

空间曲线的圆弧样条插值

张三元 蒋方炎

(浙江大学计算机科学与工程系, 杭州 310027)

摘要 给出了仅用圆弧/直线来插值三维空间曲线的一种方法, 该方法对空间曲线没有任何限定性要求, 非常稳定可靠。无论是闭曲线还是开曲线, 都能达到整体 G^1 连续。

关键词 空间曲线 圆弧样条 连续 空间闭曲线

0 引言

空间曲线的造型在计算机辅助设计和图形学领域有着十分重要的意义, 如一般曲面的交线, 管状曲面的轴心线, 计算机动画中的各种变形曲线等都是典型的空间曲线。空间曲线一般也可用 Bezier 曲线或 B 样条曲线来进行造型, 如果能用圆弧样条对空间曲线造型, 则象平面曲线一样, 会有许多优点。圆弧样条被广泛地应用于平面曲线的插值^[1-6]。与常用 Bezier 曲线或 B 样条曲线相比, 虽然在图形显示方面二者没有本质的区别, 但在曲线加工方面, 圆弧的机械加工容易进行, 而 Bezier 曲线或 B 样条曲线加工起来就比较困难。如凸轮的设计, 其轮廓线就只能采用圆弧样条。另外一点就是圆弧样条曲线可以精确地计算弧长, 而 Bezier 曲线或 B 样条曲线的弧长计算则比较困难。而精确的弧长计算在一些应用领域是非常重要的, 例如要对曲线的弧长进行均匀分割, 在计算机动画中要求保持曲线弧长不变等。空间曲线如果能用圆弧样条进行插值, 则易于加工和精确弧长计算等优点同样能够保持下来。J. Hosckek 研究了平面曲线圆弧样条在插值, 对空间曲线的插值也作了简单的分析, 在两点之间, 用两段或三段圆弧进行连接。本文在两点之间仅用一段圆弧来连接, 因此可节省一半的数据, 并且对闭曲线的插值进行了详细的研究。

1 两点一切线的直线与圆弧插值

给定三维空间的两点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2 =$

(x_2, y_2, z_2) , 以及在 P_1 点的切向 $T_1 = (TX, TY, TZ)$, 如果 T_1 与过 P_1 和 P_2 的直线平行, 则显而易见 P_1 和 P_2 之间用直线插值就能满足要求, 否则, 设 π 是 P_1 和 P_2 以及过 P_1 的切线 T_1 的平面, 在平面 π 上构造一段圆弧 C_1 通过 P_1 和 P_2 , 并且使 C_1 在 P_1 点以 T_1 为切线, 设 C_1 圆心为 O , 半径为 R , 圆心角为 ω , 如图 1 所示:

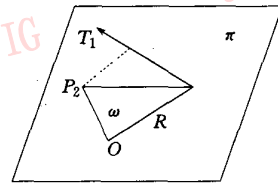


图1 由两点一切线构造一段圆弧

首先在平面 π 上建立一个局部坐标系, 令 $dx = x_2 - x_1, dy = y_2 - y_1, dz = z_2 - z_1$, 不难求出平面 π 的方程为: $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中:

$$A = \begin{vmatrix} TY & TZ \\ dy & dz \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} TZ & TX \\ dz & dx \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} TX & TY \\ dx & dy \end{vmatrix},$$

$D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$, 在平面 π 上建立直角坐标系, 以 $z' = 0$ 对应平面 π , 以过 P_1 的切线 T_1 为 y' 轴, 则 $y' = 0$ 在整体坐标下所对应的平面方程为: $TXx + TYy + TZz + TD = 0$, 其中 $TD = -(TX \cdot x_1 + TY \cdot y_1 + TZ \cdot z_1)$, 同理可得到 $x' = 0$ 整体坐标下所对应的平面方程为: $Ex + Fy + Gz + H = 0$, 其中:

$$E = \begin{vmatrix} TY & TZ \\ B & C \end{vmatrix}, F = \begin{vmatrix} TZ & TX \\ C & A \end{vmatrix}, G = \begin{vmatrix} TX & TY \\ A & B \end{vmatrix},$$

$H = -(Ex_1 + Fy_1 + Gz_1)$, 至此可以得到局部坐标与整体坐标的变换公式为:

$$\begin{cases} x' = \frac{Ex + Fy + Gz + H}{\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0 \\ y' = \frac{TXx + TYy + TZz + TD}{\sqrt{TX^2 + TY^2 + TZ^2}} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0 \\ z' = \frac{Ax + BY + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0 \end{cases} \quad (1)$$

为方便以后的运算,可以将式(1)写成矩阵形式, $(x', y', z')^T = M(x, y, z)^T + (x_0, y_0, z_0)^T$, 其中 $M = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 是一个三阶正交矩阵。通过公式(1), P_1, P_2 和 T_1 转换成平面 π 上的点 P'_1, P'_2 和 T'_1 将设 $T = P'_2 - P'_1$, π 是 T 与 T'_1 的有向夹角, $d = |P'_2 - P'_1|$, 则有 $R = \frac{d}{2\sin\alpha}$, $\bar{\omega} = 2\alpha$, 设 P'_1 和 P'_2 在平面 π 上的坐标分别为 (x'_1, y'_1) 和 (x'_2, y'_2) , 令 $\Delta x = x'_2 - x'_1, \Delta y = y'_2 - y'_1$, 则 O 点在平面 π 上的坐标为 (x'_0, y'_0) , 其中 $x'_0 = \frac{1}{2}(x'_1 + x'_2 + \text{ctg}\alpha * \Delta x)$, $y'_0 = \frac{1}{2}(y'_1 + y'_2 + \text{ctg}\alpha * \Delta y)$, 这样圆心、半径和起点都确定以后, 整个圆弧段就被确定, 它可用如下的局部坐标参数方程来表示:

$$\begin{cases} x_1(t) = x'_0 + R\cos t \\ y_1(t) = y'_0 + R\sin t \\ z_1(t) = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \omega) \quad (2)$$

最后, 我们得到圆弧段在整体坐标下的参数方程如下:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) - x_0 \\ y_1(t) - y_0 \\ -z_0 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq \omega) \quad (3)$$

2 三维空间有序点列的 G^1 样条插值

定义 1 设 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 是三维欧氏空间中的一点, C_1 和 C_2 是两条空间曲线, 它们的参数方程如下:

$$\begin{aligned} C_1: r_1(t) &= (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \\ C_2: r_2(s) &= (x_2(s), y_2(s), z_2(s)) \end{aligned}$$

如果它们满足如下条件:

(1) $r_1(t_0) = r_2(s_0) = P_0$

(2) P_0 是 C_1 和 C_2 的正则点, 即 $\frac{d}{dt}r_1(t)|_{t=t_0} = (x'_1(t_0), y'_1(t_0), z'_1(t_0)) \neq (0, 0, 0)$

$\frac{d}{ds}r_2(s)|_{s=s_0} = (x'_2(s_0), y'_2(s_0), z'_2(s_0)) \neq (0, 0, 0)$

(3) C_1 和 C_2 在 P_0 点的切向量夹角为零, 即 $(x'_1(t_0), y'_1(t_0), z'_1(t_0)) = k(x'_2(s_0), y'_2(s_0), z'_2(s_0))$, 其中 $k > 0$

就称曲线在 C_1 和 C_2 在 P_0 点达到 G^1 连续。

给定三维空间有序点列: P_1, P_2, \dots, P_n , 以及在 P_1 的切线 T_1 , 构造一圆弧样条通过这 n 个点, 并在 P_1 点的切线方向为 T_1 。假定 P_{i-1}, P_i 间的一段圆弧 C_{i-1} 已经构造完毕, 它的参数表示为 $(x_{i-1}(t), y_{i-1}(t), z_{i-1}(t))$, 并且 C_{i-1} 的圆心角为 ω_{i-1} , 则圆弧 C_{i-1} 在 P_i 点的切向为: $T_{i-1}^2 = (x'_{i-1}(\omega_{i-1}), y'_{i-1}(\omega_{i-1}), z'_{i-1}(\omega_{i-1}))$, 接下来构造 P_i, P_{i+1} 间的圆弧 C_i 。为了使 C_{i-1} 与 C_i 之间达到 G^1 连续, 则 C_i 在 P_i 点的切向 T_i^1 必须与 C_{i-1} 在 P_i 点的切向 T_{i-1}^2 平行, 可取 $T_i^1 = T_{i-1}^2$ 。设 P_{i-1}, P_i 和 T_{i-1}^1 构成的平面为 π_{i-1} , P_i, P_{i+1} 和 $T_i^1 (= T_{i-1}^2)$ 构成平面为 π_i , 则在平面 π_i 上就可以用第 2 节提出的方法构造圆段 C_i , 如图 2 所示:

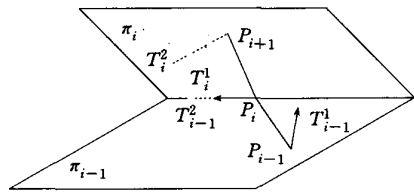


图 2 相邻两圆弧的构造

依此类推, 可以构造出一条依次通过 P_1, P_2, \dots, P_n , 且整体达到 G^1 的圆弧样条。图 3 是通过圆柱面上 16 个点的一条空间圆弧样条, 图中虚线是连接各采样点之间的折线。

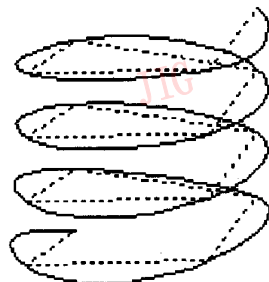


图 3 用圆弧样条插值的空间开曲线

空间圆弧样条曲线的形状与在给定在初始点的切向密切相关,怎么样确定初始切向是空间曲线造型的一个关键问题。怎么样评价一条曲线的好坏,至今还没有一个统一的标准,这里从几何直观和实际应用出发给出空间样条插值曲线的“最优”标准如下:

- (1) 曲线的长度最短。
- (2) 曲线的扭曲最小。
- (3) 曲线光滑,即相邻的圆弧的曲率半径尽可能接近。

标准(1)是几何度量标准,以它作为约束条件来构造样条曲线实现起来相当困难,这里采用(2)、(3)两条标准。为了尽可能保证在(2)、(3)标准下的曲线最优设计,初始切向的选择采用如下方式:

如果实际问题能给出初始切向,那么当然就采用这个初始切向。如果事先只知道采样点,而不知道初始切向,那么就要通过已知的采样点来计算初始切向。当然计算的方法很多,这里通过最前面的三点来计算。具体的作法是:设 P_1, P_2, P_3 是最前面的三点,它们决定的平面为 π ,则在平面 π 上过 P_1, P_2, P_3 的圆弧 C ,则通过圆弧 C 就可计算出曲线在第三点 P_3 处的切向,而无须知道 P_1 处的切向 T_1 。当然也可求出 P_1 处的切向 T_1 ,并且 T_1 满足优化条件(2)、(3),由于过 P_1, P_2 两点的曲线段与过 P_2, P_3 两点的曲线段在同一平面内,因而没有扭曲;过 $P_1,$

P_2 两点的曲线段与过 P_2, P_3 两点的曲线段在它们的公共点 P_2 处的曲率半径相同。上述图3所示的曲线的初始切向就是用这种方法得到的。

3 用圆弧样条构造空间闭曲线

在第2节构造的圆弧样中,如果给出的点列是闭的点列,在 P_1, P_2, \dots, P_n 中满足 $P_n = P_1$,一般也不能保证在 P_1 点切线与在 P_n 点的切线相同,即不能保证 $T_1^1 = T_n^2$ 。为了使闭曲线也能达到整体 G^1 连续,采用在 P_{n-1} 与 $P_n (=P_1)$ 之间加入一点或多点的方法来实现整条曲线 G^1 的连续要求。这样问题转化为给定空间两点 P_{n-1} 与 P_n 以及在这两点处的切线 $T_1 (=T_{n-1}^2), T_2 (=T_1^1)$, (一般地 T_1 与 T_2 不共面),构造成一条或多条圆弧通过 P_{n-1} 与 P_n , 并且以 T_1 与 T_2 为切线。由于一般 T_1 与 T_2 是异面直线,一段圆弧是满足不了要求的,但是两段或三段圆弧总能满足要求。设 P_{n-1}, P_n 与 T_1 构成的平面为 π_{n-1} , T_2 在 π_{n-1} 上的投影为 T'_2 , 规定两直线的夹角(记为 α) 小于 π , 则当 T_1 与 T'_2 之间的夹角为顺时针方向(为负角度)时可用两段圆弧插值 P_{n-1} 与 P_n 以及 T_1 与 T_2 , 如图4所示。则当 T_1 与 T'_2 之间的夹角为逆时针方向(为正角度)时必须用三段圆弧插值 P_{n-1} 与 P_n 以及 T_1 与 T_2 , 如图5所示。

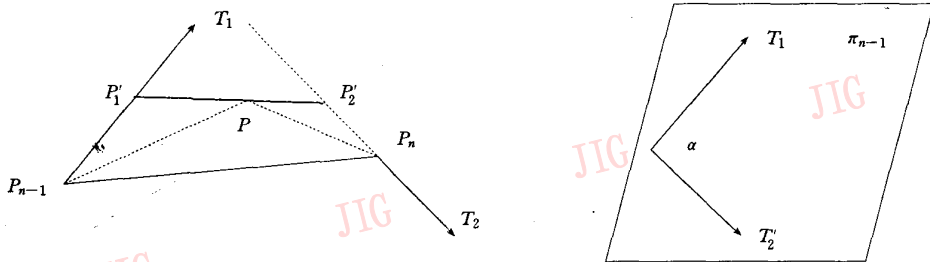


图4 α 为负时可用两段圆弧两点及两异面切线

当 T_1 与 T'_2 之间的夹角为负(见图4)时,要确定两段圆弧,必须求出中间点 P'_1, P'_2 以及 P 。设 $x = |P_{n-1}P'_1|, y = |P'_2P_n|$, x, y 必须满足方程 $x + y = |P'_1P'_2|$, 此方程是一个关于 x, y 的二次方程,且解不唯一,每一组解给出一种双圆弧插值方法。由于解的不唯一性,可以采用优化方法使得两圆弧具有某种良好性质,如(1)令 $x = y$, (2)使两段圆弧的半径的差达到最小等等,就可得到不同要求的圆弧插值。下面在不同的约束条件下过渡圆弧段的求法以及它们的性质。

设 $P_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), P_n = (x_n, y_n, z_n), T_1 = (tx_1, ty_1, tz_1), T_2 = (tx_2, ty_2, tz_2)$, 其中 T_1, T_2 是单位向量。于是有 $P'_1 = P_{n-1} + xT_1, P'_2 = P_n - yT_2$, 由 $x + y = |P'_1P'_2|$ 得到如下方程:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= |P'_1P'_2|^2 \\ &= (x_n - x_{n-1} - x \cdot tx_1 - y \cdot tx_2)^2 + \\ &\quad (y_n - y_{n-1} - x \cdot ty_1 - y \cdot ty_2)^2 + \\ &\quad (z_n - z_{n-1} - x \cdot tz_1 - y \cdot tz_2)^2 \quad (4) \end{aligned}$$

显然此方程是关于 x, y 的二次方程,其中 x, y 是正实数。从这一个方程不能解出两个未知数 x, y ,

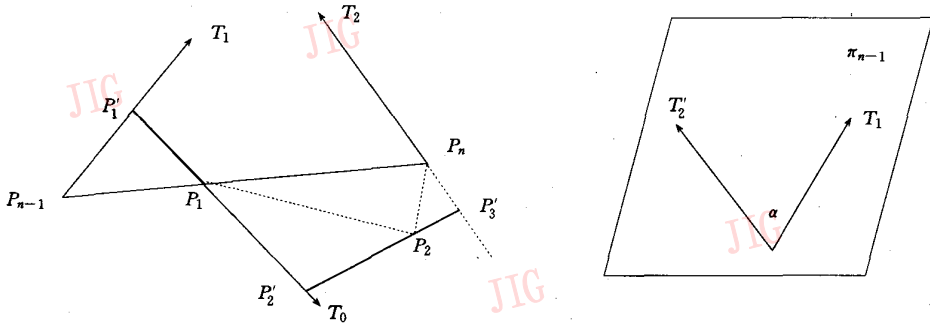


图 5 α 为正时必须用三段圆弧插值两点及此两点处的二异面切线

为了求出 x, y 必须引入某些约束条件, 分别应用上面提出的两个约束条件就得到两种不同的解。

(1) 令 $x=y$, 上述方程变成一元二次方程, 求解最简单, 这时解的几何意义是外切等腰三角形的腰相等。

(2) 使两段圆弧的半径的差达到最小, 由于 $P'_1 = P_{n-1} + xT_1, P'_2 = P_n + yT_2$ 这时 $P = \frac{y}{x+y}P'_1 + \frac{x}{x+y}P'_2$, 因此, $\Delta P_{n-1}P'_1P$ 与 $\Delta PP'_2P_n$ 的每一顶点的坐标都是关于 x, y 的函数, 令 $l_1(x, y) = |P_{n-1}P|, l_2(x, y) = |P_nP|$, 显然 $l_1(x, y)$ 是关于 x, y 的函数, 求得过 P_{n-1}, P , 并且以 T_1 为切向的圆弧 C_1 的半径 R_1 为

$$R_1(x, y) = \frac{x \cdot l_1(x, y)}{\sqrt{4x^2 - l_1^2(x, y)}}$$

同理可求得 P, P_n 并且以 T_2 为切向的圆弧 C_2 的半径 R_2 为:

$$R_2(x, y) = \frac{y \cdot l_2(x, y)}{\sqrt{4y^2 - l_2^2(x, y)}}$$

因此, 此问题的解变为以方程(4)为约束条件求解下面的最优化问题:

$$\text{mind}(x, y) = \min |R_2(x, y) - R_1(x, y)|$$

此问题是一种最简单的优化问题, 求解比较简单, 这里就不作详细说明。这种约束下的解的几何意义是样条曲线在过渡点处尽管曲率不连续, 但使其曲率半径的差尽可能小。

当 T_1 与 T'_2 之间的夹角为正(见图 5)时, 必须用三段圆弧, 先在 π_{n-1} 平面上作一个等腰三角形 $\Delta P_{n-1}P'_1P_1$, 其中 P_1 是直线段 $P_{n-1}P_n$ 之间的任意一点, P'_1 在切线 T_1 上, 这个等腰三角形 $\Delta P_{n-1}P'_1P_1$ 确定了 P_{n-1} 到 P_1 之间的一段圆弧, 同时也确定该圆弧在 P_1 点的切线 T_0 。对 P_1, T_0, P_n, T_2 , 它一定满足图 4 的条件, 因此可以用双圆弧插值。图 5 清

楚地表示了在这种情况下具体实现方法。图 6 是通过下列 9 点 $(3, 0, 0), (2, 1, 0.5), (1, 0, 1), (0, -1, 0.5), (-1, 0, 0), (0, 1, -0.5), (1, 0, -1), (2, -1, -0.5), (3, 0, 0)$ 的整体到达的 G^1 空间圆弧样条闭曲线。图中第 10 点是为了保证整体到达 G^1 连续而加入的中间点。

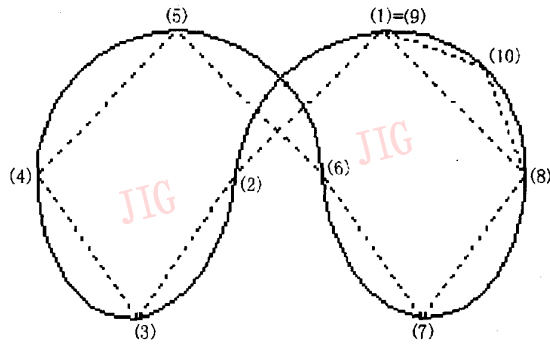


图 6 空间闭圆弧样条曲线

4 结 论

空间曲线的造型有着十分广泛的应用背景, 本文采用最简单的曲线段直线/圆弧来插值三维空间有序点列, 生成一条能达到整体 G^1 的三维空间曲线, 对曲线的形状控制和曲线的快速显示都有十分重要的意义。2D 平面点列是三维空间点列的特例, 因此平面点列也可以利用圆弧样条曲线进行插值。此思想还可推广到一些特殊曲面的造型上去, 如管状曲面造型的关键是其轴心曲线的造型, 如果轴心曲线由圆弧段组成, 则该管状曲面结构可以变得相当简单。

参 考 文 献

1 Curve fitting algorithm for rough cutting. Comput Aided Des, 1986, 18: 79~82.

- 2 Tiller W. Rational B-splines for curves and surface representation. IEEE Comput Graph Applic, 1983,3:61~69.
- 3 Fuhs W, Stachel M. Circular pipe connections. Comput & Graph, 1988,12:53~57.
- 4 Roisignae J R, Requicha A. Piecewise circular curves for geometric modeling. IBM J Res & Develop, 1987,31:296~313.
- 5 Qiu Hua, Cheng Kai, Li Yan. Optimal circular arc interpolation for NC tool path generation in curve contour manufacturing. Comput Aided Des, 1997,29:751~760.
- 6 Yeung M K, Watton D J. Curve fitting with arc splines for NC toolpath generation. Comput Aided Des, 1994,26:845~849.
- 7 Hosceck J. Circular splines. Comput Aided Des, 1992,24:611~618.
- 8 Piegl L. Defining C^1 curves containing conic segments. Comput & Graph, 1994.



张三元 1963年生,副教授,博士。
主要从事CAD、计算机图形、图象处理等
领域的研究工作。



蒋方炎 1953年生,讲师,主要从事
CAD、图形图象产品的开发推广工作。

Interpolating Space Curve with Circular Arc Spline

Zhang Sanyuan, Jiang Fangyan

(Department of Computer, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract A new method for interpolating 3D space curve with circular arc spline is introduced in this paper, the method is very robust for any 3D data sequences. The global G^1 continuity can be achieved whether the spline is open or closed.

Keywords Space curve, Circular arc spline, G^1 continuity, Closed space curve

新书推荐

《OpenGL 编程指南》

孙绍麟 费月娥 编译

全书共十二章,三个附录,16开,300页。全面、深入、详细地讨论了 OpenGL 编程中的实际问题,对 OpenGL 编程人员极具参考价值。

内容包括:绪论,绘几何对象,坐标变换,显示表,颜色,光照,混合、反走样和雾,绘象素、位图、字体和图象,纹理映射,帧缓存,鉴别器和 NURBS,选择和反馈,附录 1,2,3。

定价:48元

邮购:《中国图象图形学报》读者服务部(100088,北京海淀区花园路6号)

电话:62378784