

# 双正交小波变换的算子矩阵及去相关性能分析

孟鸿鹰 王志华

(清华大学电子工程系, 北京 100084)

**摘要** 利用基于推选体制(Lifting Scheme)的小波变换实现算法,构造出了与具有紧支集的双正交小波滤波器对应的小波变换和逆小波变换的算子矩阵,这些矩阵是大小与信号长度相等的可逆常数矩阵,这些矩阵为从理论的角度研究双正交小波滤波器的性能提供了一个工具,利用这些矩阵,从理论的角度对不同的双正交小波滤波器的去相关性能进行了分析比较研究,并和其他常用的正交变换,如DCT、DFT进行比较,给出了定量的比较结果,比较结果表明,在高压缩比的情况下,(9,7)滤波器具有好的性能,而在中等压缩比下,(5,3)滤波器有比较好的性能。

**关键词** 小波变换 推选体制 矩阵 图象压缩

**中图分类号:** TN919.8 TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2001)12-1165-05

## Matrices of the Biorthogonal Wavelet Transforms Operators and their De-correlation Performance Analysis

MENG Hong-ying, WANG Zhi-hua

(Department of Electronics Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** In this paper, based on the Lifting Scheme algorithms of the wavelet transforms with the compactly supported biorthogonal filters, the operator matrices of the forward wavelet transforms and the associated inverse wavelet transforms are constructed. These matrices are the inversive constant ones and have the size as the same as the length of the signal. These operator matrices are very convenient tools to analyze the properties of the biorthogonal wavelet filters in a theoretical way. These operator matrices can also be used for analysis the performance of the biorthogonal wavelet filters in different applications. In this paper, by these matrices, the de-correlation performance of several biorthogonal wavelet filters in data compression application is studied in a view of theoretical analysis. The qualified quantities are given in comparison with other popular orthogonal transforms such as DCT and DFT. Experimental results demonstrate that different wavelet filters have different performance in the data compression applications. In the case of the high compression ratio, (9,7) filter has the better performance while in the case of the moderate compression ratio, (5,3) filter has the better performance.

**Keywords** Wavelet transform, Lifting scheme, Matrix, Image compression

## 0 引言

近年来,小波变换在图象处理领域得到了广泛的应用,特别是在静止图象压缩方面,取得了巨大的成功.目前小波变换一直是图象压缩编码技术中的研究热点,而且已经占据了主导地位.美国联邦调查局(FBI)的指纹压缩标准,是最早采用小波变换的

图象压缩标准,而新一代静止图象压缩标准 JPEG2000<sup>[1]</sup>将是基于小波变换的国际标准.

小波的推选体制构造方法是一种完全基于空间的构造方法,主要用来构造第二代小波变换(即本质上不能通过伸缩和平移来得到小波基序列的小波变换),同时也提供了一种快速的小波变换实现方法. Daubechies 证明了现有的具有有限支集的小波变换都可以采用推选体制的算法来实现<sup>[2]</sup>.该算法非

常简单,与标准的 Mallat 算法<sup>[3]</sup>相比,计算量减少了一半,而且逆变换简单,意义明确,同时,边界处理也很容易,能够很好地实现信号的重构。对于有限长的数字信号而言,具有有限支集的小波变换和小波包变换在数学上都是线性变换,与 DCT、DFT 等正交变换一样,其变换算子可以用一个常数矩阵来表达,且该矩阵的大小和信号的长度相等。文献[4]中对具有有限支集的正交小波变换和小波包变换进行了研究,证明了在一定的条件下,这些矩阵是存在的,并且都是正交(实)矩阵,同时给出了这类矩阵的一般构造方法和规律性表达。

在进行图象压缩时,目前用得最多的是具有线性相位的双正交的小波滤波器。这些滤波器是由 Cohen、Daubechics 和 Feauveau 等人提出的具有有限支集小波滤波器<sup>[5]</sup>。这些滤波器由于具有线性相位,往往能够取得比较好的处理效果。目前, JPEG2000 中使用的小波滤波器都是这类滤波器。

长期以来,人们对这类滤波器性能的认识,基本上都是通过做实验的方法来得到的。由于实验条件的差异和使用场合的不同,往往只能得到一些局部的认识。本文利用了基于推选体制的小波变换实现方法,构造出了具有有限支集的双正交小波变换的算子矩阵。进而利用该矩阵,对这类小波滤波器在随机信号处理中的去相关性能,从理论上进行了比较分析,给出了定量的结果,这将对这类滤波器的认识 and 实际应用具有一定的指导意义。

### 1 双正交小波变换的算子矩阵构造

#### 1.1 基于推选体制的小波变换实现方法

推选体制的基本思想非常简单,它从一个被叫做“懒小波”(Lazy Wavelet)的小波函数入手,逐步添加新的基函数,一步一步地构造出光滑性更好、性质更加优良的小波函数。

基于推选体制的小波变换的分解和合成结构如图 1、图 2 所示。其中  $s_i(z)$  和  $t_i(z)$  为罗朗多项式,  $s_i(z)$  是推选因子,  $t_i(z)$  是对偶推选因子,  $K$  是一个非零常数,是个归一化因子。信号在进行小波分解的时候,首先被分为偶数部分和奇数部分,然后经过推选因子和对偶推选因子的作用,最后被归一化后就得到其低通分量(LP)和带通分量(BP)。合成过程如图 2 所示,这是分解过程的逆过程,非常简单。

例如,对于被广泛应用在图象处理中的双正交

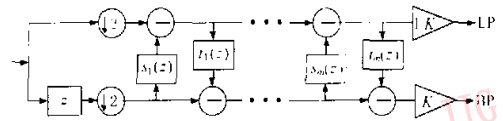


图 1 推举体制的小波变换分解结构

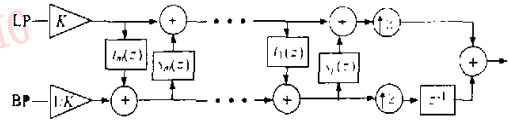


图 2 推举体制的小波变换合成结构

的(9,7)滤波器,可以得到如下的推选体制算法:

$$\begin{cases} s_i^{(0)} = x_{2k}, d_i^{(0)} = x_{2k-1} \\ d_i^{(1)} = d_i^{(0)} + \alpha \cdot (s_i^{(0)} + s_i^{(1)}) \\ s_i^{(1)} = s_i^{(0)} + \beta \cdot (d_i^{(1)} + d_i^{(0)}) \\ d_i^{(2)} = d_i^{(1)} + \gamma \cdot (s_i^{(1)} + s_i^{(2)}) \\ s_i^{(2)} = s_i^{(1)} + \delta \cdot (d_i^{(2)} + d_i^{(1)}) \\ s_i = \xi \cdot s_i^{(2)}, d_i = d_i^{(2)} / \xi \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  都是常数,  $\xi$  是归一化因子。

$$\begin{cases} \alpha = -1.586134342 \\ \beta = -0.0529801185 \\ \gamma = 0.8829110762 \\ \delta = 0.4435068522 \\ \xi = 1.149604398 \end{cases}$$

最后得到的  $s_i$  和  $d_i$  分别为小波分解的低频和低频分量。可以看出,这种算法非常简单,和标准的 Mallat 算法相比,计算量减少了一半,边界也很容易处理。另外,逆变换也非常简单,只需倒推回去即可。

#### 1.2 双正交小波变换的算子矩阵

对于常用的有限正交变换,如 DFT、DCT 等,它们的变换算子都可以用一个常数矩阵来表达。即,如果信号记为  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ ,变换后的信号记为  $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ ,则有

$$Y = H \cdot X \quad (2)$$

其中,  $H$  是一个大小为  $N \times N$  的常数矩阵。对于 DFT、DCT 等变换而言,  $H$  是一个酉矩阵,它的逆矩阵就是它的转置,信号的反变换非常容易得到实现。

从数学的角度来讲,有限长滤波器的双正交小波变换也是一个线性变换。采用矩阵的方式来表达该变换也能够有一些参考文献中看到,但是给出的这些矩阵往往都是无穷维矩阵,即它的大小并不是由信号的长度来决定,其中的关键在于边界处理。如果矩阵的大小与信号的长度一致,就需要保证变换后的

信号和原始信号的长度相等,同时要保证反变换后的重建信号和原始信号完全相同(在一定的舍入误差精度内)。这个条件实际上是很苛刻的。

大家知道,如果小波滤波器是有限长度的,那么按照小波变换的卷积实现算法,变换后的信号长度要比原始信号长,其只有在特殊的边界延拓方法下,才有可能满足上面的条件。经过研究发现,对于 Daubechies 的具有有限支集的正交小波变换,选择 Mallat 算法并采用周期延拓的边界处理方法,就可以满足上面的条件<sup>[1]</sup>。

经研究发现,对于双正交小波变换,很难找到一个统一的延拓方法,采用 Mallat 算法后能够满足上面的条件。而采用小波变换的推选体制的实现方法,该问题容易得到解决。这种算法对边界的要求很弱,采用多种边界延拓方法,如边界简单重复延拓、边界对称延拓、边界补零延拓等都可以满足上面的条件。下面,就采用简单的边界重复延拓方法,来构造出这些双正交小波滤波器的算子矩阵,即构造一个代表双正交小波变换的常数矩阵  $H$ ,能够满足公式(1)。

首先,从纯数学的角度来看,一个有限长的双正交小波变换算子是一个线性算子,即如果将该映射记作  $F$ ,则有

$$Y = F(X)$$

进一步可以写为

$$\begin{aligned} Y &= F(X) = F(I \cdot X) \\ &= F\left[\sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot e_i\right] = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot F(e_i) \\ &= [F(e_0), F(e_1), \dots, F(e_{N-1})] \cdot X \quad (3) \end{aligned}$$

其中,  $I$  是一个  $N \times N$  的恒等矩阵,  $e_i (i=0, 1, \dots, N-1)$  是它的列向量,公式(3)中的推导利用了该算子的线性性质。对比式(2)和式(3),可以得到这样的结论:对恒等矩阵的所有列向量做小波变换,其得到的矩阵就是相应的算子矩阵  $H$ 。

需要说明的是,在式(3)中,  $F(e_i)$  的长度为  $N$ , 它和信号  $e_i$  的长度是相同的,算子矩阵  $H$  是一个  $N \times N$  的方阵。也就是说,这里的函数  $F$  本身包含了边界处理。例如,对于双正交的(9,7)滤波器,利用迭代计算公式

$$W_{N \times N} = \begin{bmatrix} A_{2^j \times 2^j} & & & \\ & I_{2^{j-1} \times 2^{j-1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{2^{j-1} \times 2^{j-1}} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_{2^{j-1} \times 2^{j-1}} & & & \\ & I_{2^{j-2} \times 2^{j-2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{2^{j-1} \times 2^{j-1}} \end{bmatrix} A_{2^j \times 2^j}$$

每个分块矩阵都是块对角矩阵,对角线第一个子

式(1),随便选择一种边界延拓方法,都可以保证变换后的信号长度是和原始信号的长度相等。而如果采用卷积方式的小波变换算法,那么只有对特殊的双正交滤波器(如对称性)采用特殊的延拓方法(奇或者偶对称延拓)才能满足这一要求。更重要的是,虽然  $F(e_i)$  的长度为  $N$ ,但仍然可以没有误差地恢复出  $e_i$  来,这一要求也可以利用迭代计算公式(1),选择相同的边界延拓方法来满足,只需将每个步骤中的旧值从新值中解出来,从最后一步开始向第 1 步倒推回去即可。

文献[4]的研究表明,对于具有有限支集的正交小波变换,得到的算子矩阵是正交矩阵(因为滤波器系数是实数),它们的逆矩阵就是算子矩阵的转置。这和 DFT、DCT 等许多有限正交变换的算子矩阵的情形完全相同。

采用基于推选体制的双正交小波变换算法,对恒等矩阵的列向量做小波分解,就可以得到一系列常数矩阵,分别为相应的算子矩阵。采用不同的双正交滤波器,得到的算子矩阵将会有所不同。这些算子矩阵将会完全代表相应小波滤波器的特征。经研究发现,对于有限支集的双正交小波变换,得到的算子矩阵都是非奇矩阵(可逆矩阵)。利用推选体制的逆小波变换实现方法,它们的逆矩阵可以采用同样的方式得到。

在采用上面的方法构造双正交小波变换的算子矩阵的过程中,发现了一些特点和规律性,将它们归纳如下:

假设信号的长度为  $N = 2^j$ , 其中  $J$  为某一自然数。

有限支撑的双正交小波变换的算子矩阵可以通过以下两步得到:

(1) 对于所有的  $2^j (j=1, \dots, J)$  维的单位矩阵  $I_{2^j \times 2^j}$  的所有列向量,按照边界简单重复的延拓方法,采用有限支撑的双正交小波滤波器和推选体制的小波变换实现方法分解一次,得到的一系列矩阵,分别记为  $A_{2^j \times 2^j} (j=1, \dots, J)$ 。

(2) 分解  $j(j=1, \dots, J)$  层小波变换的算子矩阵  $W_{N \times N}$  为如下形式的分块矩阵的连乘积

矩阵就是分解一次的变换矩阵  $A_{2^j \times 2^j} (j=1, 2, \dots, J)$ ,

其他对角线的子矩阵是相应维数的一些单位矩阵。

如果将分解一次的变换矩阵  $A_{2^j \times 2^j} (j=1, \dots, J)$  的逆矩阵记作  $A_{2^j \times 2^j}^{-1} (j=1, \dots, J)$ , 那么利用推选体制

的算法是很容易实现的, 则算子矩阵  $W_{N \times N}$  的逆矩阵  $W_{N \times N}^{-1}$  具有下面的表达式:

$$W_{N \times N}^{-1} = A_{2^J \times 2^J}^{-1} \begin{bmatrix} A_{2^{J-1} \times 2^{J-1}}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{2^{J-1} \times 2^{J-1}} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_{2^{J'-1+1} \times 2^{J'-1+1}}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{2^{J'-1+1} \times 2^{J'-1+1}} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & I_{2^1 \times 2^1} \end{bmatrix}$$

## 2 双正交小波滤波器的去相关性分析比较

在随机信号分析处理中, 对信号进行变换的目的就是要改变信号某个方面的特征, 使得能够进一步对信号进行处理。而在图象压缩中, 变换的目的就是去相关。在利用小波变换进行图象压缩时, 人们往往喜欢选择使用具有有限支集和线性相位的双正交小波滤波器。这些滤波器往往能够取得比较满意的处理效果。

用记号  $Bi_{m,n}$  来代表双正交的小波滤波器, 其中  $2$  个参数  $m$  和  $n$  分别表示分析滤波器和合成滤波器消失矩的阶数。下面对  $Bi_{1,1}, Bi_{1,3}, Bi_{1,5}, Bi_{2,2}(5,3$  滤波器),  $Bi_{2,4}, Bi_{2,6}$  及  $Bi_{4,4}(9,7$  滤波器) 的去相关性进行分析研究。

如果变换用矩阵  $C$  表示, 信号的协方差矩阵用  $K_s$  表示, 则变换域的协方差矩阵  $\tilde{K}_s$  为

$$\tilde{K}_s = C \cdot K_s \cdot C^T$$

在性能分析中, 一般选择的标准输入信号是一阶平稳马尔可夫过程的取样数据, 它的协方差矩阵  $K_s$  可表示为

$$K_s = (\rho^{|i-j|}), i, j = 0, 1, \dots, N-1, |\rho| \leq 1$$

即:

$$K_s = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{N-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \rho^{N-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $N$  是信号的长度,  $\rho$  是相关系数。在下面的实验中, 这个信号被取为参考信号。事实上, 小波变换具有时域和频域的局部集中性质, 它对信号的去相关作用表现在时域的去相关作用和频域的去相关作用两个方面。而 DFT、DCT 等正交变换只有频域的去相关作用。为了能和常用的正交变换进行比较, 选择输入

信号为典型的平稳信号, 研究的仅仅是小波变换在频域的去相关作用。虽然只是一个方面, 但也在一定程度上反映了双正交小波变换的去相关能力。

选取参数  $\rho=0.9$ , 如果选择的变换是  $K-L$  变换, 则变换域的协方差矩阵  $\tilde{K}_s$  为对角阵; 如果选择的是其他的变换, 则  $\tilde{K}_s$  是一个近似的对角阵。为了更明确地说明这个事实, 定义一个指标  $R$ , 它代表对角线元素的能量占总能量的百分比, 即

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N |\tilde{K}_s(i,i)|^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\tilde{K}_s(i,j)|^2}$$

通过对双正交的小波滤波器做仿真实验, 给出了对于量化的指标, 将其和常见的正交变换相应的量化值进行比较, 实验结果见表 1。从表 1 可以看出,  $Bi_{4,4}$  和  $Bi_{1,1}$  对角线元素的能量比较大。

表 1 变换域的协方差矩阵的对角线元素的能量百分比

变换	$Bi_{1,1}$	$Bi_{1,3}$	$Bi_{1,5}$	$Bi_{2,2}$	$Bi_{2,4}$	$Bi_{2,6}$	$Bi_{4,4}$	DFT	DCT
$R$	0.3628	0.9514	0.9491	0.8910	0.9603	0.9578	0.9688	0.9774	0.9844

对于正交变换来说, 当变换域的对角线元素  $\tilde{K}_s(i,i)$  由大到小排列, 即  $\tilde{K}_s(0,0) \geq \tilde{K}_s(1,1) \geq \dots \geq \tilde{K}_s(N-1,N-1)$  时, 正交变换在数据压缩和特征提取的均方误差可达到最小。当  $i$  比较大时, 随着  $i$  的增大,  $\tilde{K}_s(i,i)$  下降得越快, 说明正交变换的性能越好, 因此, 它经常作为衡量一种正交变换性能的很重要的指标。

将常用有限支撑双正交小波变换滤波器下的变换域对角线元素归一化后(保持它们的和相等)由大到小排列, 并和常用的正交变换 DCT 和 DFT 进行比较(表 2)。

在进行数据压缩的时候, 一般会舍弃一些冗余的信息, 对应于表 2, 将只保留一些对角线元素比较大的元素分量。压缩比越高, 保留的分量越少。从上面的结果可以看出, 在双正交的小波变换滤波器家族中, 消失矩较高的  $Bi_{4,4}(9,7$  滤波器)在极低码率

表 2 变换域的协方差矩阵的对角线元素由大到小排列

排列序号	变换								
	Bi1.1	Bi1.3	Bi1.5	Bi2.2	Bi2.4	Bi2.6	Bi4.4	DFT	DCT
9	9.835	9.739	9.670	9.130	8.928	8.891	10.514	9.835	9.835
1	2.536	2.608	2.628	4.043	3.911	3.953	2.345	1.831	2.935
2	0.861	0.907	0.931	1.103	1.179	1.187	1.170	1.834	1.211
3	0.864	0.907	0.931	0.682	0.728	0.739	0.498	0.519	0.581
4	0.275	0.281	0.288	0.286	0.320	0.321	0.368	0.519	0.348
5	0.275	0.281	0.288	0.155	0.179	0.181	0.185	0.250	0.251
6	0.275	0.268	0.269	0.153	0.178	0.181	0.185	0.250	0.169
7	0.276	0.268	0.269	0.145	0.173	0.173	0.159	0.155	0.130
8	0.100	0.093	0.091	0.066	0.080	0.079	0.127	0.155	0.105
10	0.100	0.093	0.091	0.034	0.042	0.042	0.065	0.113	0.088
16	0.100	0.093	0.091	0.034	0.042	0.042	0.065	0.113	0.076
11	0.100	0.093	0.091	0.034	0.042	0.042	0.065	0.091	0.068
12	0.100	0.093	0.091	0.034	0.042	0.042	0.065	0.091	0.062
15	0.100	0.093	0.091	0.034	0.042	0.042	0.065	0.081	0.057
14	0.100	0.093	0.091	0.034	0.042	0.042	0.065	0.081	0.055
15	0.100	0.093	0.091	0.034	0.042	0.042	0.059	0.078	0.053

下(高压缩比)压缩时,表现出了非常好的性能;而在适度码率压缩时,Bi2.2(5,3 滤波器)表现出了较好的性能.如果结合实验的两个指标,采用小波变换进行图象压缩时,Bi4.4 滤波器应该比较好的选择,这和实际的实验结果也是相符的.另外,也可看出,DCT 有比较好的性能,原因是测试信号是相关性较强的平稳时间信号,DCT 是处理这类信号最好的一种正交变换.

### 3 结 论

本文的研究对象是具有紧支集的双正交小波滤波器.通过对其基于推选体制的小波变换实现算法的研究,构造出了与这些小波滤波器对应的小波变换的算子矩阵.该算子矩阵是大小与信号长度相等的可逆常数矩阵,它们在数学上完全代表了相应的小波变换,具有一定的理论价值,这在以前的文献中尚未看到过.有了这些算子矩阵,可以更方便地研究双正交小波滤波器的性质和特点.本文利用这些矩阵,从理论的角度对不同的双正交小波滤波器的去相关性性能进行了分析比较研究,并和其他常用的正交变换,如 DCT、DFT 进行比较,得到了定量的比较结果.比较结果说明,在高压缩比的情况下,(9,7)滤波器具有好的性能,而在适度压缩比下,(5,3)滤波器有比较好的性能.这个比较结果和以前对大量图象数据实验得到的结果是一致的.从数学的角度讲,这些算子矩阵是具有紧支集的双正交小波变换的另外一种更简单明了的表示形式,可以更方便地研究这类小波滤波器的性质.

### 参 考 文 献

- 1 Boliek M, Christopoulos C, Majani E. JPEG 2000 Part I Final Committee Draft Version 1.0 (ISO/IEC JTC1 SC29/WG1-N1646R)[S]. <http://www.jpeg.org/FC015444-1.htm#B/OL>.
- 2 Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. J. Fourier Anal. Appl. 1998,4(3):247~269.
- 3 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989,11(7):674~693.
- 4 Meng Hongying, Wang Zhihua, Liu Guizhong. Operation matrices of the compactly supported orthogonal wavelet (Packets) transforms[A]. In: Proceeding of 1999 International Symposium on Signal Processing and Intelligent System (ISSPIS99) 'M'. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1999:123~126.
- 5 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm. Pure Appl. Math. 1992,45(6):485~560.



**孟鸿鹰** 1968年生,先后于1991、1994和1998年获得西安交通大学理学学士、理学硕士和工学博士学位,随后进入清华大学电子科学与技术博士后流动站工作,2000年留校任教.主要研究领域包括小波变换理论与算法、数字视频与音频信号处理、神经网络、JPEG2000、集成电路设计等,已发表学术论文20余篇.



**王志华** 1960年生,先后于1983、1985、1990年获得清华大学工学学士、工学硕士和工学博士学位,现任清华大学电子工程系教授,从事集成电路设计、电子设计自动化、数字音频与视频信号处理等方面的研究工作.发表论文70余篇,3部专著和教材.