

多小波变换的提升格式及其在图象编码中的应用

曾剑芬 马争鸣

(广州市中山大学电子系信息处理实验室, 广州 510275)

摘要 在简要介绍提升格式和多小波之后, 提出了一种新的实现多小波变换的提升格式模型. 由于这个模型主要由若干个单小波变换的提升格式搭建而成, 因而不必自己推演提升格式的内部结构和参数. 另外, 这个模型还可以根据实际应用的需要选用不同的单小波. 该文还给出用 D9/7 双正交(单)小波变换的提升格式构造的多小波变换的实例, 并把这样构造的多小波变换应用于图象编码, 结果表明, 该方法可取得比常用的 GHM 多小波图象编码更好的效果.

关键词 提升格式 多小波 图象编码

中图分类号: TN919.81 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2002)07-0704-05

A Lifting Scheme for Multiwavelet Transforms and its Application to Image Coding

ZENG Jian-fen, MA Zheng-ming

(Information Processing Lab., Electronics Dept., Zhongshan Univ., Guangzhou, 510275)

Abstract Lifting scheme is not only a fast algorithm of existing wavelet transforms, but also a tool to produce new wavelet transforms. Multiwavelets are a new kind of wavelets and have found many new applications to signal processing. In this paper we present a framework of lifting scheme for multiwavelet transforms, in which the existing lifting schemes designed originally for wavelet (not multiwavelet) transforms can be used as building blocks. Thus we needn't concern about the internal structures and parameters of these building blocks. What we need to do is to choose different wavelets for different applications and then make use of the lifting schemes for these wavelets to build a new lifting scheme. This new lifting scheme is equivalent to a multiwavelet transform. We build such a lifting scheme by using the lifting schemes for D9/7 biorthogonal wavelet transform and then apply this new lifting scheme to image coding. We have achieved better results than that obtained by the commonly-used GHM multiwavelet image coding.

Keywords Lifting scheme, Multiwavelets, Image coding

0 引言

提升格式(Lifting Scheme)^[1]被誉为构造第二代小波的关键技术. 对于第一代小波而言, 由于提升格式是一种比 Mallat 算法^[2]更为有效的小波变换快速算法, 因此受到 JPEG2000^[3]的推荐.

多小波^[4]可以看成是单小波的推广, 它具有单

小波所没有的一些优点. 例如, 多小波可以同时满足对称性、正交性和紧支性, 而单小波, 除了 Haar 小波之外, 一般不具备这些性质. 如今多小波在图象编码等方面的应用已初见成效^[5].

本文在简要介绍提升格式和多小波之后, 提出了一种新的实现多小波变换的提升格式模型. 由于这个模型主要由若干个单小波变换的提升格式搭建而成, 因而不必自己推演提升格式的内部结构和参

数. 另外, 这个模型还可以根据实际应用的需要来选用不同的单小波.

1 提升格式简介

1.1 基本框架

提升格式的基本过程(正过程和逆过程)如图 1 所示. 从图 1 可见, 提升格式有分割/合并(Split/Merge)、预测(Prediction)和更新(Update)3 个基本步骤.

(1) 分割 把原数据 $x(n)$ 分解成两部分. 一般出于最大限度利用数据局域相关性的考虑, 通常是把数据分成奇偶两部分

$$x_e(n) = x(2n), x_o(n) = x(2n + 1)$$

(2) 预测 利用 $x_e(n)$ 预测 $x_o(n)$, 即

$$d(n) = x_o(n) - P[x_e(n)]$$

其中, P 表示预测算子, $d(n)$ 表示预测误差. 在提升格式的理论中, 预测误差也称为小波系数(高频系数). 显然预测值 $P[x_e(n)]$ 越接近 $x_o(n)$, 预测误差 $d(n)$ 就越小.

(3) 更新 利用 $d(n)$ 更新 $x_e(n)$, 即

$$c(n) = x_e(n) + U[d(n)]$$

其中, U 表示更新算子. 在提升格式的理论中, 更新的结果 $c(n)$ 也称为尺度系数(低频系数), 是原数据 $x(n)$ 的一个粗糙近似.

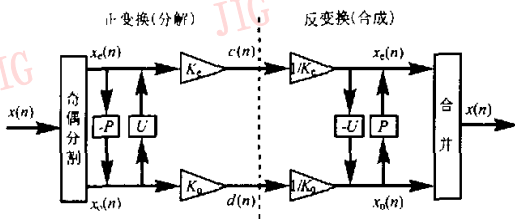


图 1 提升格式构造的小波变换过程

1.2 提升格式的特点

从图 1 和上面的叙述可以看到, 提升格式有如下两个显著的特点:

(1) 具有简单可逆性. 在提升格式中, 由于正过程的运算与逆过程的运算只是相差一个负号, 即确定了正过程也就确定了逆过程, 反之亦然, 因此, 本文在讨论提升格式时, 只是讨论正过程.

(2) 具有较大的自由度. 在提升格式中, 除了分割/合并过程的设置固定之外, 由于人们可以根据自

己的需要设置预测、更新和权重, 因此, 在提升格式的理论中, 有一种说法: You can build your own wavelets at home.

对于第一代小波而言, 提升格式是一种比常用的 Mallat 算法更有效的快速算法. Daubechies 证明, 任何用 Mallat 算法实现的单小波变换都可以改用提升格式来实现^[6].

1.3 Haar 小波变换的提升格式

Haar 小波变换的提升格式如图 2 所示.

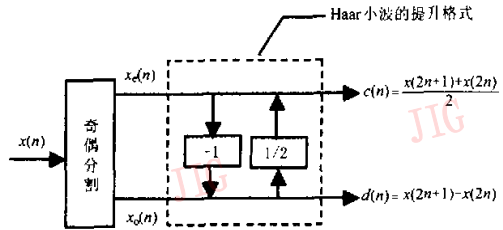


图 2 提升格式实现的 Haar 小波正变换过程

1.4 D9/7 双正交小波变换的提升格式

D9/7 双正交小波变换的提升格式^[7]如图 3 所示.

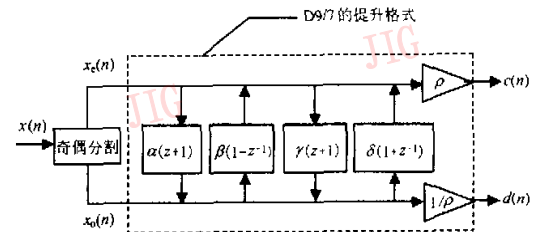


图 3 提升格式实现的 D9/7 正变换过程

图中各参数为: $\alpha = -1.5861, \beta = -0.0530, \gamma = 0.8829, \delta = 0.4435, \rho = 1.1496$.

2 多小波变换简介

离散信号 $x(n)$ 的多小波变换可以通过如图 4 所示的 Mallat 算法来实现, 这里只考虑包含两个小波的多小波情况. 由于多小波变换是向量变换, $H(n)$ 和 $G(n)$ 是 2×2 的矩阵, 因此, 信号 $x(n)$ 必须经过前置滤波转化为向量信号 $C^{(j)}(n)$ 才能进行多小波变换, 以便进一步分解为一个低频向量信号 $C^{(j-1)}(n)$ 和一个高频向量信号 $D^{(j-1)}(n)$, 这里

$$C^{(j)}(n) = \begin{bmatrix} c_1^{(j)}(n) \\ c_2^{(j)}(n) \end{bmatrix}, D^{(j-1)}(n) = \begin{bmatrix} d_1^{(j-1)}(n) \\ d_2^{(j-1)}(n) \end{bmatrix},$$

$$D^{(j-1)}(n) = \begin{bmatrix} d_1^{(j-1)}(n) \\ d_2^{(j-1)}(n) \end{bmatrix}$$

$$C^{(j-1)}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(m-2n)C^{(j)}(m)$$

$$D^{(j-1)}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(m-2n)C^{(j)}(m)$$

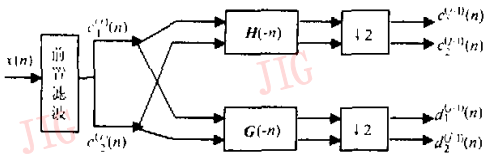


图 4 多小波变换 Mallat 算法框图

从图 4 可以看到,按照 Mallat 算法,向量信号 $C^{(j)}(n)$ 经过向量滤波之后,还要进行亚抽样,这意味着向量滤波运算有一半做了无用功,而实现单小波变换的 Mallat 算法也存在同样的问题,由于用提升格式代替 Mallat 算法可以解决这个问题,因此,本

文也考虑采用提升格式来实现多小波变换。

3 多小波变换的提升格式模型

3.1 多小波变换的提升格式模型

用提升格式来实现多小波变换的理论和方法已有一些研究,但这些研究往往涉及冗长的数学推导,给实际应用带来诸多不便,本文通过对文献[8]给出的用提升格式实现多小波变换例子进行的分析,提出了如图 5 所示的多小波变换的提升格式模型。这个模型是利用单小波变换的提升格式来搭建多小波变换的提升格式,由于单小波变换提升格式的研究已有很多成熟的结果,因此可以直接引用这些结果。另外,人们也可以根据实际应用的需要选用合适的单小波。

在图 5 所示的多小波变换提升格式模型中,单小波变换提升格式模块 1 和模块 2 是必不可少的,否则就不成其为多小波变换了,而单小波变换提升格式模块 3 则可根据具体情况取舍。

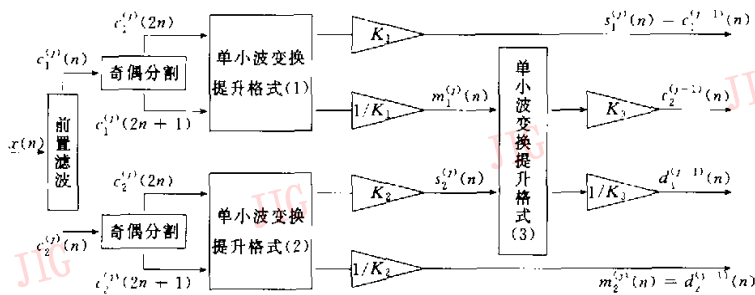


图 5 多小波变换提升格式的模型

3.2 Haar 多小波变换的提升格式

如果在图 5 所示的多小波变换的提升格式模型中,单小波变换提升格式模块 1、模块 2 和模块 3 都采用 Haar 单小波变换的提升格式(见图 2),那么就得到文献[8]给出的 Haar 多小波变换的提升格式,其中各个变量之间的关系为:

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1, C^{(j)}(n) = \begin{bmatrix} c_1^{(j)}(n) \\ c_2^{(j)}(n) \end{bmatrix}$$

$$S^{(j)}(n) = \begin{bmatrix} s_1^{(j)}(n) \\ s_2^{(j)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1^{(j)}(2n) + c_1^{(j)}(2n+1)}{2} \\ \frac{c_2^{(j)}(2n) + c_2^{(j)}(2n+1)}{2} \end{bmatrix}$$

$$M^{(j)}(n) = \begin{bmatrix} m_1^{(j)}(n) \\ m_2^{(j)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1^{(j)}(2n+1) - c_1^{(j)}(2n)}{2} \\ \frac{c_2^{(j)}(2n+1) - c_2^{(j)}(2n)}{2} \end{bmatrix}$$

$$C^{(j-1)}(n) = \begin{bmatrix} c_1^{(j-1)}(n) \\ c_2^{(j-1)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^{(j)}(n) \\ \frac{m_1^{(j)}(n) + s_2^{(j)}(n)}{2} \end{bmatrix}$$

$$D^{(j-1)}(n) = \begin{bmatrix} d_1^{(j-1)}(n) \\ d_2^{(j-1)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2^{(j)}(n) - m_1^{(j)}(n) \\ m_2^{(j)}(n) \end{bmatrix}$$

对于图象编码(Lossy Image Coding)来说, Haar 多小波变换没有什么实际应用的价值,这是因为 Haar 小波本身的缺陷所致。

3.3 D9/7 双正交多小波变换的提升格式

如果在图 5 所示的多小波变换提升格式模型中,单小波变换提升格式模块 1 和模块 2 都采用 D9/7 双正交(单)小波变换的提升格式(见图 3),并且舍去单小波变换提升格式模块 3,那么就得到 D9/7 双正交多小波变换的提升格式。通过实验发

现,这样构造的多小波变换要比常用的 GHM 多小波变换更为适合图象编码。

4 实验结果

本文先分别对 Lena 图象进行 Haar 多小波、D9/7 双正交多小波和 GHM 多小波变换,并统计变换后产生的各个子图象的能量分布,其结果列在表 1 中;然后,对这幅 Lena 图象和 Fruit 图象分别进行 Haar 多小波、D9/7 双正交多小波和 GHM 多小波图象编码,其编码后重建图象的压缩比和峰值信噪比结果列在表 2、表 3 中,其重构图象见图 6、图 7。

表 1 不同多小波在分解 Lena 图象一层时各子图占总能量的百分比

小波类型	LL(%)	LH(%)	HL(%)	HH(%)
Haar 多小波	99.70	0.180	0.100	0.017
D9/7 多小波	99.88	0.071	0.034	0.020
GHM 多小波	99.71	0.015	0.009	0.006

表 2 不同多小波在分解图象相同层时不同压缩比编码

压缩比	Lena 重构图象的峰值信噪比						单位:dB
	128	64	32	16	8	4	
Haar 多小波	23.2	24.2	26.3	29.6	33.0	37.4	
D9/7 多小波	27.3	29.7	32.48	35.1	37.7	42.3	
GHM 多小波	25.6	26.8	28.6	30.0	30.9	31.6	

表 3 不同多小波在分解图象相同层时不同压缩比编码

压缩比	Fruit 重构图象的峰值信噪比				单位:dB
	64	32	16	8	
Haar 多小波	26.3	29.4	34.5	37.3	
D9/7 多小波	29.5	35.1	39.2	46.6	
GHM 多小波	27.6	30.3	33.5	38.7	

GHM 多小波是最早发现、也是最为常用的多小波^[9],可以作为衡量其他多小波性能的参照。从表 1、表 2、表 3、图 6、图 7 可以看到,Haar 多小波不论在能量汇聚方面,还是在图象编码的应用方面都要远远逊色于 GHM 多小波,而本文构造的 D9/7 双正交多小波,不论在能量汇聚方面,还是在图象编码的应用方面又都要远远优于 GHM 多小波。



图 6 不同压缩比 D9/7 双正交多小波图象编码的 Lena 重构图象

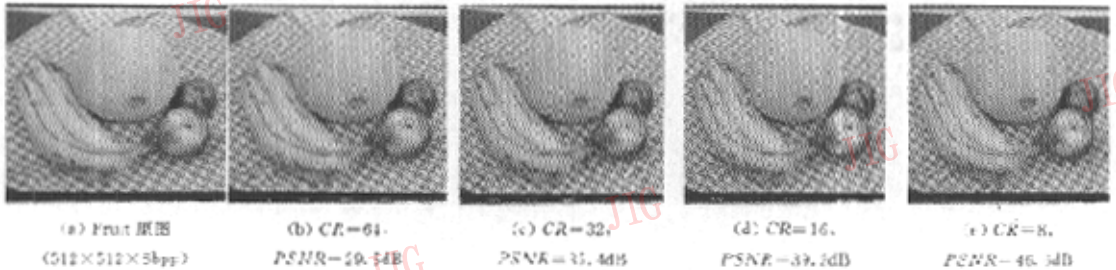


图 7 不同压缩比 D9/7 双正交多小波图象编码的 Fruit 重构图象

5 结束语

(1)提升格式的运用有如下两个不同的层次:

①用提升格式实现现有的多小波或单小波变换.在这个层次上,提升格式是一种比 Mallat 算法更为有效的多小波或单小波变换快速算法.

②用提升格式构造新的多小波或单小波变换.在这个层次上,提升格式提供了一个框架,人们可以根据实际需要更改这个框架的要素,从而构造新的多小波或单小波变换.

本文先用提升格式实现 Haar 多小波变换(属第1层次),然后据此提出多小波变换的提升格式模型,这个模型由若干个单小波变换的提升格式模块搭建而成;最后,本文给出了用基于 D9/7 双正交小波变换的提升格式模块来搭建的多小波变换实例(属第2层次),并把这样的多小波变换应用于图象编码,从而取得了比常用的 GHM 多小波图象编码更好的效果.

(2)本文是利用单小波变换的提升格式来构造多小波变换的提升格式,其中如果采用 Haar 单小波变换的提升格式来构造多小波变换的提升格式,则其得到的多小波变换称为 Haar 多小波变换;如果采用 D9/7 双正交单小波变换的提升格式来构造多小波变换的提升格式,则其得到的多小波变换称为 D9/7 双正交多小波变换.这里必须指出,这样的命名方法,仅在本文适用.

(3)多小波图象编码的研究方兴未艾.在理论上,多小波具有单小波所没有的一些优点.在实践中,特别是在图象编码中,怎样运用多小波的这些优点来提高编码增益,将是一个值得深入研究的课题.

参考文献

- 1 Sweldens Win. Wavelets and the lifting scheme: A 5 minute tour [J]. Zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik, 1996, 76(Suppl. 2): 41~44.

- 2 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation[J]. IEEE Trans on PAMI, 1989, 11(3): 674~693.
- 3 FCD15444-1, JPEG2000 [S/OL]. <http://www.jpeg.org/FCD15444-1.htm>
- 4 Strela V. Multiwavelets: Theory and application[D]. Ph. D. Thesis. Massachusetts: MIT, 1996.
- 5 Strela V, Heller P N, Strang G *et al.* The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 1999, 8(4): 548~563.
- 6 Daubechies I, Sweldens Wim. Factoring wavelet transforms into lifting steps[R]. Technical Report, Bell Laboratories, Lucent Technologies, 1996.
- 7 Cohen A, Daubechies I. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. Communication on Pure and Applied Math., 1992, 15(5): 784~814.
- 8 Kwok-Wai Cheung, Chun-Ho Cheung, Lai-Man Po. A novel multiwavelet-based interger transform for lossless image coding [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing, Kobe Japan, 1999, 1: 444~447.
- 9 Geronimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expressions based on several scaling functions[J]. Journal of Approximation Theory, 1994, 78(2): 373~401.



曾剑芬 1977年生,中山大学通信与信息系统专业硕士研究生.研究方向为多媒体数据处理与传输.



马争鸣 1957年生,1989年获清华大学模式识别与智能控制专业博士学位,现为中山大学电子与通信工程系副教授.主要研究兴趣为多媒体数据处理与传输.