

可逆双正交小波变换在图象压缩中的应用

闫宇松 程乾生

(北京大学数学科学学院, 北京 100871)

摘要 本文的重点在于研究双正交小波变换在图象压缩中的应用, 分析了浮点型滤波器在无失真压缩中的可行性, 同时通过对小波变换和边界问题进行的具体分析, 提供了该小波变换的另一种算法, 使之适合于快速的, 渐进性的直至无失真的图象压缩。

关键词 双正交小波变换 无失真图象压缩 可逆变换 边界误差 精度误差

0 引言

本文是在我们小波图象压缩工作中的一部分。在该工作中, 主要利用了双正交小波变换、树型量化和算术编码等方法对图象进行渐进性直至无失真压缩与解压缩。渐进性压缩对于网络传输与浏览非常重要, 而无失真压缩对于医疗与遥感也是极其关键。本文所涉及到的这种双正交小波变换可以把渐进性与无失真联系起来。

所谓无失真压缩, 指的是当原始图象被编码以后, 可以被完全重构出来。重建图象与原始图象是相同的, 没有任何损失。这就要求在图象压缩中, 不但量化方法与编码方法是可逆的, 而且小波变换也必须是可逆的, 并且这种可逆性不受计算机有限的浮点精度的限制, 真正可以在计算机中得以实现。

本文所论述的这种小波是以二的整数幂为滤波器系数的样条小波, 运算时只需加法与位移, 因而也适合于高速运算与动态图象的编码。

1 双正交小波基及其特点

具有紧支集的实正交小波基具有明显的非对称性。非对称滤波和量化所产生的量化误差容易导致边缘错位, 形成巨大的感观误差。而一些无限支集小波虽也具有对称性, 但由于支集过长, 造成计算量的过于庞大和一定的边界误差, 因而也不太适用。对于图象压缩而言, 如何取得既对称又紧支的实小波是非常重要的。

紧支集的实正交小波一般不具有对称性, 文献[1]中描述了下面的结果: 如果 ϕ, Ψ 是一个多尺度分析的尺度函数和正交小波函数, ϕ, Ψ 是实的和紧支的, 且 Ψ 有一个对称或反对称轴, 则 Ψ 一定是一个 Haar 小波。Harr 小波过于简单, 要想获得更高的压缩比, 往往需要更好的小波。

由上可知, 在子带滤波器中, 如果只使用一个实有限脉冲响应滤波器, 且不使用 Harr 小波, 对称与精确重建是不相容的。但是当使用两个 FIR 时, 也就是使用双正交小波基, 这个问题就可以克服。这也就是我们为什么寻求和使用对称双正交小波基的原因。

图 1 给出了双正交小波的分析与综合滤波过程。与正交小波不同的是, 双正交小波的重建滤波器与分解滤波器是不一样的, 它是由两个小波基构成, 分别与两个多尺度分析相联系, 因此它可以同时具有对称、紧支和实的特性。

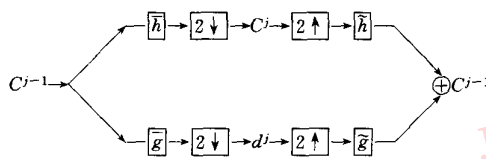


图 1 双正交小波的分析与综合滤波

如何构造双正交小波呢? Daubechies 提出了具体的构造方法^[1]。该方法基本上是按照图 1 为我们提供的路径, 经过一系列的推导, 得到了一族双正交小波。在这里所选用的是其中的 1, 3 小波, 它的小波系数如下:

$$\begin{aligned}
 h_n &: \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \tilde{h}_n &: -\frac{\sqrt{2}}{16}, \frac{\sqrt{2}}{16}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{16}, -\frac{\sqrt{2}}{16} \quad (1) \\
 g_n &= (-1)^n \tilde{h}_{-n+1} \\
 \tilde{g}_n &= (-1)^n h_{-n+1}
 \end{aligned}$$

由式(1)中公式可知,该双正交小波的滤波器系数是实对称的,且支集长度分别为2和6。该双正交小波变换与Harr小波变换相比具有明显的优点。它基本上是一种二阶预测方法。它的消失矩较大,经变换后,高频部分具有更多的零,从而为后期的量化工作提供了大量的零树结点,提高了压缩比。

2 直接利用浮点型滤波器进行无失真变换

对于图象数据而言,所有的信号都是整数,因此相应的无损变换指的是对于整型的图象数据经过正变换,再经过反变换,最后取整,数值将保持不变。而直接利用式(1)中的滤波器进行无失真变换需要克服两个障碍:边界误差和精度误差。

什么是边界误差呢?通常的小波变换,从理论上讲,都是可重建的。然而在实际问题中,由于信号的长度总是有限的,因此对于支集无限的或非对称的小波而言,在边界上做近似处理,必定会产生边界误差。但是,我们使用的这种双正交小波滤波器,其支集是有限的,系数是对称的,只要在正变换时对边界进行对称延拓,在反变换时对变换后的小波系数的边界也进行对称延拓。就可以克服边界误差,保障数据重建。

另一个障碍就是精度误差,由于每一个小波系数以及滤波器系数都是浮点型的,在计算机中不可能精确存储,都有一定的精度限制,因而导致了重建结果与原始数据具有误差。但是所幸的是图象数据

都是整型的,所以只要重建数据与原始数据误差小于0.5,就可以通过取整而精确重建。

如何保证误差小于0.5呢?这涉及到滤波器系数和变换后小波系数的精度问题。由于在实际计算过程中,滤波器系数的精度可以取得非常高,造成的误差也相对较小,因此我们只需要考虑变换后小波系数的精度问题就可以了。

假设精度值为 $\alpha < 0.5$,变换后小波系数为 C 。令

$$C' = \begin{cases} \lfloor (C + \alpha)/2\alpha \rfloor, & C > 0 \\ 0, & C = 0 \\ \lfloor (C + \alpha)/2\alpha \rfloor, & C < 0 \end{cases}$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示对 x 取整。这样, C' 就是一个整数,整型的 C' 对于后期的无损压缩是必备的。反变换的时候,令 $C'' = C' \times 2\alpha$,显然 C'' 是一个浮点数,并且满足 $|C'' - C| < \alpha$ 。对 C'' 进行小波反变换便得到了重建数据。通过对原始数据与重建数据进行比较,我们就可以算出精度误差。一般来说,当 α 值较大的时候,精度误差也相对较大,当 α 值小的时候,误差也较小。如何选取合适的 α 值,以使精度误差小于0.5,是问题的关键。

对于1,3小波,通过一定的推导,我们得到:

$$I_n = \left[8 - 7 \left(\frac{50}{64} \right)^n \right] \alpha$$

其中 I_n 代表在精度因子为 α 的情况下,对图象进行 n 层小波变换后,精度误差的最大可能值。可以算出,当 $n=4, \alpha \leq 0.009$ 时, $I_n < 0.5$ 。这说明当对图象进行四层变换时,我们只要取 α 为0.09,就可以通过对重建图象取整来保证变换的可逆特性。

我们对这一问题进行了实验。通过设定小波系数的精度因子 α ,我们分别对几幅标准图象进行四层正变换,求 C' ,取整,求 C'' ,最后通过四层反变换并取整获得重建图象。同时计算原始图象与重建图象的信噪比,最终获得了如表1所示的实验结果。

表1 小波系数的精度与信噪比的关系

	$\alpha=0.20$ (PSNR)	$\alpha=0.25$ (PSNR)	$\alpha=0.30$ (PSNR)	$\alpha=0.35$ (PSNR)	$\alpha=0.40$ (PSNR)
Lenna	无损	84.607683	74.160425	67.256568	63.173829
Girl	无损	85.503790	73.940318	67.322082	63.225994
GoldHill	无损	84.912576	74.167071	67.304240	63.285303
Zelda	无损	85.595224	73.997505	67.275574	63.224923
Noise	无损	91.176769	75.440913	70.099453	65.316092

从表1可见,当小波系数的精度因子 α 小于0.2时,这几幅图象就已经能够保证无失真重建了。这说明直接利用本文所使用的双正交浮点型滤波器进行无损恢复理论上是可行的。 α 的理论值0.09比

0.2小很多,这说明也许我们可以通过更精细的估计,获得更准确的 α 上限值。

对于无损图象压缩而言,精度因子 α 越小,相应的需要压缩的数据位数也就越大,等价于动态范围

增大,从而加大了无损压缩的难度。这促使我们寻找更好的算法。

3 算法改进

(1) 文献[1]中的双正交小波构造过程表明,可以将式(1)中的小波系数变成如下型式:

$$h_n = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \tag{2}$$

$$\tilde{h}_n = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 1, 1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \right]$$

同样,该小波系数可以保证精确重建。相应的 4 个滤波器如表 2 所示。

表 2 滤波器系数表

n	-2	-1	0	1	2	3
h_n	0	0	1/2	1/2	0	0
g_n	-1/8	-1/8	+1	-1	1/8	1/8
\tilde{h}_n	-1/8	1/8	1	1	1/8	-1/8
\tilde{g}_n	0	0	1/2	-1/2	0	0

同时,式(2)中的小波变换的优点还在于,存储变换后数据所需要的比特数很小。如果每一个原始图象的点所需要的空间为一个整数的话,小波变换以后的各个子带的系数可以直接利用原来图象数据的空间,并且不会造成数据的溢出,也就是数据的动态范围保持不变。又因为该变换只是使用了位移与求和的运算,避免了费时的浮点运算,所以极大地提高了运算速度。在我们利用 Pentium 133 进行的实验过程中,利用这种算法对 512×512 的 Lenna 图象进行四层的正变换再加上四层的反变换,总共用时 0.6s,而相应的浮点运算则需用时 1.3s。

(2) 式(1)中的 $h_n, g_n, \tilde{h}_n, \tilde{g}_n$ 是归一化的。只有在小波系数是归一化的情况下,我们才能在后面的编码过程中,利用小波系数的振幅以及零树来判断码流的优先性,并最终达到最有效的提高信噪比的功能。而经式(2)中改进所生成的小波系数并不是归一化的。因此,有必要在编码过程中,为每一个小波系数组合一个规一化因子。这种规一化因子和小波系数(整型)的共同考虑,使得在编码时优先权的判断可以和规一化小波(浮点型)的小波变换系数相一致,这种规一化因子是根据不同的子带下的不同尺度所决定的,其基本情况如图 2 所示。相当于在一维小波变换中将低频部分加权二,高频部分加权一。

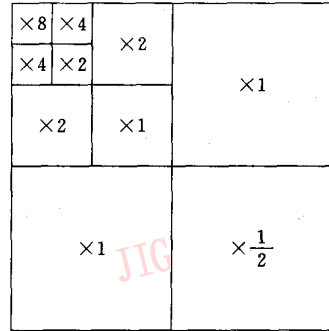


图 2 不同子带的规一化因子

(3) 相应地,可以在计算机上实现快速算法如下:

① 分解过程

$$W_0[i] = (S[i * 2] + S[i * 2 + 1])/2$$

$$W_1[i] = S[i * 2] - S[i * 2 + 1]$$

$$W_i[i] = W_1[i] - (W_0[i - 1] - W_0[i + 1])/4 \tag{3}$$

② 重建过程

$$W_1[i] = W_1[i] + (W_0[i - 1] - W_0[i + 1])/4$$

$$S[i * 2] = W_0[i] + (W_1[i] + 1)/2$$

$$S[i * 2 + 1] = W_0[i] - W_1[i]/2 \tag{4}$$

在式(3)和(4)两组公式中,S 代表一维信号, W_0 表示小波变换后的粗尺度系数, W_1 表示细尺度系数,所有数据类型都是基于整型的,除法可由位移来代替。

如果你仔细观察还会发现,式(3)和(4)作为双正交小波变换的演化形式,可以保证小波变换在计算机上实现时是完全可逆的。即如果你将正变换所形成的系数,再经过反变换就可以完全恢复。这样的变换性质保证了利用小波变换进行无失真重建的可实现性。同时,由于细尺度系数利用了粗尺度系数的运算结果,进一步提高了运算速度。

(4) 在对图象作小波变换的过程中,为了达到无失真重建,对行列变换的次序应有所规定。如果分解时是先进行行的变换,后进行列的变换,则重建时应先进行列的重建,再进行行的重建。

(5) 在任何图象压缩中,边界的处理都是一个较为复杂的问题。小波变换为了克服边界误差,也需要对边界进行处理。通常的边界处理方法是对边界作周期延拓或对称延拓。然而在这里,为了达到无失真重建的目的,我们对边界做了特殊处理,具体形式如下:

$$W_0[0] = (S[0] + S[1])/2$$

$$W_1[0] = (S[0] - S[1]) - (W_0[0] - W_0[1])/2$$

$$W_0[N-1] = (S[2N-2] + S[2N-1])/2$$

$$W_1[N-1] = (S[2N-2] + S[2N-1]) -$$

$$W_0[N-2] - W_0[N-1])/2 \quad (5)$$

这样的边界条件不但可以保证无失真重建,而且可以在边界处达到一阶预测,更好地提高压缩效率。重建的边界条件也可以同样推出。

(6) 经过正变换以后,我们得到了所有的粗尺度系数 W_0 和细尺度系数 W_1 。但为什么能由 W_0 和 W_1 来重构原始信号 S 呢?下面以边界 $S[0]$ 和 $S[1]$ 的恢复为例来说明其原理。

由式(5)中的前两个公式可以得到:

$$(S[0] + S[1])/2 = W_0[0]$$

$(S[0] - S[1]) = W_1[0] + (W_0[0] - W_0[1])/2$
这样我们已经无失真恢复了 $(S[0] + S[1])/2$ 与 $S[0] - S[1]$ 。同时由于 $S[0] + S[1]$ 与 $S[0] - S[1]$ 有相同的奇偶性,所以

当 $S[0] - S[1]$ 为奇数时:

$$S[0] + S[1] = [(S[0] + S[1])/2] * 2 + 1$$

当 $S[0] - S[1]$ 为偶数时:

$$S[0] + S[1] = [(S[0] + S[1])/2] * 2$$

这样我们就又可以恢复 $S[0] + S[1]$ 和 $S[0] - S[1]$, 最终由下式:

$$S[0] = [(S[0] + S[1]) + (S[0] - S[1])/2]$$

$$S[1] = [(S[0] + S[1]) - (S[0] - S[1])/2]$$

我们可以无损地得到原始的信号 $S[0]$ 和 $S[1]$ 。写成快速算法的公式为:

$$S[1] = W_1[0] + (W_0[0] - W_0[1])/2$$

$$S[0] = W_0[0] + (S[1] + 1)/2 \quad (6)$$

$$S[1] = W_0[0] - S[1]/2$$

信号的其它部分也可以利用相同的思想来进行无失真重建。(注意:以上的运算全部是基于整数的。包括加、减和位移)。

(7) 由于经过后期的树型量化和算术编码^[2,5], 整个算法可以达到渐进性直至无失真的压缩效果。图3给出了Lenna标准图象(512×512×8)和不同比特率下的重建图象。表3列出了在不同压缩比下重建图象的信噪比。



(a) Lenna 原图: 512×512×8 bits



(b) 比特率: 1 bits/pixel



(c) 比特率: 0.5 bits/pixel



(d) 比特率: 0.2 bits/pixel

图3

表3 利用改进后的方法对图3中的(a)进行渐进性直至无失真压缩的实验结果

比特率(bits/pixel)	双正交小波(PSNR)
4.277	无失真
1.00	39.42
0.75	37.86
0.5	36.25
0.4	35.32
0.2	32.30
0.16	31.29

4 结论与分析

据文献[3],有人也曾采用类似的双正交小波,周期沿拓且不经量化,不能保证重构完全。而本文通过对双正交1,3小波进行对称延拓和误差估计,保

证了完全重构。进一步地采用这种双正交小波的改进形式,使用特殊的边界处理办法,使之不但可以达到可逆变换,而且提高了速度,降低了动态范围,从而为后期的渐进性直至无失真图象压缩提供了必要的条件。

参考文献

- 1 Daubechies Ingrid, Ten lectures on wavelets. In: The Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- 2 Amid Said, Pearlman W A. Reversible image compression via multiresolution representation, predictive coding. SPIE, 1993, 2094:664~674.
- 3 马维祯: 利用子波变换的图象压缩编码技术. 信号处理, Sept 1995, 11(3):129~137.
- 4 David Houlding, Jacques Vaisey. Low entropy image pyramids for efficient lossless coding. Aug 1995, 4(8):1150~1153.
- 5 闫宇松. 小波变换及其在图象压缩中的应用:[学位论文]. 北京: 北京大学数学系, May 1996.

闫宇松 1996年毕业于北京大学数学系信息专业,获理学硕士学位。感兴趣的领域为图象处理,模式识别。



程乾生 1963年毕业于北京大学数学系,现为北京大学数学科学学院信息科学系教授,博士生导师,研究领域为信号与信息处理,时间序列分析,模式识别,决策分析,信息融合。

Image Compression with Biorthogonal Wavelet Transform

Yan Yusong, Cheng Qiansheng

(Department of Mathematics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract In this paper, we pay attention to the application of image compression with biorthogonal wavelet transform. We provide an algorithm which is suited for fast progressive and lossless compression.

Keywords Biorthogonal wavelet transform, Lossless image compression, Inversible transform, Boundary error, Precision error