

# 一种改进的基于形态骨架的二值图象编码

岑曙炜 刘政凯 李厚强

(中国科技大学电子工程与信息科学系, 合肥 230027)

**摘要** 基于图象形态学的二值图象编码方法, 近来在国际上得到了比较多的研究. 为了提高基于骨架的编码方法效率, 提出了一种基于形态骨架的子集——终极腐蚀(ultimate erosion)二值图象编码方法, 该方法是基于扩展的非骨架点判定定理, 使得有更多的点在编码过程中被判为非骨架点, 从而提高了编码效率. 与其他同类方法相比, 这一方法更充分地去除了图象形态分析中的信息冗余, 从而得到了很好的压缩效果, 其对二值图象“工具”的压缩率达到 0.065, 大大优于游程码、四分树、链码等方法.

**关键词** 二值图象压缩 形态变换 终极腐蚀 非骨架点

**中图法分类号:** TN919.81 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2001)08-0784-07

## An Improved Coding for Binary Images Based on Skeleton

CEN Shu-wei, LIU Zheng-kai, LI Hou-qiang

(Dept. of Electrical Engineering and Information Science, Univ. of Sci. and Tech. of China, Hefei 230027)

**Abstract** Coding for binary images based on mathematical morphology is a hotspot of research in recently years. A new method presented here based on ultimate erosion, subset of skeleton, removes more redundancy using morphology analysis. Following a review of the theoretical background and old research work on this area, such as a method based ultimate erosion for coding binary images proposed by kresch etc<sup>[6]</sup>. We proposed a new theorem to predicate non-skeleton pixel after analyzing the old method<sup>[6]</sup>. It was proposed a new condition to predicate non-skeleton pixel in the new theorem. Compared with the old theorem<sup>[6]</sup>, pixels...More pixels can be determined to be non-skeleton when being encoded under the new theorem and the efficiency is increased. The corresponding corollary was also presented to realize the theorem in computation. The proposed method is suitable for progressive transmission and can be fast implemented by hardware. A binary image “tools” was tested by this method and a better result, 0.065 bit/pixel, was gotten, compared with other methods, such as runlength, quadtree or chain coders. It is also better than the old method<sup>[6]</sup>, 0.071 bpp.

**Keywords** Binary images, Image coding, Mathematical morphology, Ultimate erosion, Non-skeleton.

## 0 引言

数学形态学是建立在集合论上的非线性图象处理理论, 如今, 数学形态学已经成为图象学的一个重要分支. 其对于二值图象, 提供了很好的分析和处理理论; 而对于灰度图象, 又提供了基于几何的非线性处理方法.

骨架是应用形态学进行二值图象重建的最主要方法<sup>[1~3]</sup>. 本文在文献[4]定义的基础上, 对骨架进

行了重新定义.

**定义**  $X \subset R^2$  中的最大球(最大圆盘)是指包含在  $X$  中, 同时又不被  $X$  中其他球(圆盘)包含的球(圆盘), 这些最大球(圆盘)中心的集合就称为骨架.

从代数的观点来看, 骨架就是把一个给定集分解成简单元素(不同大小的圆盘)后再叠加的结果. 这个分解也就给出了重建的方法, 经过适当选择结构元素, 该重建方法就可用于图象的压缩编码.

骨架的重建可以由文献[1]中的公式得出.

基于骨架的压缩编码不仅可用于二值图象的压

缩,而且在灰度图象压缩中也得到了应用,如在文献[5]中,就是先将灰度图看成一系列比特面图,再将各个比特面图(二值图象)进行压缩。

但是,在初期的研究中,基于骨架的编码方法其效率一直不是很理想,基本上和已有的简单方法如链码、四分树、游程码等编码方法差不多。Kresch 和 Malah 在文献[6]中提出了一种新的编码策略,大大提高了骨架编码的效率。本文又在该方法的基础上,通过对其编码策略进行进一步仔细分析,对该方法进行了改进,即去除该方法中还有的冗余,从而得到更好的编码结果。

## 1 图象的骨架重建

基本的图象形态变换算符包括膨胀、腐蚀、开和闭<sup>[4,7~9]</sup>,结构元素  $B$  作用在二值集合  $X$  上的膨胀、腐蚀、开和闭分别表示为  $X \oplus B, X \ominus B, X \circ B, X \bullet B$ 。

在文献[1]中,Lantuéjoul 证明了  $X \subset \mathbb{R}^2$  中的拓朴开集图象  $X$  的骨架  $S(X)$ ,可以由二值形态算符来求得,而由图象的骨架子集就可以精确地重建原图象  $X$ 。该重建方法适用于连续集合,Serra 在文献[4]中给出了上述 Lantuéjoul's 公式的离散版本,其中分解的结构元素由离散半径的网格来近似;Maragos 在文献[10]中提出一种基于结构元素分解的一致步幅骨架,用于近似 Lantuéjoul 公式中的圆盘结构元素。

令  $E$  为 Euclidean 空间(连续空间为  $\mathbb{R}^2$ ,离散空间为  $\mathbb{Z}^2$ ),令  $\{B(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  是  $E$  中的一列拓朴开结构元素,每个  $B(n)$  均包括原点。取  $\{A(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  为由下法产生的一系列元素

$$\begin{cases} A(0) = (0, 0)' \\ A(n+1) = A(n) \oplus B(n), n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

序列  $\{A(n)\}$  可以看成是“圆盘”的一般化,这种圆盘的半径可由离散的参数  $n$  代替,其最经常用到的一个例子就是取  $B(n)$  为  $3 \times 3$  pixel 的结构元素,其相应的  $\{A(n)\}$  为  $(2n+1) \times (2n+1)$  的正方形。骨架分解的定义如下<sup>[10,13]</sup>:

$$S_n(X) = X \ominus A(n) - [X \ominus A(n)] \circ B(n) \quad (2)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

式(2)和集合  $S_n(X), n \in \mathbb{N}$  可以看作 Lantuéjoul 公式的推广,相应的重建公式推广如下:

$$X \circ A(k) = \bigcup_{n \leq k} S_n(X) \oplus A(n) \quad (3)$$

式中,  $k$  为非负整数,当  $k=0$  时,即可以得到精确的重建。在以下的讨论中,将指标  $n$  称为骨架点的半径。为了讨论方便,这里引入两个符号  $X_n, Y_{n+1}$ , 其分别为

$$X_n \triangleq X \ominus A(n) \quad (4)$$

$$Y_{n+1} \triangleq X_{n+1} \oplus B(n) = [X \ominus A(n)] \circ B(n) \quad (5)$$

文献[1]中一致步幅的 Lantuéjoul 公式(式 2)则可相应地写为

$$S_n = X_n - Y_{n+1} \quad (6)$$

由式(3)可以得出在下面用到的一个性质

$$S_n \oplus A(n) \subseteq X \quad (7)$$

## 2 已有的基于终极腐蚀的编码方法

为了简化起见,将结构元素  $B(n)$  定义为常数,即,  $B(n) = B, \forall n$ ,但仍可以很方便的扩展到任意  $B(n)$  的情形。

在文献[2]中,Maragos 和 Schafer 提出了两种编码方法,在第一种方法中,骨架子集  $S_n, n = 0, 1, \dots$ ,被看作一系列二值图象,由于这些图象上的点非常稀疏,因此适于甚低比特率编码。如果将每个子骨架集用基于 Huffman 或 Elias 码的游程编码,将骨架集进行按  $n$  的递减编码,那么其得到的还将是一个层进的编码方案,因为如果中途码传输停止,仍可以根据式(3)重建  $X$  的一个简化版本。由于本方法不考虑骨架点间的相关性,来对骨架子集单独编码,因此编码效果不很令人满意。

文献[2]中提到的另一种编码方法是将所有骨架子集的全集  $S \triangleq \bigcup \{S_n\}$  作为二值图象进行编码,同时对熄灭函数  $q(s), s \in S$  进行编码,其  $S$  是采用与第一种方法相同的游程码加 Huffman 编码法进行编码;而熄灭函数是用 Huffman 方法编码。其与第一种方法相比,这种方法由于只需对一个二值图象进行编码,因此速度较快,但不是层进的。同时由于没有充分考虑邻近骨架点在熄灭函数上也存在相关性,因此编码效率仍不是很高。

Brandt, Jain 和 Algazi 在文献[11]中提出了一种编码方法,即用链码对骨架点构成的线进行编码,因为在连续图象中,图象的骨架点一般几乎是连续的,所以将骨架点用扩展的链码进行编码,其增加额外的符号只用于表示相关半径的增减,但由于在离散的情况下,骨架点的连续性大大降低,从而使链码的效率也降低很多。

另外还有一些方法是通过去除骨架点在图象重建时的信息冗余来达到较好的结果<sup>[2,12]</sup>,它能有效地改善前两种方法的效果,但仍未考虑骨架点之间的相关性,再者,由于去除冗余后骨架点间的连通性将降低,因此对第3种方法不适用。

Kresch 和 Malah 在文献[6]中也提出一种图象重建方法,即利用终极腐蚀和骨架点来进行重建,由于该方法比较好地考虑了骨架点间的相关性,因此取得了很好的编码效果.本文又对这一方法进行了改进提高,最后取得了很好的编码效果。

## 2.1 传递,连接,重构和终极腐蚀

传递和连接的定义如下

(1)直接传递:令  $B$  为  $E$  中的结构元素,如果

$$y \in \{x_0\} \oplus B \quad (8)$$

则点  $y \in E$  称为点  $x_0 \in E$  在结构元素  $B$  下的直接传递。

(2)传递:点  $y \in E$  称为点  $x_0 \in E$  在结构元素下的传递,如果存在一个起于  $x_0$ ,终于  $y$  的点链,那么其中每一点均为前一点点的直接传递。

(3)连接:两个点  $x_0, y$  称为连接的(在结构元素  $B$  下),如果任一点均为另一点的直接传递,亦即

$$x_0 \in \{y\} \oplus B \text{ and } y \in \{x_0\} \oplus B \quad (9)$$

当  $B$  是对称时(即:  $b \in B \Rightarrow -b \in B$ ),根据  $y$  是  $x_0$  的直接传递,反之可以推出  $x_0$  也在  $y$  的直接传递,此时直接传递和连接称为等价的。

(4)重构:令  $A, D$  为  $E$  中的两个集合,且  $D \subseteq A, B$  为预先定义的结构元素,那么可将  $A$  在  $B$  下从  $D$  出发的重构  $\text{Rec}\{A, D\}_B$ , 定义为在结构元素  $B$  下,从  $D$  中的点出发的连接,且其连接途径必须严格属于  $A$ ; 当  $B$  为一对称结构元素时,则从  $D$  出发的  $A$  的重建为  $A$  中包含  $D$  的所有相连部分的合集。

计算重构的一种方法是递归计算条件膨胀  $\delta_{A,B}(D) \triangleq (D \oplus B) \cap A$ , 令  $\delta_{A,B}^n(\cdot)$  为  $\delta_{A,B}(\cdot)$  的  $n$  重运算,则

$$\text{Rec}\{A, D\}_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{A,B}^n(D) \quad (10)$$

由于连接的定义和  $B$  的大小很有关系,一般应将  $B$  取得尽可能地小(在离散时,取4或8邻域,在连续时,取半径无穷小的圆盘),以免相互不连的点在  $B$  下出现连接的情形。

(5)终极腐蚀:终极腐蚀  $U_n$  定义为

$$U_n \triangleq X \ominus nB - \text{Rec}\{X \ominus nB, [X \ominus nB] \odot B\}_B \quad (11)$$

其中,  $n$  为一自然数,  $nB$  为  $B$  对自身的  $n$  次膨胀运算.由上述定义可见,集合  $X$  的  $n$  阶终极腐蚀为属

于  $X \ominus nB$  但不能在  $B$  下从  $X \ominus nB \odot B$  出发连接到点.终极腐蚀在一致步幅下可以定义为

$$U_n \triangleq X_n - \text{Rec}\{X_n, Y_{n+1}\}_{C(n)} \quad (12)$$

其中,  $X_n$  和  $Y_{n+1}$  的定义如式(4)和式(5)

$$C(n) = \begin{cases} B(n-1) & n \geq 1 \\ \text{any structuring element} & n = 0 \end{cases} \quad (13)$$

图1为图象的终极腐蚀,其中打圈的为图象的终极腐蚀,各数字为该骨架点的半径。

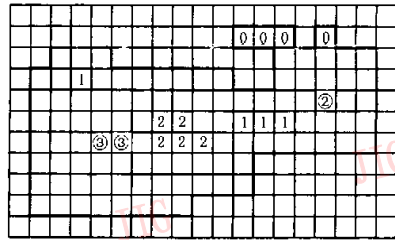


图1 图象骨架及终极腐蚀

## 2.2 从终极腐蚀和骨架重建原图象

对于离散情况下单步化的骨架重建,有大部分的骨架点可以去掉其半径信息,而不影响精确地重建原图象.实际上,除了所有属于终极腐蚀的点的半径,其余所有骨架点的半径都可以不用记录.现证明如下:

引理1:令  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  为图象  $X$  的单步化骨架的骨架子集,  $S$  为骨架点的集合,其中不含骨架的半径信息,即  $S \triangleq \bigcup_{n \geq 0} S_n$ , 那么

$$\text{Rec}\{S \cup Y_{n+1}, Y_{n+1}\}_{C(n)} \cup U_n = X_n \quad (14)$$

上述引理的证明可参见文献[6].

定理1:令  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  为图象  $X$  的单步化骨架的骨架子集,  $S \triangleq \bigcup_{n \geq 0} S_n$ .若采用式(12)中的终极腐蚀定义,则原图象  $X$  可以由  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  和  $S$  完全重建。

证明:

(1) 如果  $N$  为骨架的最大半径,那么,  $X_N = U_N$ ;

(2) 对每个  $n \geq 0$ , 如果  $X_{n+1}$  已经求得,那么由  $X_{n+1}$  就可以求得  $Y_{n+1}$ ,再由引理1即可求得  $X_n$ (其求法和下面的编码方法非常有关);

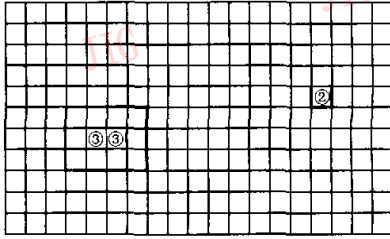
(3) 原始图象  $X = X_0$ .

由上述的定理即可得到一个由简化的骨架点(去除非终极腐蚀点的半径信息)来重建初始图象的算法(图2).

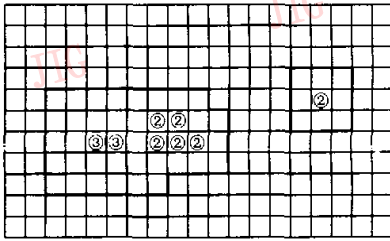
$n = N, \dots, 0, X$  由(14)式取值,其步骤如下:

(1) 取  $Z = U_N$  为一临时图象;

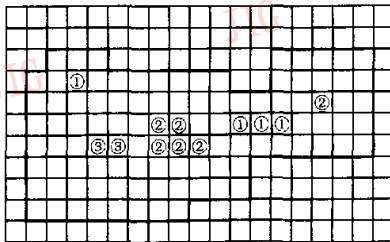
(2)  $n \leftarrow N - 1$  (假定  $N \geq 1$ , 否则可以直接得到



(a)  $n=2$  时的重建



(b)  $n=1$  时的重建



(c)  $n=0$  时的重建

图 2 重建过程(原图为图 1,  $N=3$ . 图中黑线内为  $Z$ ,  $S_n$  中的点为  $S$  中连接  $Z$  的点加上  $U_n$ .)

$X=U_n$ ;

(3)  $Z \leftarrow Z \oplus B(n)$ , 此时  $Z=Y_{n+1}$ . 由引理 1, 对于对称的  $C(n)$ ,  $S_n$  是终极腐蚀  $U_n$  和  $S$  中所有和  $Z$  相连的点的并集;

(4)  $Z \leftarrow \text{Rec}\{S \cup Z, Z\}_{C(n)}$ , 由引理 1, 此时  $Z=X_n$ . 应该指出, 此时被  $Z$  连上的所有点都属于  $S_n$ ;

(5) 如果  $n=0$ , 则停止, 否则令  $n \leftarrow n-1$ ;

(6) 转到第 3 步.

以下两个推论可以直接从式(14)得出:

**推论 1:** 如果  $s$  是骨架半径为  $n$  的骨架点, 那么所有  $s$  在元素  $C(n)$  下传递的骨架点, 也都具有相同的半径  $n$ ;

**推论 2:** 假定  $C(n)$  对称, 即  $c \in C(n) \Rightarrow -c \in C(n)$ . 此时, 如果  $s$  是半径为  $n$  的骨架点, 则所有和它连通的骨架点, 也都具有半径  $n$ .

当取结构元素为  $3 \times 3$  的邻域时, 即可以得出所

有相连通的骨架点的半径都是相同的.

由上面的推论可知, 即使是骨架中属于终极腐蚀的点, 其半径信息也不必完全记录, 且相连接的终极腐蚀点也只需记录其中一点的半径即可, 因为所有连接的终极腐蚀的半径都是相同的. 若  $N$  为最大半径, 则  $U_n (0 \leq n \leq N)$  为终极腐蚀, 即对各  $n$  可以生成  $\bar{U}_n$ , 如果点  $s$  属于  $\bar{U}_n$ , 那么它不能由  $\bar{U}_n$  中的其他点在  $C(n)$  下传递; 如果  $C(n)$  是对称的, 则  $\bar{U}_n$  中只包含  $U_n$  中每个连接块中的一个点, 而且对于  $U_n$  中不属于  $\bar{U}_n$  的点, 其半径信息不用记录. 由于通常  $\bar{U}_n$  包含的点很少, 因此选择什么样的编码方式对结果影响不是很大.

**推论 3:** 骨架点  $s$  具有半径  $n$ , 当且仅当或者  $s \in U_n$ , 或者  $s \in Y_{n-1}$ , 但  $s$  可由一属于  $S$  的路径点, 在  $C(n)$  下由  $Y_{n-1}$  进行传递.

下面的理论可以由已编码的点来预测  $S_n$  的某些信息.

在编码过程中, 假定当前步阶数为  $n$ , 相应的骨架点集为  $S_n$ , 且  $Y_{n+1}$  无论对编码器, 还是解码器都已经预知.

由  $S_n = X_n - Y_{n+1}$  可知, 在  $Y_{n+1}$  中不可能存在属于  $S_n$  的点, 因此, 不需要对  $Y_{n+1}$  中的点是否属于  $S_n$  进行记录(编码), 在解码端也就不需要进行相应的处理, 这一结果在文献[2]中就有应用.

不仅  $Y_{n+1}$  中的点不可能属于  $S_n$ , 而且下面定理也说明, 对  $Y_{n+1}$  外的一部分点, 也可以作出其不可能属于  $S_n$  的预测.

**定理 2**<sup>[6]</sup> 令  $p \in E$ , 如果下式成立,

$$[(Y_{n+1} \cup \{p\}) \bullet A(n)] \circ B(n) \supset \{p\} \quad (15)$$

则  $p$  不可能属于  $S_n$ .

证明从略.

上述定理对  $E$  中的每个点  $p$  均提供了一个用于编码的检测方法, 即如果  $p$  满足式(15), 那么无论对于解码器还是编码器都不用对  $p$  进行处理, 因为  $p$  不可能是  $S_n$  中的点, 不过在实际应用中, 判断一个点是不是满足式(15), 其计算量太大. 在文献[6]中 Kresch 和 Malah 提出了一种简单快速的判别方法.

**推论 4:** 令  $F$  为一不包含原点(用  $o$  表示)的结构元素, 且满足:

$$[(F \cup \{o\}) \bullet A(n)] \circ B(n) \supset o \quad (16)$$

令  $p \in E$ , 如果有  $\{p\} \oplus F \subseteq Y_{n+1}$ , 那么  $p$  不可能属于  $S_n$ . 也就是说, 可以用一个事先选择好的不包含原

点,且满足式(16)的模板  $F$ ,而且这个模板可以和  $X$  无关,而只和一簇  $\{A(n)\}$  有关.这样在对点  $p$  进行是否有可能为  $n$  阶骨架点的判断时,只需检测  $\{p\} \oplus F$  是否包含在  $Y_{n+1}$  中即可.

用上述方法判断出来的非骨架点仅是由定理 2 决定的非骨架点的一个子集.如果要使两者相等,则应选择所有能满足式(16)的模板,这样又将导致计算量过大.实际上,取一个小的子集  $\{F_i\}$  即可对绝大多数需要预测的点进行判断.在文献[6]中,作为一个例子,给出了取  $E = Z^2$ ,最常用的结构元素  $B(n) = B$ ,且  $B$  为  $3 \times 3$  的模板时的情况.

**推论 5:**假定  $n > 0$ ,并令  $(i, j) \in Z^2$ ,骨架化的结构元素为  $3 \times 3$  邻域.如果下述任意一组中的 3 个点均在  $Y_{n-1}$  中,则点  $(i, j)$  不可能属于  $S_n$ .

- $\{(i - k_1, j), (i, j + k_2), (i + k_3, j + k_3)\}$
- $\{(i - k_1, j), (i, j - k_2), (i - k_3, j - k_3)\}$
- $\{(i + k_1, j), (i, j - k_2), (i + k_3, j - k_3)\}$
- $\{(i - k_1, j), (i, j + k_2), (i - k_3, j + k_3)\}$

其中,  $k_1, k_2, k_3$  为  $[2, 2n + 1]$  中的任意整数.

如图 3 所示,推论 5 意味着图中点  $(i, j)$  不可能为  $S_n$  的点.

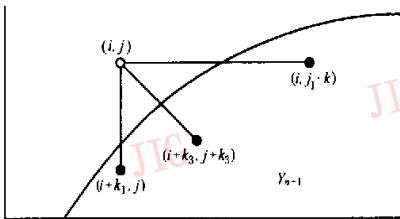


图 3 由推论 5 点  $(i, j)$  不可能属于  $S_n$ .

### 2.3 完整的编码方法

下面给出 Kresch 和 Malah 使用的完整的编码方法:

- (1) 计算骨架  $S_n, 0 \leq n \leq N$ . 对  $\bar{U}_n$  进行编码.
- (2)  $n \leftarrow N - 1, Y_n \leftarrow \bar{U}_n$ .
- (3)  $Z \leftarrow (Y_{n+1} \cup \bar{U}_n)$ .
- (4)  $p \leftarrow Z$  的外部边界点. 如果所有外边界点均已处理完,则转到第(9)步.
- (5) 应用定理 2(推论 5)检测  $p$  是否有可能属于  $S_n$ . 如果不可能属于  $S_n$ ,则转到第(4)步.
- (6) 如果  $p$  为骨架点,则编码为“1”,否则编码为“0”.
- (7) 如果编码为“1”,则令  $Z \leftarrow (Z \cup \{p\})$ ,否则

转第(4)步.

(8) 递归地对由  $p$  传递的点进行扫描,并将不可预测(是否是骨架点)的点,按是否为骨架点相应地编码为“1”和“0”,采用另一个和第(6)步不同的概率模型.如果编码点  $q$  为骨架点,则  $Z \leftarrow (Z \cup \{q\})$ ,在所有相通的点都扫描完后,转第(4)步.

(9) 如果  $n = 0$ ,则编码结束.

(10)  $n \leftarrow n - 1, Y_{n+1} \leftarrow Z \oplus B(n)$ ,则转第(3)步.

根据式(3)进行图象重建时,在不少情况下并不是所有的骨架点都是必须的[2, 12],即可以扔掉部分骨架点而仍能实现完全精确的重建.在取结构元素为  $3 \times 3$  算子时,如果一个骨架点其 4 邻域的 4 个点中至少有 3 个是骨架点,那么把这个骨架点去除也不会影响重建的结果和编码过程.文献[4]就应用了这一结论.

### 3 新的编码方法及结果

本文提出的编码方法和上面的编码方法相比有两个新的有效的改进.

#### 改进 1 扩大的判断点集

在定理 2 中,判断一个点为非骨架点的公式  $[(Y_{n+1} \cup \{p\}) \bullet A(n)] \circ B(n) \supset \{p\}$  中的  $Y_{n-1}$ ,实际上可用一个更大的集合来代替,这里更大的集合意味着有更多的点在编码时,可以判定为其不可能是骨架点,也就不需要进行编解码.其相应的改进即为定理 3.

**定理 3:**令  $p \in E, n > 0, S_{S_n}$  为  $S_n$  的任意子集,  $p \in S_{S_n}$ ,如果下式成立:

$$[(Y_{n+1} \cup S_{S_n} \cup \{p\}) \bullet A(n)] \circ B(n) \supset \{p\} \tag{17}$$

那么,  $p$  不可能属于  $S_n$ .

**证明:**采用反证法.假定  $p \in S_n$ ,定义如下的算子

$$\rho(Z) \triangleq [Z \ominus A(n)] \circ B(n) \tag{18}$$

根据式(7)中定义的  $Y_{n+1}$ ,则有  $\rho(X) = Y_{n+1}$ ,同时,由于

$$\begin{aligned} & [Y_{n+1} \oplus A(n) \ominus A(n)] \circ B(n) \\ &= X \ominus A(n+1) \oplus B(n) \oplus A(n) \ominus A(n) \ominus \\ & \quad B(n) \oplus B(n) \\ &= \{[X \circ A(n+1) \ominus A(n+1)]\} \oplus B(n) \\ &= [X \oplus A(n+1)] \oplus B(n) = Y_{n+1} \end{aligned} \tag{19}$$

即  $\rho$  作用在  $Y_{n+1} \oplus A(n)$  的结果也是  $Y_{n+1}$ .由于算子  $\rho(\cdot)$  是单调的(构成算子的基本形态操作都

是单调的),因此满足

$$[Y_{n-1} \oplus A(n)] \subseteq Z_0 \subseteq X \quad (20)$$

的集合  $Z_0$ , 均有  $\rho(Z_0) = Y_{n+1}$ . 如果取  $Z_0 = (Y_{n-1} \cup S_{S_n} \cup \{p\}) \oplus A(n)$ ,  $p \in S_n$ , 则

$$\begin{aligned} Z_0 &= (Y_{n-1} \cup S_{S_n} \cup \{p\}) \oplus A(n) \\ &= (Y_{n-1} \oplus A(n)) \cup (S_{S_n} \oplus A(n)) \\ &\quad \cup (\{p\} \oplus A(n)) \subseteq X \quad (21) \end{aligned}$$

即,  $Z_0$  满足式 (20), 也有  $\rho(Z_0) = Y_{n+1}$ , 但是, 由式 (17) 可以得出  $\rho(Z_0) \supset \{p\}$ , 所以,  $p \in Y_{n+1}$ , 而这与  $p \in S_n$  矛盾.

和推论 5 相似, 可以得到如下在  $B(n) = B$ ,  $\forall n, B$  为  $3 \times 3$  邻域下的简便判断方法:

**推论 6** 假定  $n > 0$ , 令  $(i, j) \in Z^2$ , 骨架化的结构元素为  $3 \times 3$  邻域. 如下所述任意一组中的 3 个点均在  $Y_{n-1} \cup S_{S_n}$  中, 且  $S_{S_n}$  为  $S_n$  的任意子集, 则点  $(i, j)$  不可能属于  $S_n$ .

- $\{(i+k_1, j), (i, j+k_2), (i+k_3, j+k_3)\}$
- $\{(i-k_1, j), (i, j-k_2), (i-k_3, j-k_3)\}$
- $\{(i+k_1, j), (i, j-k_2), (i+k_3, j-k_3)\}$
- $\{(i-k_1, j), (i, j+k_2), (i-k_3, j+k_3)\}$

其中,  $k_1, k_2, k_3$  为  $[2, 2n+1]$  中的任意整数.

定理 3 及推论 6 意味着在编码过程中, 对点进行是否是非骨架点的判定时, 可以随时将已经编码的  $S_n$  点加入到判定中曾用到的点集(在文献[6]方法中为  $Y_{n-1}$ )中去, 这也就意味着有更多的点可以被事先判定为不可能是骨架点, 从而来提高编码效率. 下图给出了两种方法的比较: 图中标  $N$  的点为文献[6]中去所除的冗余非骨架点; 标  $H$  的点为应用定理 3 后, 沿  $\rightarrow$  方向编码时还可以去除的冗余点.

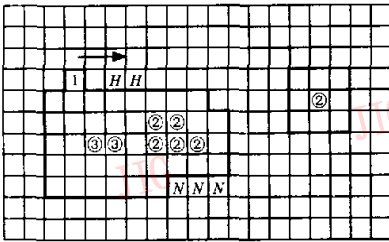


图 4  $n=1$  时, 新增加的可不用编码的非骨架点. 原因为图 1, 图中标  $N$  的为文献[6]中曾使用的非骨架点, 标  $H$  者为本文改进方法新增加的非骨架点.

在实际应用中, 这一改进能明显地增加非骨架点的数量.

**改进 2  $n=0$  时的简化判断方法**

推论 5 和推论 6 均是关于  $n > 0$  的情况, 下面给出  $n=0$  时的判据:

**推论 7**  $n=0, (i, j) \in Z^2$ , 骨架化的结构元素为  $3 \times 3$  邻域. 如下述任意一组中的 3 个点均在  $Y_1$  中,  $S_{S_n}$  为  $S_n$  的任意子集, 则点  $(i, j)$  不可能属于  $S_n$ .

- $\{(i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)\}$
- $\{(i-1, j), (i, j-1), (i-1, j-1)\}$
- $\{(i+1, j), (i, j-1), (i+1, j-1)\}$
- $\{(i-1, j), (i, j+1), (i-1, j+1)\}$

这一推论可以比较容易的从定理 2 得出.

**3.1 新的编码方法**

应用上述定理和推论后的新的编码方法如下:

- (1) 计算骨架  $S_n, 0 \leq n \leq N$ , 并对  $C_n$  进行编码.
- (2)  $n \leftarrow N-1, Y_N \leftarrow 0$ .
- (3)  $Z \leftarrow Y_{n-1}, Z' \leftarrow Y_{n+1}$ .
- (4)  $p \leftarrow Z$  的外部边界点. 如果所有外边界点均已处理完, 则转到第 9 步.
- (5) 如果  $n > 0$ , 则应用定理 3(推论 6), 检测  $p$  是否有可能属于  $S_n$ . 检测时,  $Y_{n+1}$  由相应的  $Z'$  代替; 如果  $n=0$ , 则应用推论 7 来检测; 如果不可能属于  $S_n$ , 则转到第(4)步.

(6) 如果  $p$  为骨架点, 则编码为“1”, 否则编码为“0”.

(7) 如果编码为“1”, 则令  $Z' \leftarrow (Z' \cup \{p\})$ , 否则转第(4)步.

(8) 递归地对由  $p$  传递的点进行扫描, 并将不可预测(是否是骨架点)的点, 按是否为骨架点相应地编码为“1”和“0”, 采用另一个和步骤(6)不同的概率模型来进行编码. 如果编码点  $q$  为骨架点, 则  $Z' \leftarrow (Z' \cup \{q\})$ ; 如果在所有相连接的点都扫描完后, 则转第(4)步.

(9) 如果  $n=0$ , 则编码结束.

(10)  $n \leftarrow n-1, Y_{n+1} \leftarrow Z' \oplus B(n)$ , 转第(3)步.

对冗余骨架点的处理同文献(6)方法.

**3.2 编码结果**

本文对经常用到的“工具”二值图象(图 5)进行了压缩比较.

从压缩结果可以看出, 本文的方法是非常有效的. 表 1 是几种常用的压缩方法压缩结果.

这里需要指出的是, 由于图象形态变换, 其适于硬件并行实现的优越性在普通计算机编程运行中无法实现, 而本文方法的处理速度虽不是很快, 但在

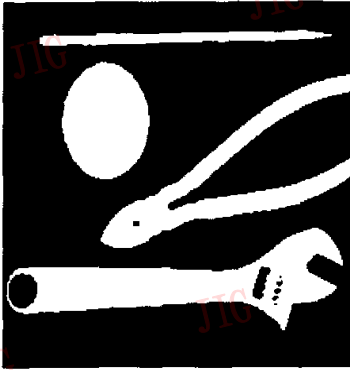


图5 实验图象:“工具”

表1 对二值图象“工具”的编码结果

| 编码方法        | 结果(bit/pixel) |
|-------------|---------------|
| 游程码+Huffman | 0.152         |
| 四分树         | 0.131         |
| 链码          | 0.091         |
| 骨架(文献[6])   | 0.071         |
| 骨架(本文方法)    | 0.064 5       |

3.1节所述的编码方法中,不仅图象的膨胀、腐蚀(及它们的复合运算,如骨架、终极腐蚀的求取等)和图象外部边界等运算均具有很好的硬件并行性,而且非终极腐蚀点的判定也可以在多个方向、不同 $k$ 值上并行进行(参见推论6).由于整个编码算法的计算量均集中在这几个运算上,因此如果有适于图象形态计算的并行硬件的话,该编码方法很容易就能达到实际应用的要求.

## 4 结论和展望

在以往的研究中,基于骨架的二值图象压缩虽在理论上表现出很强的应用前景,但一直未能达到很好的压缩效果,文献[6]中提出的方法,虽取得了很高的压缩率,但本文的方法又在此基础上,通过去除更多的冗余非骨架点,获得更理想的压缩效果.

下一步的工作是一方面如何将本方法推广到灰度图象和等高线图中,另一方面,如何在本方法中加入骨架点的统计预测,以便更进一步提高编码的效率,也是值得研究的.

### 参考文献

1 Lantuéjoul C, La squelettization et son application aux mesures topologiques des mosaïques polycristallines. Ph. D.

dissertation, School of Mines, Paris, France, 1978.

- Maragos P, Schafer R W. Morphological skeleton representation and coding of binary images. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1985, ASSP-34(10): 1228~1244.
- Serra J. Image analysis and mathematical morphology, Vol. 2: Theoretical Advances. New York: Academic, 1988.
- Serra J. Ed. Image analysis and mathematical morphology, New York: Academic, 1982.
- Sapiro G, Malah D. Morphological image coding based on a geometric sampling theorem and a modified skeleton representation. J. Vis. Commun. Image Represent., 1994, 5(3):29~40.
- Kresch R, Malah D. Skeleton-based morphological coding of binary Images. IEEE Trans. on Image Processing, 1998,7(10): 1387~1399.
- Dougherty E R. An introduction to morphological image processing. San Diego, CA: SPIE, 1992, Vol. TT-9.
- Kresch R. Morphological image representation for coding applications. D. Sc. dissertation, Dept. Electr. Eng., Technion-Israel Inst. Technol., Haifa, Israel, 1995 June. www: http://www.sipl.technion.ac.il/publications/thesis/renato/renato.html
- 吴敏金. 图象形态学. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1991.
- Maragos P. A unified theory of translation-invariant systems with applications to morphological analysis and coding of images. Ph. D. dissertation, School Elec. Eng., Georgian Inst. Technol., Atlanta, USA, 1985.
- Brandt J W, Jain A K, Algazi V R. Medial axis representation and encoding of scanned documents. J. Vis. Commun. Image Represent., 1991,2(6):151~165.
- Kresch R, Malah D. Morphological reduction of skeleton redundancy. Signal Process, 1994,38(9):143~151.
- Maragos P. Morphological systems for multidimensional signal processing. Proc. IEEE, 1990,78(4):690~710.



**岑曙烁** 1993年毕业于中国科技大学电子工程和信息科学系,现为中国科技大学信号与信息处理专业博士研究生. 主要研究方向为图象处理的理论和应用、数学形态学、神经网络.



**刘政凯** 1964年毕业于中国科技大学无线电系,现为中国科技大学教授,博士生导师. 主要从事遥感图象处理、人工神经网络及模式识别方面的研究.



**李厚强** 1992年毕业于中国科技大学,现为中国科技大学信号与信息处理专业博士研究生. 主要研究方向为图象处理的理论和应用、分形、遥感图象处理.