

二维 Logistic 映射中混沌与分形的研究*

王兴元

朱伟勇

(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110006) (东北大学计算中心, 沈阳 110006)

摘要 研究了二维 Logistic 映射非线性动态行为的普适特征后发现, 控制参数不同, 二维 Logistic 映射可分别按 Feigenbaum 途径、Ruelle-Takens-Newhouse 方案和 Pomeau-Manneville 途径走向混沌, 且在控制参数空间中的较大区域, 其通向混沌的道路与 Hopf 分岔有关, 在这些途径上可观察到锁相和准周期运动。同时对二维 Logistic 映射的分形研究表明, 控制参数不同, 分形图互不相同, 且它们的边界是分形的。

关键词 二维 Logistic 映射 混沌 分形

混沌是指某些非线性系统对于它的初始条件具有敏感的依赖性, 从而系统中出现的一种内在随机性。一维 Logistic 映射 $x_{n+1} = 4\lambda x_n(1 - x_n)$, 随着控制参数 λ 的增加可不断地以周期倍增的方式走向混沌^[1]。二维映射起着从一维到高维的衔接作用, 对二维映射中混沌现象的研究有助于认识和预测更复杂的高维动力学系统的性态。那么二维 Logistic 映射从规则运动转化到混沌运动具有那些普适特征呢? 其分形图又将给我们什么启迪? 这些正是本文要探讨的问题。

1 二维 Logistic 映射中的混沌

1.1 理论与方法

分析复杂的非线性系统可用在相空间观察其轨道的方法。所谓相空间就是由所要研究的物理量本身作为坐标分量所构成的广义空间, 系统的任意状态相当于相空间中的一个代表点, 系统的状态随时间变化过程对应于代表点在相空间中的变化。为了构造相空间, 需要同步测出一切自变量的时间序列, 但也可采用 F. Takens 提出的由一维可观察量重构一个“等价的”相空间, 来重现系统的动态特性^[2]。非线性系统随时间的演变将趋向于维数比原来相空间低的极限集合——吸引子。通常的简单吸引子有

不动点、极限环和环面。简单吸引子又受控制参数的影响, 随着控制参数的变化, 简单吸引子可逐渐发展为奇怪吸引子, 此时系统是混沌的。这种当控制参数变化到某个临界值而使系统的动力学性态发生定性变化的现象称为分岔, 它是非线性系统内部固有的一种特性。因此我们也可利用分岔图(即把某一自变量和某一控制参数画成一张平面图)来研究系统的状态演化。Eckmann 曾对各种分岔过程进行了研究, 归纳出走向混沌的 3 种途径^[3]: ① Feigenbaum 途径(通过叉状分岔); ② Ruelle-Takens-Newhouse 方案(通过 Hopf 分岔); ③ Pomeau-Manneville 途径(通过阵发混沌)。

既然混沌系统在相空间中是由奇怪吸引子来描述的, 为了定量表示奇怪吸引子的运动性态, 人们引入了 Lyapunov 指数。

定义 1 设 R^n 空间上的迭代方程 $x_{i+1} = f(x_i)$, f 为 R^n 上的连续可微映射。

设 $f'(x)$ 表示 f 的 Jacobi 矩阵, 即

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$J_i = f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdots f'(x_{i-1}) = [f'(x)]'_{x=x_0}$$

* 国家“八六三”高科技基金(No:863-300-01)、辽宁省自然科学基金(No:972194)及东北大学中青年科学基金资助项目。

收稿日期:1997-12-30;收到修改稿日期:1998-06-29

将 J_i 的 n 个复特征根取模后,依从大到小顺序排列为

$$|L_1^{(i)}| \geq |L_2^{(i)}| \geq \dots \geq |L_n^{(i)}|$$

那么, f 的 Lyapunov 指数定义为

$$L_k = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \log |L_k^{(i)}|, (k = 1, \dots, n) \quad (2)$$

该定义是计算二维 Logistic 映射的最大 Lyapunov 指数 L_1 的理论基础。Lyapunov 指数的大小表明相空间中相近轨道的平均收敛或发散的指数率。它大致反映了系统的动力学性态。对于奇怪吸引子而

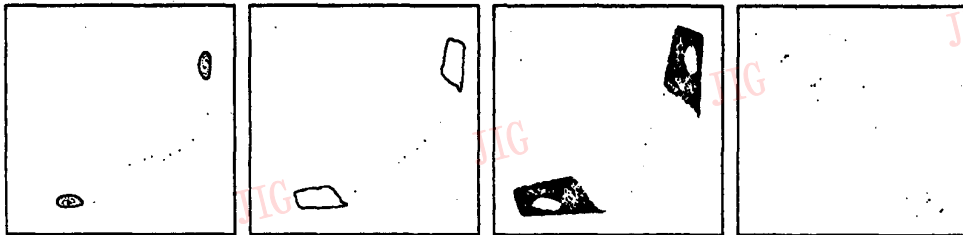
言,其最大 Lyapunov 指数 L_1 为正的;反之亦然。

1.2 结果与分析

二维 Logistic 映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4\lambda_1 x_n(1-x_n) + \gamma y_n \\ y_{n+1} = 4\lambda_2 y_n(1-y_n) + \gamma x_n \end{cases} \quad (3)$$

其动力学行为是由控制参数 λ_1, λ_2 和 γ 决定的。为了在控制参数空间对系统的行为进行较全面的考察,我们有选择地研究了控制参数沿该空间中几条轨线变化时系统行为的演化。

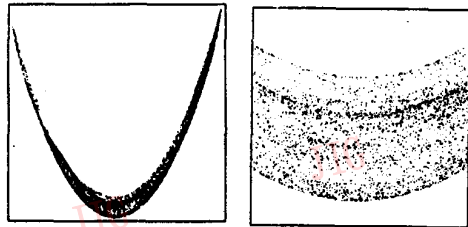


(a) $\lambda = 0.79$ (b) $\lambda = 0.80$ (c) $\lambda = 0.815$ (d) $\lambda = 0.845$

图1 二维 Logistic 映射的相图(横纵坐标分别为 x_n 和 y_n , 控制参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \gamma = 0.1$)

第一条轨线为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in [0.60, 0.90], \gamma = 0.1$, 选取初始点 $(x_0, y_0) = (0.10, 0.11)$ 。 $\lambda = 0.60$ 时,系统趋向于相平面的一个稳定不动点; λ 增加到 0.69 时,相平面给出了 2 个稳定不动点; λ 再增加到 0.787 时, 2 个不动点失稳,新的稳定状态是围绕着原有 2 个不动点的 2 个极限环(图 1(a)); $\lambda = 0.80$ 时, 2 个极限环增大变形(图 1(b)); λ 从 0.81 增加到 0.815 时,进一步分岔发生了,相平面出现了奇怪吸引子(图 1(c)); λ 继续增加到 0.84 时,系统又出现了 4 周期解(图 1(d)); 最后当 $\lambda = 0.89$ 时系统出现了混沌。

不同层次的小的空隙或空洞的存在,这就使吸引子具有无穷层次的自相似结构。



(a) (b)

图2 相空间重构法得到的二维 Logistic 映射的相图(横纵坐标分别为 y_n 和 y_{n+1} , 控制参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0.9, \gamma = 0.1$, 其中(b)为(a)最下部分的局部放大)

图2是用相空间重构法得到的二维 Logistic 映射的奇怪吸引子。观察图 1(c)和图 2 可见奇怪吸引子具有如下特点:

(1)从整体说,系统是稳定的,即吸引子外的一切运动最后都要收缩到吸引子上;但就局部说,吸引子内的运动又是不稳定的,即吸引子外的一切运动最后都要收缩到吸引子上;但就局部说,吸引子内的运动又是不稳定的,相邻运动轨道要互相排斥而按指数分离;

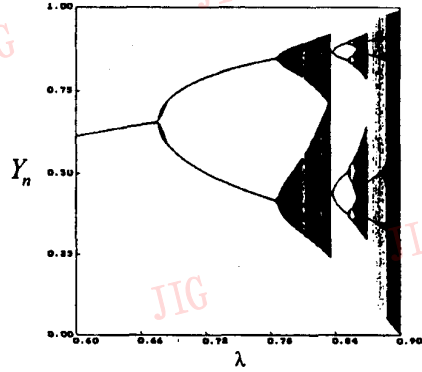
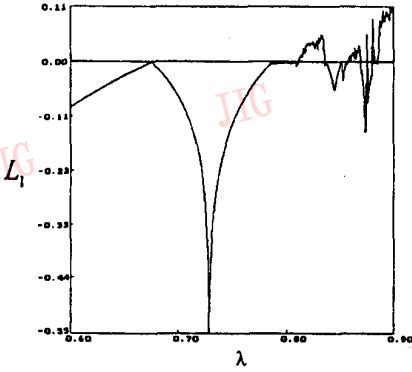
(2)奇怪吸引子不一定填满某有限区域,而往往具有一些空隙或空洞,除了这些大的空洞外,还有

(3)与简单吸引子不同,不断的分开和折叠使奇怪吸引子的运动依赖于初始条件。即初始条件不同,同一吸引子的轨道截然不同。图 3 进一步证实了上述的分岔过程,可见它是按周期行为与混沌现象交替出现的间歇突发通向混沌的,其为途径③的典型代表,具该间歇性与 Hopf 分岔有关^[4]。这条道路已为理论和实验所证实^[5]。

当控制参数 λ_1, λ_2 相差较大且其中一个较小

时,我们研究了 $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.2$ 且 $\gamma \in [0.00, 0.45]$ 时系统行为的演化规律,由图 4(a)可见随参数 γ 的增加,分岔图递次出现周期倍化现象且当 $\gamma = 0.31$ 时系统出现混沌,因此系统通往混沌的道路为途径①。作为中间情况,研究了 $\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.3$ 且 $\gamma \in [0.10, 0.54]$ 时系统行为的演化,由图 4(b)可

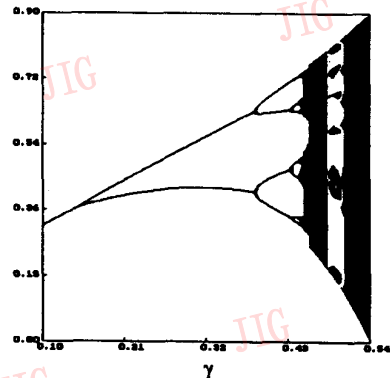
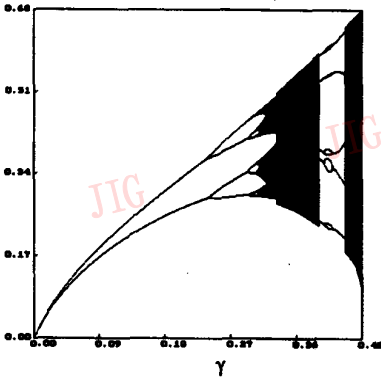
见随参数 γ 的增加,分岔图经 Hopf 分岔在 $\gamma = 0.45$ 时系统进入混沌,此时系统通往混沌的道路为途径②。同时上述 2 种情况的混沌区都存在较大的周期窗口。即从大范围来看系统通往混沌的道路为途径③。



(a) Lyapunov 指数图

(b) 分岔图

图3 二维 Logistic 映射的控制参数为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in [0.60, 0.90], \gamma = 0.1$



(a) $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.2$ 且 $\gamma \in [0.00, 0.45]$

(b) $\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.3$ 且 $\gamma \in [0.10, 0.54]$

图4 不同控制参数时二维 Logistic 映射的分岔图

2 二维 Logistic 映射中的分形

分形几何是由著名数学家 Mandelbrot 在 70 年代首先提出的,它的提出给出一种描述具有随机形态特征及无穷细节的自然现象的新的更准确的几何模型^[6],因此分形几何可以用来有效地描述在混沌运动中所出现的奇怪吸引子这类复杂的图形。

利用逃逸时间算法^[7],本文构造了二维 Logistic 映射的分形图。具体方法是:对于复平面内某一区域中各点 $Z(0) = x + iy$ 依次按(3)式进行迭代。若

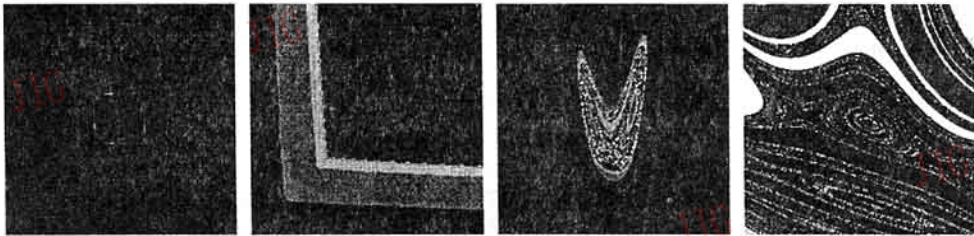
是 $Z(n)$ 的模 $|Z(n)|$ 大于某一预置数 R 时 ($R = 1000$),记该点 $Z(0)$ 的迭代次数为 n ,中止该点迭代,转到下一点,如在 N 次(如 $N = 256$)迭代后, $Z(N)$ 的模仍不超过 R ,则认为该点属于有限吸引域,着以黑色,也中止迭代,转到下一点,直到整个区域迭代结束。根据各点的迭代次数 n 分别着以相应的颜色,就得到了二维 Logistic 映射的彩色分形图(如图 5 所示),它相当于复常数 $c = 0$ 时的二维 Logistic 映射的广义 Julia 集。

由图 5 可观察到:(1)分形图的黑色有限吸引域以外蜿蜒曲折地环绕着各类带状彩色区域,称之为

等势带。(2)当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时(图 5(a)),分形图的有限吸引域是连通的且关于直线 $y = x$ 成轴对称。由于计算机精度所限,此时所观察到有限吸引域的边界似乎并不具有分形结构,但提高放大倍率,我们将会看到分形的结构(图 5(b))。正如由复映射 $f(z) = z^2 + c$ 构造 Julia 集一样,当 $c = 0$ 时,Julia 集为单位圆,没有分形的边界;当 $c \rightarrow 0$ 时,Julia 集的边界就具

有精细的分形结构,虽然在低倍率的情况下精细的分形结构看不到。当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时(图 5(b)),分形图的有限吸引域不再连通且不具有对称性。(3)根据图 5(b)和(d)的局部放大,可知分形图的有限吸引域和等势带交界线是光滑的,并具有分形性质。

关于对称性的证明如下:



(a) 控制参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0.815, \gamma = 0.1$ (b) 图(a)有限吸引域左下角处的局部放大,放大倍数为 1000 (c) 控制参数 $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.2$ 且 $\gamma = 0.6$ (d) 图(c)含有限吸引域左下角处的局部放大,放大倍数为 1000

图 5 二维 Logistic 映射的分形图

定理 1 令 $z_n = x_n + y_n i$, 记 $z_n^* = y_n + x_n i$ 。则二维 Logistic 映射式(3)可表示为 $z_{n+1} = f(z_n)$, 由它所构造的广义 Julia 集, 当控制参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 时, 有 $[f^k(z_n)]^* = f^k(z_n^*)$ 。

证明: 利用数学归纳法, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 时, 由式(3)可知 $f^*(z_n) = f(z_n^*)$ 。

$$\begin{aligned} \text{设 } [f^k(z_n)]^* &= f^k(z_n^*) \text{ 成立} \\ \therefore [f^{k+1}(z_n)]^* &= [f^k[f(z_n)]]^* \\ &= f^k[f(z_n)]^* = f^k[f^*(z_n)] \\ &= f^k[f(z_n^*)] = f^{k+1}(z_n^*) \end{aligned}$$

即 $[f^{k+1}(z_n)]^* = f^{k+1}(z_n^*)$ 。故命题成立。

该定理说明当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 时, 式(3)的广义 Julia 集关于直线 $y = x$ 成轴对称。反之, 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, 式(3)的广义 Julia 集不具有对称性。

3 结 论

(1)在参数空间考察定常的运动状态, 系统往往要在参数变化过程中先经历一系列周期制度, 然后进入混沌, 构成所谓“通向混沌的道路”。掌握这些通向混沌的周期制度的规律, 有助于理解最终的混沌状态的性质。二维 Logistic 映射, 当控制参数沿参数空间中不同的路径改变时, 可分别通过 Pomeau-Manneville 途径、Ruelle-Takens-Newhouse 方案和

Feigenbaum 途径走向混沌, 且在控制参数空间中的较大区域, 其通向混沌的道路与 Hopf 分岔有关, 在这些途径上可观察到锁相和准周期运动。

(2)混沌是由决定论方程得到的具有随机性的时间上的非周期过程。分形则是空间中的结构或图形, 其成长过程固然也遵从一些决定论方程, 但同时其自身还遵从随机性规律, 这是两者不同之处。然而混沌与分形也有一些共同之处: ①它们都是非线性方程所描述的非平衡过程及其结果; ②混沌运动的随机性与初始状态的涨落密切相关, 分形结构的具体形状或其无规性也密切与初始状态的涨落有关; ③混沌运动的奇怪吸引子和分形结构都具有自相似性。实际上, 混沌运动也就是具有不同时间标度的无规自相似性。这种自相似性表明两者都具有标度不变性或标度对称性, 即它们没有特征时间或特征长度, 或者说改变测量单位或标度时, 其结果不变。因此如果把混沌广义地看做是具有自相似性的随机过程和结构, 则分形也可看做是一种空间混沌。反之, 由于混沌运动具有在时间标度上的无规自相似性, 它也可看做是时间上的分形。由此还可以看出, 无论是混沌还是分形, 从它们具有自相似性结构看, 它们并不是完全随机无序的, 而在一定程度上是有序的, 只是不是周期性有序, 即混沌不是时间上的周期性有序, 分形不一定是空间上的周期性有序。

(3)其实研究二维 Logistic 映射中的混沌与分形

并不是“目的”。混沌与分形是普遍存在于自然界和数学模型中的一类客观现象,既有普适性质的种种表现,也必然在不同条件下具有特殊性。这里重要的是用对二维 Logistic 映射的混沌与分形研究中新概念武装起来,去推断这些结果的含义,以便与实际的物理模型相联系,进一步去预测更复杂的高维动力学系统的性态,从而丰富非线性动力学的内容。

参考文献

1 May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 1976, 261: 459 ~ 467.



王兴元 1964年生。先后于1987年、1992年毕业于天津大学物理系,获学士和硕士学位。现为东北大学信息科学与工程学院讲师,计算机科学理论专业博士研究生。已发表论文20余篇。主要研究方向为混沌和分形理论及其在生物医学工程上的应用。



朱伟勇 1938年生,民盟中央委员,东北大学教授,博士生导师。已发表论文60余篇,主编学术专著5部。现为中国现场统计研究会副理事长,国际泛华统计协会终身会员,辽宁省政府专家顾问团成员。

- 2 Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Lect. Notes in Math.*, 1981, 898: 366 ~ 381.
- 3 Eckmann J P. Roads to turbulence in dissipative dynamics system. *Rev. Mod. Phys.*, 1981, 53: 643 ~ 649.
- 4 Sakaguchi H, Tomita K. Bifurcation of the Couple Logistic Map. *Progress of Theoretical Physics*, 1987, 78(2): 305 ~ 309.
- 5 王兴元,朱伟勇. 二维 Logistic 映象的吸引子演化. *东北大学学报(自然科学版)*, 1997, 18(4): 417 ~ 420.
- 6 Peitgen H O, Saupe D. *The science of fractal images*. Berlin: Springer-Verlag, 1988, 150 ~ 168.
- 7 曾文曲,王向阳. *分形理论与分形的计算机模拟*. 沈阳: 东北大学出版社, 1993, 106 ~ 133.

Researches on Chaos and Fractal of the Coupled Logistic Map

Wang Xingyuan

(The School of Information Science and Engineering of Northeastern University, Shenyang 110006)

Zhu Weiyong

(The Computer Center of Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract In this paper, we analyze some general features of the nonlinear dynamic activities of the Coupled Logistic Map. We find that, for the difference of the selected values of the three control parameters, chaotic patterns of the Coupled Logistic Map may emerge out of Feigenbaum route, the Ruelle-Takens-Newhouse Scenario and Pomeau-Manneville route respectively. However, there exist large regions of control parameter space where the approaches to chaos have something to do with Hopf bifurcation and we can observe phase locking and quasiperiodic motion on these routes. At the same time, the researches on the fractal images of the Coupled Logistic Map make it clear that when the control parameters are different, the fractal images are different from each other and these fractal images exhibit the fractal property of self-similarity.

Keywords Coupled Logistic Map, Chaos, Fractal