

多进制小波变换及其在影像分析中的应用*

杨晓梅

(中科院地理所资源与环境国家重点实验室, 北京 100101)

朱长青

(郑州测绘学院, 450052 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 310027)

摘要 首先简要地介绍了多进制小波基本理论并分析了其变换特征, 然后阐述了其在影像缩小、边缘检测中的应用。

关键词 多进制小波 影像缩小 边缘检测

0 引言

小波分析理论发展至今, 其基本的理论框架已经基本建立。目前, 已构造出许多二进制的小波, 并得到了广泛的应用。但是, 在二进制的情形, 小波的构造受到许多限制。而在影像分析等领域, 希望所选择的小波能尽可能多地具有正交性、紧支集、光滑性等。由此, 促进了对多进制小波的研究。多进制小波是近几年刚刚发展的小波理论的一个新的组成部分, 它提供了更大的小波选择范围, 并为我们找到了具有更好性质的优于二进制小波的小波函数。目前, 多进制小波的理论和应用已有一些研究^[1,2], 但还不很深入。

1 多进制小波基本理论和变换特征

1.1 多尺度分析

定义 设 $M \geq 2$ 是一个正整数, 当 $L^2(R)$ 中有闭子空间列 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 满足下列条件时

- (1) 单调性: $V_j \subset V_{j-1}$ 。
- (2) 逼近性: $\bigcap V_j = \{0\}$, $\overline{\bigcup V_j} = L^2(R)$ 。

(3) 伸缩性: $u(x) \in V_j \Leftrightarrow u(Mx) \in V_{j-1}$, $\forall j \in Z$ 。

(4) Riesz 基: 存在 $g \in V_0$, 使得 $\{g(x-k) | k \in Z\}$ 构成 V_0 的 Riesz 基。

则称 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 为一个 M 进制的多尺度分析。

利用多尺度分析可以得到空间 $L^2(R)$ 的正交分解, 从而得到函数在空间 $L^2(R)$ 的正交表示。

令 W_j 为 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补空间, 即 $V_j \oplus W_j = V_{j-1}, j \in Z$,

则 $L^2(R) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = V_k + (\bigoplus_{j>k} W_j)$,

即对每一个 $f \in L^2(R)$, 存在 $g_j \in W_j$ 和 $f_k \in V_k$ 使得

$$f = \sum_{j \in Z} g_j = f_k + \sum_{j>k} g_j。$$

事实上, V_j 由 $\{M^{j/2}\varphi(M^jx-k) | k \in Z\}$ 生成, W_j 由 $\{M^{j/2}\psi_s(M^jx-k) | 1 \leq s \leq M-1, k \in Z\}$ 生成。其中 $\varphi(x)$ 称为尺度函数, $\{\psi_s(x), 1 \leq s \leq M-1\}$ 称为基本小波函数, 且分别满足如下方程

$$\varphi(x) = \sum_{k \in Z} c_k \varphi(Mx-k), \psi_s(x) = \sum_{k \in Z} d_{sk} \varphi(Mx-k),$$

其中 $\{c_k\}$ 为共轭滤波系数, 相应的尺度方程的共轭

滤波器为
$$H(z) = \frac{1}{M} \sum_{k \in Z} c_k z^k。$$

定义具有不同性质的共轭滤波器, 就可以得到

* 国家自然科学基金(No. 49571060)资助

收稿日期: 1998-06-26; 收到修改稿日期: 1998-04-21

具有不同性质的共轭滤波系数。

1.2 多进制小波的构造

当 $M=2$ 时,基本小波函数只有一个,它可以由 φ 明确地表示。但当 $M \geq 2$ 时,基本小波函数 $\{\psi_s(x), 1 \leq s \leq M-1\}$ 有 $M-1$ 个,不能由 φ 简单地表示。关于多进制小波的构造已有许多研究。Lawton、Lee 和 Shen 在文献[1]中给出了由尺度函数构造基本小波函数的一个方法。Chui 和 Lian^[2]研究了 $M=3$ 时紧支集对称和反对称小波的构造。因此,在多进制情形,小波的构造具有更大的灵活性,可以满足更多方面的要求,具有更好的性质。详细构造方法可见上述文献。

其中,构造的满足插值性质的尺度函数*,其相应的共轭滤波器为

$$H(z) = \frac{2 - z^M - z^{-M}}{M^2(2 - z - z^{-1})} (1 + \frac{M^2(\alpha + \gamma)}{2} (1 - z^{-1})(z - z^{M+1}) + \frac{M^2(\alpha - \gamma)}{2} (1 - z)(z - 1 - z^{-M-1}))。$$

其中 M' 为 $(M-1)/2$ 的整数部分, $\alpha = \frac{M^2 - 1}{12MM'}$,

$$\gamma = \alpha \sqrt{\frac{12M'(M'+1)}{M^2 - 1} - 1}。$$

于是,我们可以求得满足插值性质的尺度函数系数和小波函数的系数。

1.3 图象的多进制小波分解和重构

利用尺度函数和小波函数的正交性,就可以得到图象的分解和重构算法。这里设离散图象为 $\{a_{0,n_1,n_2}\}$, 则分解公式为:

$$a_{j+1,k,l} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{n_1-Mk} c_{n_2-Ml} a_{j,n_1,n_2}$$

$$b_{j+1,k,l} = \begin{cases} \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{n_1-Mk} d_{n_2-Ml} a_{j,n_1,n_2} & s_1 = 0, 1 \leq s_2 \leq M-1, \\ \sum_{n_1} \sum_{n_2} d_{n_1-Mk} c_{n_2-Ml} a_{j,n_1,n_2} & 1 \leq s_1 \leq M-1, s_2 = 0 \\ \sum_{n_1} \sum_{n_2} d_{n_1-Mk} d_{n_2-Ml} a_{j,n_1,n_2} & 1 \leq s_1, s_2 \leq M-1 \end{cases}$$

图象的重构公式为:

$$a_{j,k,l} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{k-Mn_1} c_{l-Mn_2} a_{j+1,k,l} +$$

$$\sum_{s_1, s_2=0, s_1+s_2 \neq 0}^{M-1} \sum_{n_1} \sum_{n_2} d_{k-Mn_1}^{s_1} d_{l-Mn_2}^{s_2} b_{j+1,k,l}^{s_1, s_2} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} (c_{k-Mn_1} c_{l-Mn_2} a_{j+1,k,l} + \sum_{s_1, s_2=0, s_1+s_2 \neq 0}^{M-1} d_{k-Mn_1}^{s_1} d_{l-Mn_2}^{s_2} b_{j+1,k,l}^{s_1, s_2})$$

下面给出一幅影像的四进制小波变换图,其中图1是原图,图2为其4进制小波变换图象。



图1



图2

在分解公式中, $a_{j,k,l}$ 为图象的低频部分,其长宽分别为原图象长宽的 $1/M$,它即为变换后图象左上角的影像。因此,它可看作为原图象的一个缩小 M 倍的近似图象。在下一节,我们将此用于图象的缩小。

2 多进制小波在影像缩小中的应用

在图象处理中,图象的缩小一般都是采用重采样技术或双线性内插方法^[4],但是它存在着这样的

* 孙顾或. 多进制小波的构造,浙江大学数学所报告,1996.

缺点,即在缩小的过程中,没有考虑到图象上的结构特征,使得图象在缩小过程中较大的结构信息可能产生损失。例如图3为一幅地图,利用重采样求其缩小3倍的图象,得到的一上的一条线失去了,原来的图象的结构信息得到破坏。为了克服这一不足,文献[4]中利用小波分析的方法来完成影像的缩小及放大。但是,由于采用的是二进制的正交小波变换,因而只能缩小 2^k (k 为正整数)倍的图象,对其它的倍数却不能做到,且 2^k 倍是在 2^{k-1} 倍的基础上进行的,即在低频成份的基础上再求低频成份。这样,随着缩小倍数的增加,损失的细节较大。而利用多进制小波却能克服这些不足,我们可以直接得到任意整数倍数的缩小小图象,且只需在原来的图象上一次完成。下面我们给出利用多进制小波于图象缩小中的方法。

在 M 进制小波下的正交分解中,图象被分解成 $M \times M$ 个相同大小的子图象,如图2所示,其长、宽均为原图象的 $1/M$ 倍,而其中之一即为其低频成份。低频成份消除了原图象高频成份,但保留了原图象的基本信息及较大的影象结构,因而可以作为原图象的一个缩小了 M 倍的图象。这样,即得到了一个缩小了 M 倍的图象。而计算低频成份,仅需尺度函数的系数。下面,我们给出影像的低频成份,从而得到了缩小了的影像。

图5为图3利用多进小波缩小3倍的图象,它保持了原来图象的结构信息。图6为一幅影象图,图7~10为图6缩小2倍~5倍的图象。从图可见,经多进制小波变换后得到的缩小影像能很好地保持原来影像的结构信息,可用于广泛的图象缩小问题。

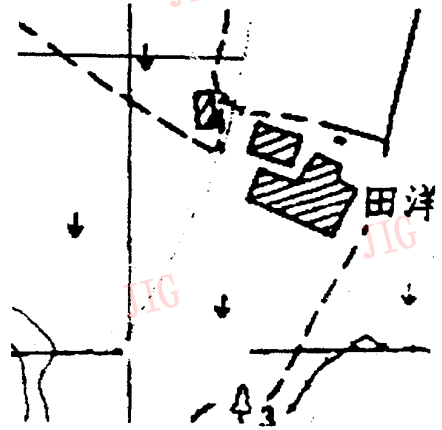


图3



图4



图5



图6



图7

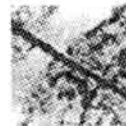


图8

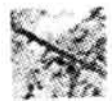


图9



图10

4 多进制小波在边缘检测中的应用

在边缘检测中,利用二进小波变换可以检测到影像在不同尺度下的边缘,边缘图象的尺寸和原来图象的尺寸相同。利用二进制正交小波变换,可以得到缩小 2^k 倍 (k 为整数) 的低频图象,然后利用边缘检测算法可以得到原来图象尺寸缩小 2^k 倍的边缘图

象^[5]。但对于其它非 2^k 倍的边缘图象,则无法得到。而利用多进制小波变换,则可以求得任意非整数倍的边缘图象。其基本方法是:首先,利用多进制小波变换求得缩小某一 M 倍的影像,然后对该缩小后的影像利用边缘提取算法求得边缘,从而得到缩小 M 倍的影像边缘。图11是图6利用二进小波变换所得的边缘^[5],图12~15是分别缩小2倍、3倍、4倍、5倍的边缘。从图中可见,所得缩小的边缘能很好地保持影像

的结构特征。

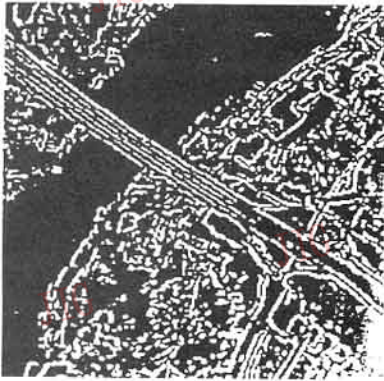


图11



图12



图13

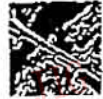


图14



图15

本文研究了目前文献不多见的多进制小波并讨论了其在影像缩小、边缘检测中的应用,所得结果可用于影像匹配、影像融合、目标识别、数据压缩等研究领域。多进制小波的理论和应用研究刚刚起步,相信今后会有越来越多的理论和应用成果出现。

参考文献

1 Soman A K, Vaidyanathan P P, Nyugen T Q. Linear Phase Paraunitary Filter Bank: Theory, Factorization and Designs. IEEE

Trans. Signal Processing, 1993, 41: 3480~3496.

2 Chui C K, Lian J A. Construction of Compactly Supported Symmetric and Antisymmetric Orthonormal Wavelets With Scale = 3. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1995(2): 21~52.

3 万发贵等. 遥感图象数字处理. 武汉: 华中理工大学出版社, 1991.

4 钱曾波, 朱述龙. 基于小波变换的图象变焦技术. 测绘学院学报, 1994(3)

5 朱长青. 小波分析理论·应用模型与影像分析[博士学位]. 郑州: 解放军测绘学院, 1996.



杨晓梅 1995年获硕士学位, 现在中科院资源与环境国家重点实验室攻读博士学位。已发表论文20余篇, 主要研究领域: 遥感和 GIS 应用、图象处理、模式识别等。



朱长青 副教授。1990年6月获硕士学位。1997年6月获博士学位。已发表论文40余篇, 出版著作2部。主要研究领域: 小波分析理论及应用、数值计算及应用、计算机图形学等。

Mult-Band Wavelet Transform and Its Applications in Image Analysis

Yang Xiaomei

(Institute of Geography Chinese Academy of Science 100101)

Zhu Changqing

(Zhangzhou Institute of Surveying and Mapping 450052)(National Lab. of CAD&CG, Zhejiang University 310027)

Abstract Mult-band wavelet is a newly developed branch of wavelet analysis, and superior to 2-band in symmetry and smooth, and can solve some problems which 2-band can't. In this paper, first we introduce base theory of mult-band wavelet and analyse transform properties of the wavelet, then obtain the applications of mult-band wavelet in image reduction and edge detection.

Keywords Mult-Band wavelet, Image reduction, Edge detection