

一种基于整体变分的图象修补算法

许威威 潘志庚 张明敏

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室虚拟现实和多媒体研究室, 杭州 310027)

摘要 图象修补是图象恢复研究中的一个重要内容, 它的目的是根据图象现有的信息来自动恢复丢失的信息, 可以用于旧照片中丢失信息的恢复. 由于图象中的边缘代表了图象的重要信息, 所以在设计修补算法时, 必须着重考虑边缘的恢复. 采用整体变分模型设计了一个图象修补算法. 整体变分模型能够模拟人的低层视觉, 在修补图象时可以恢复图象中的边缘, 数值实验表明, 该模型能够较好地恢复待修补区域的信息, 但是受修补区域大小的影响, 同时又采用了一种向前传播操作来缩小修补区域.

关键词 整体变分 图象修补 图象恢复

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2002)04-0351-05

Image Inpainting Based on Total Variational Model

XU Wei-wei, PAN Zhi-geng, ZHANG Ming-min

(Virtual Reality and Multimedia division, CAD&CG State Key Lab ZheJiang University, Hangzhou 310027)

Abstract Image inpainting is an important research topic in the area of image restoration, its objective is to restore the lost information according to around image information, which can be used to restore old photo. Because edge information of image is very important, it is prior to take edge information restoring into account while designing image inpainting algorithm. Based on total variational model, a digital image inpainting algorithm is presented in this paper. Total variational model can simulate low level human vision, during the process of image inpainting, which can restore edge features in image. Numerical experiment results show that this model can restore the information in inpainting area fairly well, but it will be disturbed by the size of inpainting region, so, an information propagation method is used first to shrink the size of inpainting region.

Keywords Total variation, Image inpainting, Image restoration

0 引言

图象修补是一项古老的艺术, 欧洲文艺复兴时期, 为了恢复美术作品中丢失或被损坏的部分, 同时保持作品的整体效果, 开始进行对中世纪的美术品的修复, 其主要是填补美术品上所出现的裂痕或沟^[1]. 从数学的角度来看, 图象修补就是要根据空白区域周围的信息将图象添入空白区域中, 因此, 图象修补属于图象恢复的研究. 图象修补可应用于旧照片中丢失信息的恢复和图象中多余物体的去除, 其

通常是先用掩码(MASK)确定需要修补的区域, 然后根据修补区域周围的信息用图象修补算法自动恢复区域中的信息.

在设计修补算法之前, 有必要考虑一下人的视觉是如何来修补图象的. 计算机视觉中有一个结论, 即人是根据其生活中积累的经验来感知世界的. 人们经常根据其经验对周围环境中被遮挡物体的形状做出一个最佳猜测, 如图 1 所示, 对于图 1(b), 人们的感受是 E 字, 而对图 1(a), 人们的感受可能是 2 个 E 字, 这就说明人的猜测是通过尽量延长图象中的边缘来恢复被遮挡物体的形状, 同时, 遮挡物体的

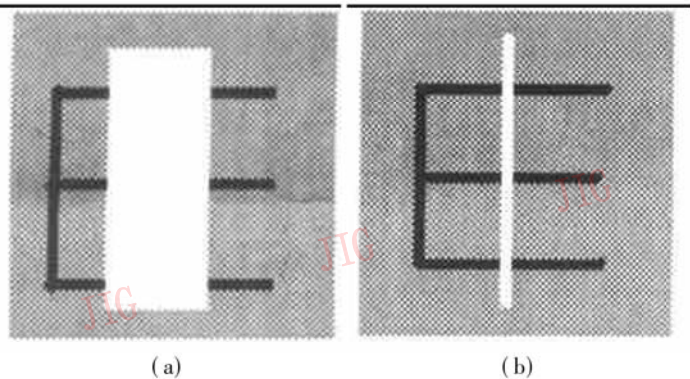


图1 被遮挡物体的猜测

大小也可能影响人的判断,因此,修补算法应该尽量模拟这种效果.

假设图象是连续光滑的二维函数,则可以采用数学上的一些模型来进行插值,得到空白区域中图象函数的值,从而恢复修补区域的信息,较常用的模型是 Laplace 方程.这种方法通常称为调和(harmonic)法,它是根据修补区域的边界信息(可以当作 Dirichlet 边值),用差分法得到对图象进行插值的公式,但图象效果并不理想.原因很显然,现实生活中的图象有很多的边缘信息,图象并不是处处连续的,而且修补应尽量恢复被破坏的边缘,因此采用 Laplace 方程不能得到最佳效果.

文献[2]采用纹理综合的方法来进行图象的修补,它可以让用户选择纹理来添充修补区域,而对覆盖不同纹理的修补区域,则要求首先进行图象的分割,以保证修补的正确性.这种方法操作复杂,而且耗时较长.文献[1]采用一种由粗到精的方法来估计等光强线方向,并采用传播机制将信息传播到待修补区域内,这种方法能够修补边缘,效果较好,但是很难在数学上给出严格的说明.

另一个模拟人眼恢复图象中边缘的有效办法是优化一个图象的能量函数,但困难的是如何选取能量函数,本文选取了图象恢复领域中, Rudin 和 Osher 提出的整体变分(Total Variational)模型^[3](以下简称 TV 模型)作为能量函数,该模型能起到延长边缘的作用,从而适用于图象修补,因修补时只需用户给出待修补区域的掩码,所以操作简单.

文献[4]采用动态规划来求解等光强线方向,求争所需时间比较长;文献[5]、文献[6]以点扩展函数和可加白噪声为图象的退化模型,对空域图象恢复模型中的正则化算子进行自适应修改,以提高图象恢复质量^[5],或使用局部最大熵恢复图象^[6],这些方法对受损不大的图象的修补也有很好的效果.

1 TV 模型的导出

图2中 D 是待修补区域, E 是包含 D 的一个区域,定义 E 上的一个能量函数

$$R(u) = \int_{E \setminus D} r |\nabla u| dx dy \quad (1)$$

其中, u 是图象函数, r 是一个实函数,当 $x \geq 0$ 时, $r(x) \geq 0, \nabla u$ 为梯度.

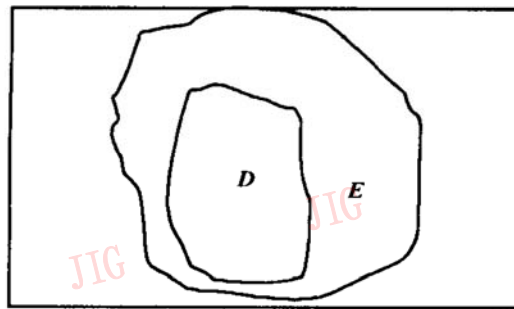


图2

为达到同时去噪的效果,式(1)应满足以下约束条件

$$\frac{1}{\text{area}(E)} \int_{E \setminus D} (u - u^{(0)})^2 dx dy = \delta^2 \quad (2)$$

式中,假定 E 中的初始信号 $u^{(0)}$ 是被白噪声污染的, δ 是白噪声的标准偏差.

要满足修补边缘的条件,必须选择适当的 r 函数.对于一个阶跃边缘,在边缘处的梯度是一个 Delta 冲激函数,如果要恢复被破坏的阶跃边缘,就要求

$$\int_{E \setminus D} r(\delta) dx dy < \infty \quad (3)$$

即对于阶跃边缘,式(1)是有极值的,假定 $r(s) = s^\alpha +$ 低阶项,根据式(3),当 $s \rightarrow +\infty$ 时,要求 $\alpha \leq 1$,选择 $\alpha = 1$,即得到图象恢复领域中著名的 TV 模型

$$\int_{E \setminus D} |\nabla u| dx dy \quad (4)$$

对于阶跃边缘,式(4)变为

$$\int_{E \setminus D} \delta dx dy \quad (5)$$

由冲激函数的性质,式(5)是有界的,因此,上述模拟视觉效果的问题可化为以式(2)为约束条件时,式(4)的约束泛函极值问题,根据 Euler-Lagrange 方程(为简化结果式子,取乘子为 $\lambda/2$),得到

$$0 = - \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda (u - u^{(0)}) \quad (6)$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda & z \notin D \\ 0 & z \in D \end{cases} \quad (z \text{ 为像素点})$$

式中, λ_e 为乘子在区域 E 内的取值.

由于待修补区域内的信息已丢失, 所以在修补区域内部无法做去噪声操作. 可以看出, 在待修补区域 D 内部, 该模型仅进行了各向异性的扩散操作 (Anisotropic Diffusion), 而在修补区域外部, 模型可以同时进行消除噪声的操作.

值得注意的是, 待修补区域的尺度对 TV 模型的最最终效果有一定的影响. 以图 3 为例来说明这一点, 一条黑色的条带与一条灰色的条带垂直相交, 其相交区域 D 为待修补区域, 记灰色条带区域的颜色为 a , 黑色条带区域的颜色为 b .

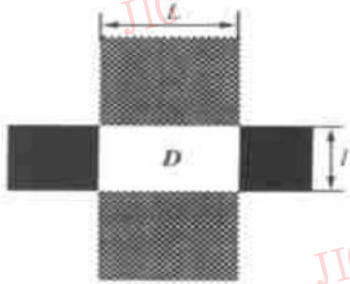


图 3 尺度对 TV 模型的影响

很容易看出区域 D 内颜色为常数时 (因为本例中无噪声, 所以不考虑去噪声操作), TV 模型有最优解. 假定区域 D 内最终颜色为 c , 则根据 TV 模型, 区域 D 内的梯度总和为

$$2(|c - a|L + |c - b|l) \quad (7)$$

不难证明, 由于 $L > l$, 使式 (7) 取最小值的 c 应该为 a , 也就是尺度较大的条带的颜色将被填充到区域 D 内. 在数值实验中也发现, 当待修补区域的尺度大于边缘区域的尺度时, 修补的结果是边缘被断开, 因此, 应首先采用文献 [1] 中的向前传播操作来缩小待修补区域, 以利于 TV 模型恢复边缘, 即首先估计等光强线的方向, 随后将图象的信息 (如 Laplace 算子) 沿当前等光强线方向进行投影, 将图象信息过渡到待修补区域内, 然后经过迭代, 可以由粗到精细地估计等光强线的方向, 缩小修补区域.

2 数值计算实现

本文采用半点格式来进行离散化, 图 4 中 O 是目标像素, N, S, E, W 是 O 的邻域节点, 记 $A_o = \{N, S, E, W\}$, e, n, w, s 是假想的中间像素, 引入中间像素的目的是为了数值计算的稳定和减少误差, 记 $v = (V^{(1)}, V^{(2)}) = \nabla u / |\nabla u|$, 则 div 函数可以离散化为

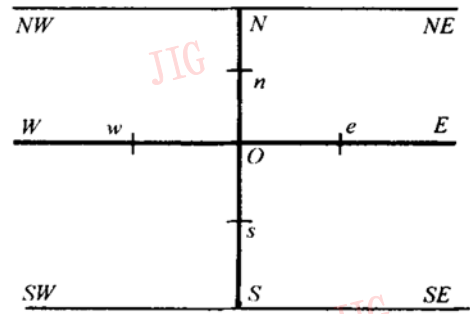


图 4

$$\begin{aligned} \text{div}(v) &= \frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial y} \\ &\cong \frac{V_e^{(1)} - V_w^{(1)}}{h} + \frac{V_s^{(2)} - V_n^{(2)}}{h} \end{aligned}$$

其中, e, w, n, s 是中间像素, h 为步长, 对上式中 e, w, n, s 处的导数值和梯度需做进一步的计算, 以 e 象像为例

$$\begin{aligned} V_e^{(1)} &= \frac{1}{|\nabla u_e|} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_e = \frac{1}{|\nabla u_e|} \frac{u_E - u_O}{h} \\ |\nabla u_e| &= \frac{1}{h} \sqrt{(u_E - u_O)^2 + ((u_{NE} - u_{SE})/2)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

以上采用中心差分对 e 处的偏导和梯度值作了估计, 它的优点是旋转 $\pi/2$ 角度后其值保持不变, 在 w, n, s 处的偏导和梯度可做同样的估计. 因此, 式 (6) 可以离散化为

$$0 = \sum_{\alpha \in A_o} \frac{1}{|\nabla u_\alpha|} (u_o - u_\alpha) + \lambda(O) (u_o - u_o^0) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\alpha &= \frac{1}{|\nabla u_\alpha|} \quad \alpha \in A_o \\ h_\alpha &= \frac{\tilde{u}_\alpha}{\sum_{\alpha \in A_o} \tilde{u}_\alpha + \lambda(O)} \\ h_\beta &= \frac{\lambda(O)}{\sum_{\alpha \in A_o} \tilde{u}_\alpha + \lambda(O)} \end{aligned} \quad (10)$$

则根据式 (10), 式 (9) 可写为

$$u_o = \sum_{\alpha \in A_o} h_{\alpha} u_\alpha + h_{\beta} u_o^{(0)} \quad (11)$$

将式 (11) 改写成 Gauss-Jacobi 迭代形式

$$u_o^N = \sum_{\alpha \in A_o} h_{\alpha}^{N-1} u_{\alpha}^{N-1} + h_{\beta}^{N-1} u_o^{N-1} \quad (12)$$

由于 $h_{\alpha} + h_{\beta} = 1$, 矩阵的谱半径是小于等于 1 的, 所以式 (11) 是稳定的.

根据式 (12), 算法的步骤如下:

- (1) 读入图象和掩码信息.
- (2) 对掩码中的每一个像素, 执行第 3、4、5 步.
- (3) 计算其周围中间像素的一阶导数值和梯度的模值.

(4) 若像素位于待修补区域之外, 则置 $\lambda(O)$, 否则, 置 $\lambda(O)$ 为零.

(5) 计算 h_α 和 h_β , 得到新的像素值, 并保存到新图象中.

(6) 判断新图象与旧图象之间的差值, 若小于阈值, 则以新图象代替旧图象, 退出, 否则转第2步.

本算法执行时, 需要用户给定修补区域 D 及包含 D 的一个区域 E 的掩码.

3 实验结果

本文的数值实验用 Visual C++ 完成, 机器的内存为 64M, CPU 为 PIII667MHz, 算法的执行时间大

约为 120s.

图 5 为该算法修补阶跃边缘的实验结果, 图 5(a) 中的矩形是待修补区域, 图 5(b) 中的带噪声信号的椭圆是待修补区域, 噪声信号是程序给修补区域赋的初值. 从图中可以看出, TV 模型修补的结果在修补边缘上明显优于 Laplace 方程修补的结果, 因使用 Laplace 方程在边缘上造成了模糊.

图 6 是用该算法去除图象中的文字得到的效果, 图 7 是对旧照片丢失信息恢复的模拟, 其中所画的白色线条是待修补区域, 这个例子中使用了文献 [1] 中的传播操作来作为辅助手段, 文字与白色线条是通过掩码加在原始图象上的. 图 8 用该算法去除图象中不需要的物体.

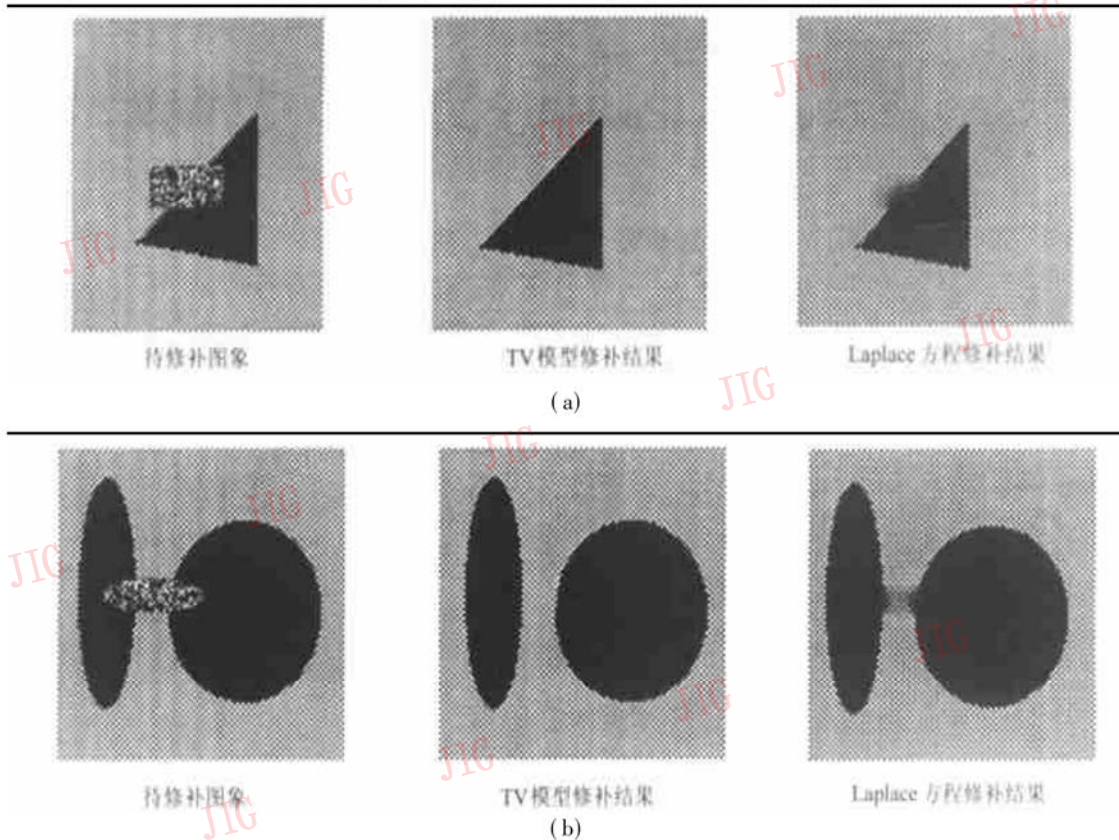


图 5 阶跃边缘修补结果



图 6 文字的去除



图 7 旧照片信息恢复模拟

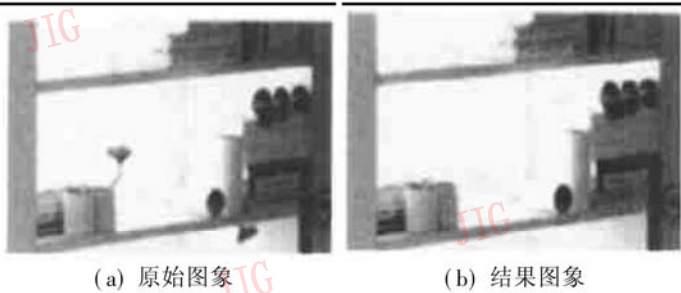


图 8 去除图象中物体(花)的效果

4 结束语

本文采用的 TV 模型能够尽量地恢复图象中的边缘信息, 数值实验结果也表明了这一点, 但是 TV 模型能够恢复的边缘的尺度须大于修补区域, 否则修补效果不佳, 这也是图 5 的实验首先使用文献[1]向前传播操作的原因. 另外, 本文的算法不适用于纹理图象, 在纹理图象的修补工作上, 纹理综合是合适的算法, 因此, 进一步的研究工作将考虑结合图象的统计特征来进行修补, 以便使本文的算法适合于更多的图象, 可以考虑在能量函数中加入图象的统计特征项, 使得修补后的图象在边缘特征上和统计特征上同时取得极值, 以逼近原始图象.

参 考 文 献

- 1 Marcelo Bertalmio, Guillermo Sapiro, Vicent Caselles *et al.* Image inpainting[A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'2000[C], ACM Press, 2000: 411~ 424.
- 2 Hirani A, Totsuka T. Combining frequency and spatial domain information for fast interactive image noise removal[A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'96[C], ACM Press. 1996: 269~ 276.
- 3 Rudin L, Osher S. Total variation based image restoration with

- free local constraints[A]. In: Proc. 1st IEEE ICIP[C], Austin, 1994, 1: 31~ 35.
- 4 Masnou S, Morel J M. Level-lines based disocclusion[A]. In: 5th IEEE Int'l Conf. on Image Processing[C], Chicago, 1998, 3: 259~ 263.
- 5 陈武凡, 李超, 陈和晏. 空域中退化图象恢复的有效算法[J]. 计算机学报, 1999, 22(7): 1267~ 1271.
- 6 王学良, 黄廉卿. 改进的局部最大熵图象恢复算法[J]. 中国图象图形学报, 2000, 5A(7): 589~ 592.



许威威 1975 年生, 博士研究生. 主要研究方向为虚拟现实、智能虚拟环境.



张明敏 1968 年生, 硕士, 工程师. 主要研究方向为虚拟现实、图象压缩.



潘志庚 1965 年生, 研究员, 博士生导师. 主要研究方向为虚拟现实、分布式图形、智能虚拟环境.