步的结果, 即为已知。为了使 TM 的拓扑结构在映射到平面上多边形 P 中后发生的形变最小, 可以将 TM 想象成由 m 个三角形橡胶片沿着它们的边缝接而成的一个有弹性的橡胶块, 现在要将这个橡胶块挤压或拉伸到一个平面多边形区域中; 根据弹性力学的知识, 该橡胶块在变形后的弹性势能可由下式给出:

$$E(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{(v_i, v_j) \in Edge(TM)} S_{ij} \|\rho(v_i) - \rho(v_j)\|^2 \quad (1)$$

其中 S_{ij} 为边 (v_i, v_j) 的弹性系数。这有多种选择, 可以取常数。各种不同取值对结果的影响可参考文献

* 本课题得到国家自然科学基金重点项目“真实感图形实时生成技术”和国家自然科学基金项目“分布式环境下限时图形绘制技术的研究”共同资助

收稿日期: 1997-08-04; 收到修改稿日期: 1997-10-13

[1],我们采用文献[1]推荐的方法:设 (v_i, v_j) 为 2 个三角形 (v_i, v_j, v_{k1}) 和 (v_i, v_j, v_{k2}) 共有,则有:

$$S_{ij} = (L_{i,k1}^2 + L_{j,k1}^2 - L_{i,j}^2)/Area(v_i, v_j, v_{k1}) + (L_{i,k2}^2 + L_{j,k2}^2 - L_{i,j}^2)/Area(v_i, v_j, v_{k2}) \quad (2)$$

其中 $L_{i,j}$ 表示边 (v_i, v_j) 在网格 TM 中的长度, $Area(v_i, v_j, v_{k1})$ 表示三角形 (v_i, v_j, v_{k1}) 在网格 TM 中的面积,依此类推。当然,如果 (v_i, v_j) 只为一个三角

形所有,则式(2)中就只有一部分。

为了使 TM 的拓扑结构在映射到平面上后发生的形变最小,要使能量方程(1)达到最小值。这是一个典型的最小二乘问题。

$\rho(v_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 都在平面 $\alpha: ax+by+cz+d=0$ 上,不妨设 $c \neq 0$,则有 $z_i = -(ax_i+by_i+d)/c$ 。能量方程(1)转变为如下形式:

$$E(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{(v_i, v_j) \in Edge(TM)} S_{ij} \|\rho(v_i) - \rho(v_j)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{(v_i, v_j) \in Edge(TM)} S_{ij} [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2] = \frac{1}{2} \sum_{(v_i, v_j) \in Edge(TM)} S_{ij} \{ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \frac{1}{c^2} [a(x_i - x_j) + b(y_i - y_j)]^2 \} \quad (3)$$

为了使式(3)达到极小值,可对 $x_i, y_i (i=k+1, \dots, n)$ 求偏导数,并令其为零。设 $adj(v_i)$ 为与 v_i 相邻的顶点集合,即若 $v_j \in adj(v_i)$,就有 $(v_i, v_j) \in Edge(TM)$ 。这样就得到了线性方程组(4)。 $x_i, y_i (i=1, 2, \dots, k)$ 已知,方程组(4)为一个包含 $2(n-k)$ 个方程和 $2(n-k)$ 个未知数的线性方程组。

在通常情况下,与一个顶点相邻的顶点数目不会太多;在我们实验过的数据中,最多不会超过 20 个。而网格 TM 包含的顶点数目通常是成千上万的。所以线性方程组(4)的系数矩阵是一个很大的稀疏矩阵,我们可以用逐次超松弛迭代法(SOR)或共轭梯度法求解该线性方程组得到 $x_i, y_i (i=k+1, \dots, n)$,进而得到 $\rho(v_i) (i=k+1, \dots, n)$ 。这样就把 TM 的内部顶点都映射到了多边形的内部。

在通常情况下,与一个顶点相邻的顶点数目不

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E(\rho)}{\partial x_{k+1}} &= \sum_{v_j \in adj(v_{k+1})} S_{k+1,j} \{ x_{k+1} - x_j + \frac{a}{c^2} [a(x_{k+1} - x_j) + b(y_{k+1} - y_j)] \} = 0 \\ \frac{\partial E(\rho)}{\partial y_{k+1}} &= \sum_{v_j \in adj(v_{k+1})} S_{k+1,j} \{ y_{k+1} - y_j + \frac{b}{c^2} [a(x_{k+1} - x_j) + b(y_{k+1} - y_j)] \} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E(\rho)}{\partial x_i} &= \sum_{v_j \in adj(v_i)} S_{ij} \{ x_i - x_j + \frac{a}{c^2} [a(x_i - x_j) + b(y_i - y_j)] \} = 0 \\ \frac{\partial E(\rho)}{\partial y_j} &= \sum_{v_j \in adj(v_i)} S_{ij} \{ y_i - y_j + \frac{b}{c^2} [a(x_i - x_j) + b(y_i - y_j)] \} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E(\rho)}{\partial x_n} &= \sum_{v_j \in adj(v_n)} S_{nj} \{ x_n - x_j + \frac{a}{c^2} [a(x_n - x_j) + b(y_n - y_j)] \} = 0 \\ \frac{\partial E(\rho)}{\partial y_n} &= \sum_{v_j \in adj(v_n)} S_{nj} \{ y_n - y_j + \frac{b}{c^2} [a(x_n - x_j) + b(y_n - y_j)] \} = 0 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

2.3 调和映射的生成

得到 $\rho(v_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 后,就可以构造一个分段线性映射。

对 TM 中的每个三角形 $t_i (i=1, 2, \dots, m)$, $t_i=(v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$,我们希望 t_i 上的每个点在映射到平面 α 上后,都在 $\rho(v_{i1}), \rho(v_{i2}), \rho(v_{i3})$ 构成的三角形中,即对三角形 t_i 存在一个线性变换矩阵 $A_i (3 \times 3)$:

$$A_i \cdot [v_{i1} \ v_{i2} \ v_{i3}] = [\rho(v_{i1}) \ \rho(v_{i2}) \ \rho(v_{i3})]$$

$$A_i = [\rho(v_{i1}) \ \rho(v_{i2}) \ \rho(v_{i3})] \cdot [v_{i1} \ v_{i2} \ v_{i3}]^{-1} \quad (5)$$

由式(5)求得的线性变换矩阵的集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 即为构造的从 TM 到 P 的分段线性映射 $\rho: TM \rightarrow P$ 。我们希望 ρ 是可逆的,即每个线性变换矩阵 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 都是可逆的,这样就得到一个从 P 到 TM 的映射 $\rho^{-1}: P \rightarrow TM, \rho^{-1}$ 是 $A_i^{-1} (i=1, 2, \dots, m)$ 的集合 $\{A_1^{-1}, A_2^{-1}, A_m^{-1}\}$ 。这样就给出了调和映射的一个分段线性逼近。

图1是一个构造调和映射的示例。图1(a)网格 TM 在 $X-Y$ 平面上的投影,图1(b)则是 TM 映射到某一平面四边形区域后在 $X-Y$ 平面上的投影。可以看出映射后 TM 的拓扑结构变形比较小。

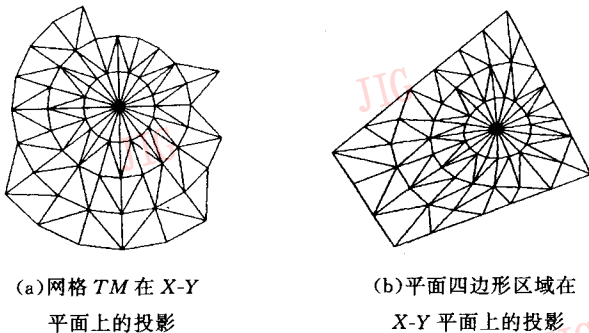


图1 调和映射示例

3 调和映射的应用

从前面的内容可知,使用调和映射可以对网格表面进行参数化。这一技术在图形学中有广泛的应用。典型的有多细节层次模型的生成^[2]、纹理映射^[3]以及用 NURBS 面片来对网格表面进行近似^[4]。

3.1 多细节层次模型自动生成

多细节层次(LOD)模型自动生成是指对一个场景中的物体使用不同的细节来描述,其主要用于提高绘制速度^[2]。LOD 可用在虚拟环境和交互式可视化中。

LOD 模型通常是通过对多边形网格模型进行简化得到的,研究人员提出了多种网格简化算法^[5~9]。这些简化算法主要可分为3种类型:重采样^[5,6]、自适应细分^[7]和几何元素(顶点、边、三角形)删除^[8,9]。然而,有些方法很难归为上面的哪一类。例如 Lounsbery^[10]提出了一种把具有子分连续性的

网格分解为基网格和小波系数,从而生成连续的 LOD 模型。为了克服该方法的局限性(只适用于具有子分连续性的网格),Eck^[1]使用调和映射技术把任意网格转换为具有子分连续性的网格。

本文使用基于调和映射的技术,对三角形网格构造基网格,再使用自适应细分的方法来生成 LOD 模型。

该方法主要分为3步:(1)分区,利用 Voronoi 图、Delaunay 三角剖分以及调和映射把原始网格分割成若干个三角形区域;(2)参数化,将上一步得到的三角形区域映射为基网格,并构造从基网格到原始网格的映射;(3)重采样,对基网格进行重采样,将新得到的点通过前面一步得到的映射映射到空间中去生成简化网格,进而得到多 LOD 模型。下面我们着重介绍参数化和重采样。

3.1.1 参数化

在将原始网格 TM 分割成 r 个三角形区域 T_1, T_2, \dots, T_r 后,对于每个三角形区域 $T_i (i=1, 2, \dots, r)$ 连接 T_i 的3个顶点就得到了一个三角形 F_i ,而 F_1, F_2, \dots, F_r 构成的三角形网格 TM_b 被称为基网格。基网格 TM_b 是原始网格 TM 的最低分辨率表示。

参数化过程实际上是调和映射的一次应用。对 TM 中的每个三角形区域 $T_i (i=1, 2, \dots, r)$,构造一个调和映射 $\rho_i: T_i \rightarrow F_i$ 。 ρ_i 在公共边上的一致性导致它们构成了一个连续的映射 $\rho: TM \rightarrow TM_b$,而它的逆映射 $\rho^{-1}: TM_b \rightarrow TM$,是在 TM_b 上的 TM 一个连续参数化表示。

3.1.2 重采样

为了得到简化网格,剩下的工作就是重采样基网格 TM_b 。我们可以分布一些点到基网格上 TM_b ,生成一个中间网格 TM_m, TM_m 仅仅是基网格 TM_b 的简单加密,并不包含比 TM_b 更多的拓扑信息。简化网格可以通过用映射 ρ^{-1} 把 TM_m 映射到三维空间 R^3 中去得到。

分布一些新点到基网格上有很多方法。可以采用 Turk^[5]给出的分布新点的方法。另一种简单的方法是在原始网格的每条边的中点分布一个点,这样基本网格的每个三角面就被分裂成4个子三角面,我们称这个过程为1-4分裂。对一个给定的值 J ,进行 J 次1-4分裂,就会产生一个具有子分连续性的三角形网格 TM'_b ,用前面得到的映射 ρ^{-1} 将 TM'_b 的顶点映射到 R^3 就可得到一个新的网格 TM' 。

3.1.3 实验结果

上述算法已在 SUN SPARC 工作站上实现,图2是用该算法生成的一组 LOD 模型。

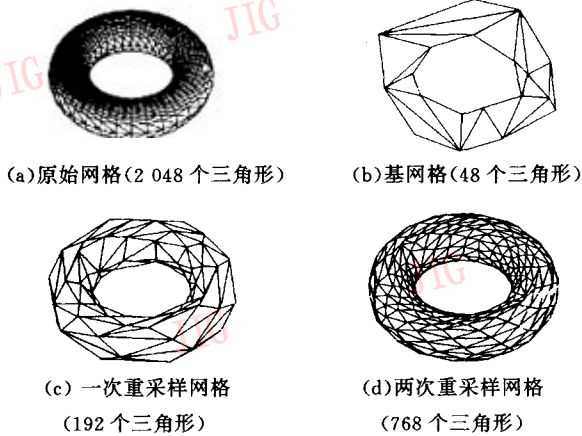


图2 算法生成的环的 LOD 模型

3.2 纹理映射

为了模拟物体表面精致的、不规则的颜色纹理,可采用纹理映射的技术^[3]。这种技术可将任意的平面图形或图像覆盖到物体表面上,在物体表面形成逼真的色彩花纹。纹理被定义成一亮度函数,纹理函数可以是一维、二维或三维的,最常用的纹理为二维光亮度函数。

纹理映射的主要思想是将一给定的纹理函数映射到物体表面上,在对物体表面进行光亮度计算时,可采用相应的纹理函数作为物体表面的漫反射光亮度代入光照模型进行计算。纹理映射涉及纹理空间、景物空间和屏幕空间 3 个空间之间的映射(如图3)。

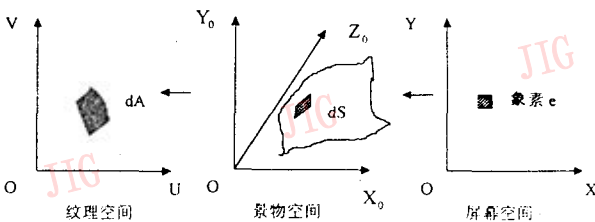


图3 纹理映射中的映射关系

把屏幕空间中的像素 e 映射到物体表面可通过将像素的 4 个顶点映射到景物空间的可见面上来实现。而在从景物空间向纹理空间映射,即确定景物空间中的坐标所对应的纹理坐标 (x_0, y_0, z_0) 实际上是曲面片的参数化过程,参数化过程与具体的曲面片无关。很显然,这里的曲面片参数化过程可以与前面介绍的调和映射的网格表面参数化过程结合起

来。

3.3 其它应用

基于调和映射的网格表面参数化过程还可以用在其它图形学和 CAD 应用中。例如用 NURBS 面片来对复杂网格表面进行近似。受篇幅所限,本文不再讨论。

4 结束语

本文介绍了使用调和映射方法对三角形网格表面进行参数化的过程,使定量分析网格特征成为可能。另外,本文还着重介绍了调和映射在图形学中的应用。

调和映射方法可用于生成虚拟现实和交互式可视化中的 LOD 模型,另外还可用于纹理映射以及用 NURBS 面片来对复杂网格表面进行近似。从文中给出的例子可以看出由该方法得到的简化网格具有两个优点:首先,原始网格的最简表示(基网格)的三角形数目远远小于原始网格的三角形数目,这是其它网格简化算法所无法做到的;其次,该方法得到的简化网格非常均匀,具有很高的质量。当然,这种方法也存在很大的局限性:第一,该方法对原始网格的质量要求较高,不能存在自交而且最好是流形网格模型。这就大大限制了该方法的应用范围,因为在实际应用中得到的网格往往存在不同程度的自交,例如我们所掌握的数据大部份都是自交的。第二,该方法的速度较慢,这主要是因为要多次构造调和映射,解大型的稀疏线性方程组。

将来的工作主要集中在如何把调和映射技术广泛地应用到生成多细节层次模型中去。这主要是要解决上面所提到的算法的局限性,一方面要增强算法的容错性,即对存在自交的网格采取特别措施,另一方面是要简化算法过程,提高算法的速度。

参考文献

- 1 Eck M, DeRose T. et al. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In SIGGRAPH'95, 1996:173~182.
- 2 潘志庚,马小虎,石教英. 虚拟环境中多细节层次模型自动生成算法. 软件学报,1996,7(9):526~531.
- 3 Maillot J, Yahia H, Verroust A. Interactive texture mapping. In Computer Graphics (SIGGRAPH'93 Proceedings), 1993, 27(3):27~34.
- 4 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条(NURBS). 北京:北京航空航天大学出版社,1994.

- 5 Turk G. Re-tiling polygonal surface. *Computer Graphics*, 1992, 26(2):55~64.
- 6 周昆, 马小虎, 潘志庚, 石教英. 基于重新划分的三角形网格简化的一种改进算法. *软件学报*, 1997(已录用, 待发表).
- 7 DeHaemer M J. et al. Simplification of objects rendered by polygonal approximations. *Computer & Graphics*, 1991, 15(2), 175~184.
- 8 Cohen J, Varshney A, Manocha D. et al. Simplification en-velopes. In SIGGRAPH'96, 1996:119~128.
- 9 Garland M, Heckbert P S. Surface simplification using quadric error metrics. In SIGGRAPH'97, 1997.
- 10 Lounsbery J M. Multi-resolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. PhD thesis., 1994.
- 11 Eells J, Lemaire L. Another report on harmonic maps. *Bull. London Math. Soc.*, 1988, 20:385~524.



周 昆 1977 年生, 浙江大学计算机系硕士生. 研究方向为虚拟现实和计算几何。



马小虎 1964 年生, 博士, 副教授. 研究方向为虚拟现实和中文信号处理。



潘志庚 1965 年生, 博士, 研究员. 研究方向为分布式图形, 多媒体和限时图形绘制等。



石教英 1937 年生, 教授, 博士生导师. 研究方向为虚拟现实, 多媒体和科学计算可视化等。

The Construction of Harmonic Map and Its Application in Computer Graphics

Zhou Kun, Pan Zhigeng, Ma Xiaohu, Shi Jiaoying

(State Key Lab. of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract Harmonic maps can construct the mapping relation between two regions. With this method, the geometric distortion is minimized. Harmonic maps can be used to do the parametrization of mesh over a simple domain. In this paper, we present the construction method for harmonic map. And its application in computer graphics is discussed in detail.

Keywords Harmonic map, Mesh simplification, Level of detail, Texture mapping

开思软件出 OA V3.0 版

新版本在软件技术和应用功能方面作了较大的改进。在软件技术方面, 利用 32 位代码和 Com 对象技术, 与 Lotus Notes 无缝结合, 从而提供了全新的用户界面。用户可以使用普通 Windows 界面或工具条方式运行系统, 并且可以根据需要自定义菜单界面内容和背景图片; 同时, 为进一步支持 Internet/Web 技术, 专门提供了 Internet 集成模块, 使得大量应用均能利用 Internet 浏览器完成; 在邮件技术上, 进一步完善了用户在 Notes Mail 和 Internet Mail 上的相互集成。同时, 为了适应国内用户的特殊要求, 新版本支持多用户设置及 Notes 多用户的自动切换。目前, 开思/OA 已能运行于 Windows NT、Unix 和 IBM AS/400 多种网络平台。