

GIS 中平面线位误差带的可视化表达

戴洪磊

(武汉测绘科技大学, 武汉 430070)

吴守荣 徐泮林 郭金运

(山东矿业学院, 泰安 271019)

摘要 通过综述 GIS 中平面线位误差带的发展历程, 根据求解曲线族包络线的原理, 建立了描述随机线元位置不确定性的误差带“g—带”边界曲线方程的计算通式, 从图形角度详细阐述了“g—带”的形成、形状确定, 并给出不同实例的“g—带”可视化图形, 直观地向用户展示了线位整体不确定性的区域范围。

关键词 线元 “g—带” 边界线 包络线

0 引言

在矢量 GIS 中, 作为基本要素之一的平面线段常作为一个基元参与 GIS 的叠置操作, 因此有必要研究线段基元作为一个整体的定位不确定性度量指标。这方面的研究是利用“带”的概念展开的, 现已由美国 Chrisman 的“ ϵ —带”^[1], 德国 Caspary 等人的“e—带”^[2]扩展到 Shi 的“s—带”^[3]。但以上研究的数学基础是离散型随机变量, 所以 1995 年, 刘文宝博士首次基于随机过程理论从连续观点提出广义误差带“g—带”(general error band)模型^[4]。本文在分析“g—带”概念的基础上, 论述了“g—带”的几何构成、形状确定、边界曲线方程以及可视化图形。

1 现有误差带分析

1.1 “ ϵ —带”

1956 年美国学者 Perkal 首次提出“ ϵ —距离”概念^[5], 直到 1982 年, Chrisman 首次提出用“ ϵ —模型”作为线元位置不确定性的度量指标。此后, 经过 Blakemore(1984)和 Yoeli(1984)等人的努力, 逐步形成了度量线位不确定性的“ ϵ —带”指标。“ ϵ —带”是一种几何图形, 认为任何线要素的真正位置都落在以量测线段为中心, 宽为 ϵ 的区域内, 如图 1, 其中

ϵ 值由人为确定。

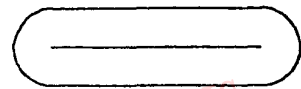


图 1 “ ϵ —带”

1.2 “e—带”

经研究发现, “e—带”并不是等宽的平行区域, 而是中间窄, 两端宽的哑铃型, 如图 2 所示。于是德国学者 Caspary 在 1992 年正式起用误差带“e—带”概念^[2]。它虽能较真实地反映线段基元的定位不确定性, 但它是在很强的前提假设下, 并且其形状难于确定, 所以至今为止, 仍没有“e—带”完整的描述性分析。

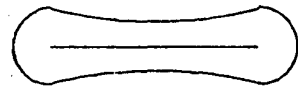


图 2 “e—带”

1.3 “s—带”

1994 年, Shi W Z 博士首次将只能度量位置不

* 国家自然科学基金资助项目(No. 39270219)

收稿日期: 1998-03-20; 收到修改稿日期: 1998-06-05

确定性的“e—带”扩展到也能度量专题不确定性的“s—带”模型^[3],如图3所示,它被称为连接两种基本不确定性的桥梁。但该模型的前提是假设定位不确定性与专题不确定性是独立的,最大的局限是不利于不确定性结果的定量分析。

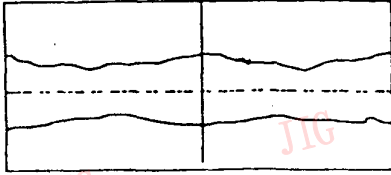
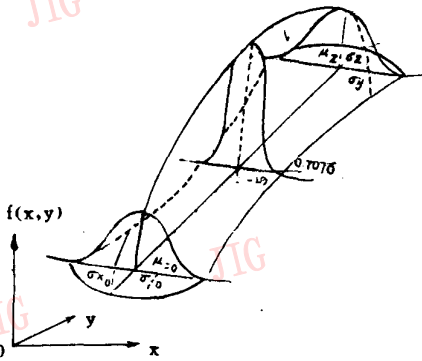


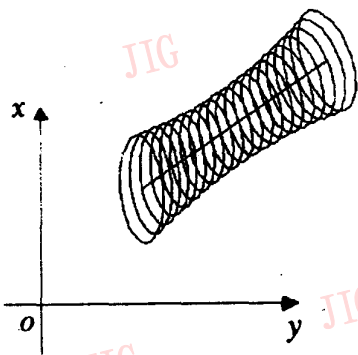
图3 “s—带”

1.4 “g—带”

文献[4]表明,由服从正态分布的端点 $Z_0(x_0, y_0)$ 和 $Z_1(x_1, y_1)$ 定义的随机线元 Z_0Z_1 服从参数单一的随机过程,其概率密度图象是平面点元密度函数图象的扩展,如图4(a)所示。



(a) 线元分布密度图象



(b) “g—带”

图4

方法,用一平行于 xoy 的平面 $f(x, y) = \lambda$ 截图4(a)中线元 Z_0Z_1 的概率密度图象,并将截线投影到平面 xoy 上,则截线所构成区域定义为线元误差带“g—带”,如图4(b)所示,它是由线元上无数个点的点位误差椭圆相互叠加而成。

2 “g—带”的可视化表达

2.1 “g—带”边界曲线方程

2.1.1 点位误差椭圆的上、下包络线

由“g—带”的构成知,可以利用线元上所有点的误差椭圆族的包络线来推求“g—带”的边界曲线方程表达式。

由文献[7]知,用于度量随机线元 Z_0Z_1 上任意点 $Z_i(x_i, y_i)$ 在任意方向上的位差计算公式如下

$$\sigma_\varphi^2 = (1-t)^2(\sigma_{x_0}^2 \cos^2\varphi + \sigma_{x_0y_0} \sin 2\varphi + \sigma_{y_0}^2 \sin^2\varphi) + t^2(\sigma_{x_1}^2 \cos^2\varphi + \sigma_{x_1y_1} \sin 2\varphi + \sigma_{y_1}^2 \sin^2\varphi) + 2t(1-t)[\sigma_{x_0x_1} \cos^2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi(\sigma_{x_1y_2} + \sigma_{x_2y_1}) + \sigma_{y_1y_2} \sin^2\varphi] \quad (1)$$

通过将式(1)对 φ 求导,并令 $\frac{d(\sigma_\varphi^2)}{d\varphi} = 0$,可以获得线元上任意点的误差椭圆参数,即长轴 A 、短轴 B 和极大值方向 φ ,具体计算式见文献[8]。

根据包络线的定义及求解原理^[9],首先将坐标系 xoy 进行平移和2次旋转至新坐标系 $x''o''y''$ (平移参数为 (x_i, y_i) ,旋转参数分别为 φ 和 θ (θ 为线元的水平角)),如图5所示。此时,原点位于线元 Z_0Z_1 上任意一点 $Z_i(x_i, y_i)$ 处, y'' 轴与线元 Z_0Z_1 方向一致。利用误差椭圆参数 A, B 和 φ ,可得在坐标系 xoy 下的误差椭圆方程为

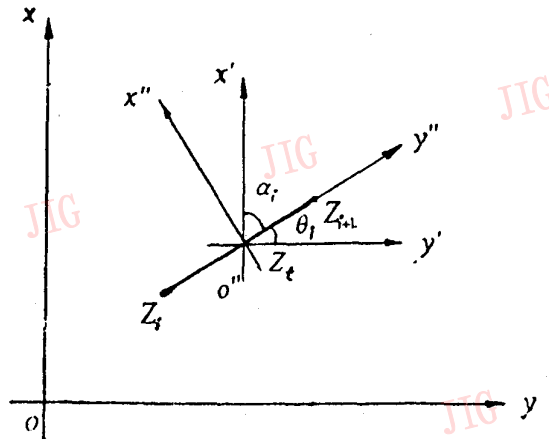


图5 坐标系的平移和旋转

类似于文献[6]中定义二维随机点误差椭圆的

$$a(X'')^2 + 2bX''Y'' + c(Y'')^2 = \lambda^2 B_i^2 \quad (2)$$

其中 $a = \sin^2(\varphi + \theta) + e\cos^2(\varphi + \theta)$,

$$b = (e - 1)\sin(\varphi + \theta)\cos(\varphi + \theta),$$

$$c = \cos^2(\varphi + \theta) + e\sin^2(\varphi + \theta),$$

$$e = B/A,$$

$$k = \frac{b_i \sin \theta_i - c_i \cos \theta_i}{b_i \cos \theta_i + c_i \sin \theta_i}.$$

显然,在新坐标系 $x''o''y''$ 下,误差椭圆族的包络线就是误差椭圆极值点在 $t \in [0, 1]$ 上的运动轨迹。通过对式(2)求导,得单一线元 Z_0Z_1 在新坐标系 $x''o''y''$ 下通过误差椭圆的极值线方程为

$$bX'' + cY'' = 0 \quad (2)$$

联立式(2)和(3),可以解得误差椭圆的极大、极小点的运动轨迹方程,即误差椭圆族的上、下包络线为

$$\text{上包络线: } \begin{cases} X'' = \lambda A \sqrt{c} \\ Y'' = -b\lambda A \sqrt{1/c} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{下包络线: } \begin{cases} X'' = -\lambda A \sqrt{c} \\ Y'' = b\lambda A \sqrt{1/c} \end{cases}$$

2.1.2 “g-带”边界曲线方程

如图6所示,可将线元 Z_0Z_1 的“g-带”边界曲线方程分为4个部分:其中 $x = f_1(y)$ 和 $x = f_2(y)$ 分

$$f_1(y): \begin{cases} x = x_t + X''_t \cos \theta + Y''_t \sin \theta \\ y = y_t - X''_t \sin \theta + Y''_t \cos \theta \end{cases} \begin{cases} X''_t = \sqrt{A_t^2 c_t} \\ Y''_t = -b_t \sqrt{\frac{A_t^2}{c_t}} \end{cases} \quad 0 < t < 1 \quad (5)$$

$$f_2(y): \begin{cases} x = x_t + X''_t \cos \theta + Y''_t \sin \theta \\ y = y_t - X''_t \sin \theta + Y''_t \cos \theta \end{cases} \begin{cases} X''_t = -\sqrt{A_t^2 c_t} \\ Y''_t = b_t \sqrt{\frac{A_t^2}{c_t}} \end{cases} \quad 0 < t < 1 \quad (6)$$

$$f_3(y): \begin{cases} u_0[f_3(y) - x_0]^2 + 2v_0[f_3(y) - x_0](y - y_0) + w_0(y - y_0)^2 = \lambda^2 B_0^2 \\ f_3(y) \leq x_0 + R_0(y - y_0) \end{cases} \quad \text{在端点 } Z_0 \text{ 上} \quad (7)$$

$$f_4(y): \begin{cases} u_1[f_4(y) - x_1]^2 + 2v_1[f_4(y) - x_1](y - y_1) + w_1(y - y_1)^2 = \lambda^2 B_1^2 \\ f_4(y) \geq x_1 + R_1(y - y_1) \end{cases} \quad \text{在端点 } Z_1 \text{ 上} \quad (8)$$

式(5)~(8)完整地构成了“g-带”的边界曲线分段函数方程,其中 R_0, R_1 代表通过两端点 $Z_0(x_0, y_0)$ 和 $Z_1(x_1, y_1)$ 的极值线方程的斜率。

2.2 “g-带”边界曲线分段函数的连续性

由上面的分析可知,“g-带”的边界曲线方程是由2个隐式方程和2个参数方程共4个分段函数构成,因此需要分析曲线方程函数在分段点处的连续性。

别为误差椭圆族的上、下包络线,它们描述了线元 Z_0Z_1 上任意点 $Z_t(x_t, y_t)$ 的误差椭圆的极大、极小点在 $t \in (0, 1)$ 上的运动轨迹;而 $x = f_3(y)$ 和 $x = f_4(y)$ 则为两端点上误差椭圆的一部分。

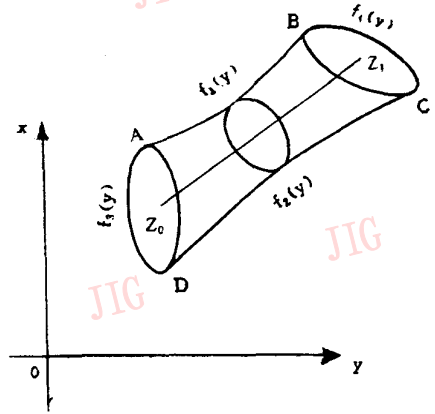


图6 “g-带”边界方程

由上面的推导可得“g-带”的边界曲线方程如下:

如图5,对于A点,左侧 $x = f_3(y)$ 是 Z_0 点误差椭圆的一部分,A点为 $x = f_3(y)$ 曲线的末点,由于误差椭圆本身是连续的,即 $x = f_3(y)$ 在A点左连续;现在只需证明 $x = f_1(y)$ 在A点右连续,且左右函数极限值相等即可。

由函数 $x = f_3(y)$ 求得椭圆上点 $A(x_A, y_A)$ 处的坐标值为

$$x_A = x_0 + \sqrt{A_0^2 c_0} \cos \theta_0 - b_0 \sqrt{\frac{A_0^2}{c_0}} \sin \theta_0 \quad (9)$$

$$y_A = y_0 - \sqrt{A_0^2 c_0 \cos \theta_0} - b_0 \sqrt{\frac{A_0^2}{c_0} \sin \theta_0}$$

而由函数 $x=f_1(y)$ 式,判断当 $t \rightarrow 0$ 时, A 点的极限值为

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = x_0 + \sqrt{A_0^2 c_0 \cos \theta_0} - b_0 \sqrt{\frac{A_0^2}{c_0} \sin \theta_0} = x_A \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = y_0 - \sqrt{A_0^2 c_0 \cos \theta_0} - b_0 \sqrt{\frac{A_0^2}{c_0} \sin \theta_0} = y_A$$

由于函数 $x=f_1(y)$ 是误差椭圆族的包络线,本身在 A 点处是右连续的^[9],而函数 $x=f_3(y)$ 在 A 点左连续,并且由式(9)、(10)知 $\lim_{f_1(y) \rightarrow A^+} f_1(y) =$

$\lim_{f_3(y) \rightarrow A^-} f_3(y)$,即左右函数极限值相等,根据函数在一点处的连续性定义^[10],可知“g一带”的边界曲线分段函数 $x=f_3(y)$ 和 $x=f_1(y)$ 在断点 A 处是连续的。

类似可证;在 B, C, D 各点处,边界曲线函数也都是连续的。因此,“g一带”的边界是一条连续闭合曲线。

2.3 “g一带”形状特征讨论

由文献[7]中的具体算例分析知,在线元上某一点处,其精度最高,点位方差存在最小值,记为 $(\sigma^2)_{\min}$,则称由 $(\sigma^2)_{\min}$ 决定的误差椭圆为线元上的临界误差椭圆。故“g一带”的形状和大小可由线元端点 Z_0 和 Z_1 处的误差椭圆和临界误差椭圆确定。记临界误差椭圆在 t_r 处取得,将式(1)对 t 求导,并令 $d(\sigma_p^2)/dt=0$,解得:

$$t_r = \frac{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{y_1}^2}{(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{y_1}^2) + (\sigma_{x_2}^2 + \sigma_{y_2}^2)} = \begin{cases} < 1/2 & \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \\ = 1/2 & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ > 1/2 & \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \quad (11)$$

由上述 3 种情况可知,当两端点的点位精度相同时,临界误差椭圆位于线元中间点处;当线元 $Z_0 Z_1$ 两端点的点位精度不等时,临界误差椭圆总是位于距点位精度较高的线元端点近一些,如图 7 示。

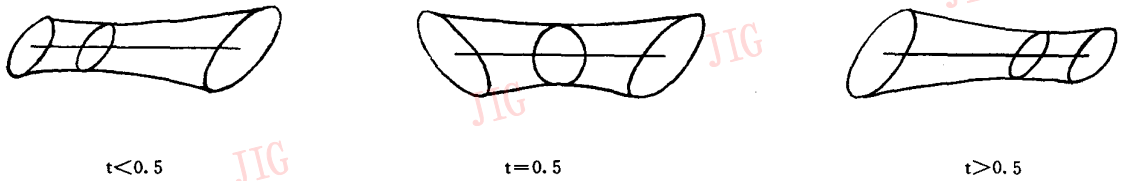
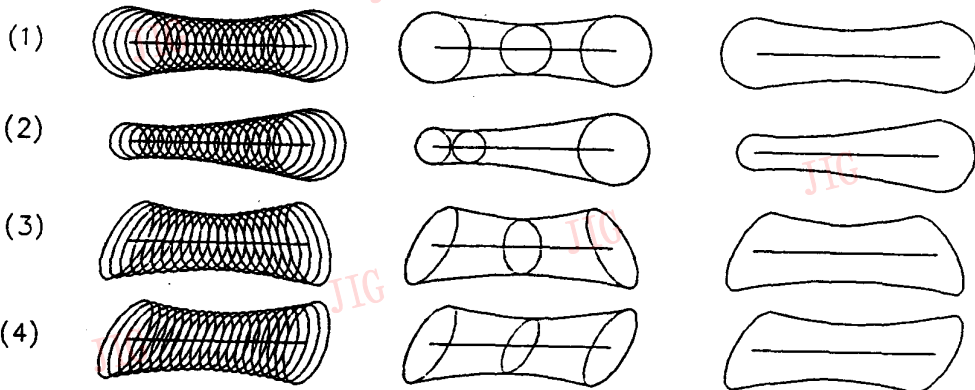


图 7 “g一带”临界误差椭圆位置分析图

3 算例分析

如图 8 所示,本算例针对不同的线段,在已知线

段 $Z_0 Z_1$ 两端点 $Z_0(x_0, y_0)$ 和 $Z_1(x_1, y_1)$ 的坐标值和初始误差状态的前提下,分析其在四种误差状态下的“g一带”可视化图形。



(a) 点位误差椭圆

(b) 端点及临界误差椭圆

(c) 线位误差带边界曲线

图 8 线元 4 种状态下的线位误差环

图8中,(a)为4种误差状态下线段 Z_0Z_1 上各自的21个误差椭圆;(b)为由方程(5)~(8)绘出的“g-带”边界曲线;(c)为线段两端点及临界点处的误差椭圆图。其中:(1)均匀各向同性线段,即两端点的误差状态完全一致,且具有旋转、平移不变性;(2)各向同性线段,两端点精度不同,但具有旋转不变性;(3)任意随机线段;(4)均匀性线段,即两端点的误差椭圆主轴方向一致,平移不变性。

参考文献

1 Chrisman N R. Methods of spatial analysis based on error in categorical maps. PhD Thesis, University of Bristol, 1982a.
 2 Caspary W, Scheuring. Error-bands as measures of geometrical accuracy. Proceeding of EGIS'92 1992, 226~233

3 Shi Wenzhong. Modelling Positional and Thematic Uncertainties in Integration of Remote Sensing and GIS. ITC Publication, 1994, 22: 147.
 4 刘文宝. GIS空间数据的不确定性理论[学位论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1995.
 5 Perkal J. On epsilon length. Bulletin de I/ Academie Polonaise des Sciences, 1956, 4: 399~403.
 6 於宗涛, 鲁林成. 测量平差基础. 北京: 测绘出版社, 1983
 7 戴洪磊, 徐泮林, 卢秀山. GIS叠置前后同名线元的方差估计. 武汉测绘科技大学学报, 1998, 23(1): 14~17.
 8 戴洪磊. 矢量GIS中位置不确定性的度量 and 传播[硕士论文]. 泰安: 山东矿业学院, 1998.
 9 冯德坤, 马香峰. 包络原理及其在机械方面的应用. 北京: 冶金工业出版社, 1994.
 10 数学手册编写组. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 1984



戴洪磊 1994年毕业于山东矿业学院, 获工程测量学士学位, 1998年获硕士学位, 现为东南大学交通学院在读博士, 从事GIS数据质量研究。



吴守荣 获天津大学系统工程硕士, 山东矿业学院系统工程研究所, 副教授。长期从事系统工程及计算机应用教学与研究工作。

Visul Display on Planar Line's Error Band in GIS

Dai Honglei

Wu Shourong Xu Panlin Guo Jinyun

(Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, Wuhan 430070)

(Shangdong mining institute, Taian 271019)

Abstract Based on the synthetic analysis of the planar error band's development in GIS, the paper derives the general boundary curve's formula of the "g-band" on the random line segment's positional uncertainty by means of the envelop theory, analyses the configuration, shape decision and the "g-band" visual figure according to different examples, display the error region size of the line segment's integral positional uncertainty to the users.

Keywords Line segment, "g-band", Boundary curve, Envelop