

基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面

林 兴 罗国明 张纪文

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘 要 为了解决 Catmull-Clark 细分曲面在工程上难以推广的问题,给出了一种基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面的算法. C-B 样条曲线是 B 样条曲线的拓广,但它们的形状依赖于参数 α . 由于新的曲面细分方法充分利用 C-B 样条能够精确表示圆、椭圆等规则形体的特性,因而使通过此方法生成的细分曲面,除了在奇异点处能保持二阶导数连续外,还能够像 C-B 样条曲线、曲面一样,精确地表示圆柱等常规曲面、统一工程曲面等的造型;同时它仍然保持细分曲面的造型特点,即能够解决 NURBS 曲面难以处理的任意拓扑结构的造型问题,另外,还可依靠控制参数 α 的调节作用来增加造型的自由度,而且当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,它们就退化成 Catmull-Clark 细分曲面. 在工程图形上的应用实例表明,这种算法简单、有效.

关键词 C-B 样条 C-曲线 细分曲面 Catmull-Clark 几何造型

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2002)09-0876-06

Catmull-Clark Subdivision Surfaces Modelling with C-B splines

LIN Xing, LUO Guo-ming, ZHANG Ji-Wen

(State Key Laboratory of CAD&CG, Department of Mechanical Engineering, Hangzhou 310027)

Abstract In order to overcome the difficulty in applying the Catmull-Clark subdivision surfaces in engineering, a new algorithm about Catmull-Clark subdivision surfaces based on C-B splines is presented. C-B splines curves are extension of B splines, they depend on a parameter α . By use of characteristics of C-B splines, for example, they can provide exact reproduction of circles and cylinders and they can be generated by subdivision scheme while keeping C^2 , a new surface scheme is generated. The limit surfaces generated by this surface scheme are C^2 except at extraordinary points. In conclusion, this method not only solves the problem of the precise representation of standard analytic shapes such as circle encountered by Catmull-Clark subdivision surfaces, but also overcomes the difficulty of generating surfaces on arbitrary topological meshes faced by NURBS. Meanwhile, the shapes of the subdivision surfaces can be adjusted using controlling parameter α and the particular case ($\alpha \rightarrow 0$) of this scheme is Catmull-Clark subdivision scheme. An application in engineering graphics demonstrates freedom and efficiency of this algorithm.

Keywords C-B spline, C-Curve, Subdivision surface, Catmull-Clark, Geometric modeling

0 引 言

Catmull-Clark 细分方法^[1]在国际上已成为图形学的研究热点,它在多媒体、图形显示上应用非常成功,DeRose 等把 Catmull-Clark 细分技术应用到 Pixar 动画电影作品“Geri's Game”^[2]中,就是

Catmull-Clark 细分在多媒体上应用的一个生动例子.但是在工程上,造型技术仍然停留在 NURBS 曲面上.其主要的原因是 Catmull-Clark 细分曲面是基于三次均匀 B 样条的,由于它不能精确地表示圆弧等^[3],因此 Catmull-Clark 细分曲面无法精确表示圆柱等常规工程曲面,因为这些规则曲面在工程中常常用到,所以如何既能使用 Catmull-Clark 细分

基金项目:国家自然科学基金项目(60073025)

收稿日期:2002-06-13;改回日期:2002-07-05

方法解决 NURBS 曲面不能处理的任意拓扑结构上的曲面造型问题,又能表示常规工程曲面呢?虽然 Sederberg 等已将 Catmull 算法推广到非均匀的场合^[4],但是因算法复杂,在工程上并不实用.然而由于 C-B 样条方程中基函数的改变和控制参数 α 的引入,可使 C-B 样条曲线曲面造型灵活,并且能精确表示工程上常用的圆、椭圆弧等规则曲面^[5,6];更值得注意的是,由于 C-B 样条曲线的细分公式和均匀 B 样条相似,并且当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,C-B 样条曲线的细分公式就变成了均匀三次 B 样条的细分公式.因此如果能用 C-B 样条来构造 Catmull-Clark 细分曲面,则不但能够像 C-B 样条曲面一样,可以精确地表示圆柱等常规曲面和统一工程曲面等的造型,而且仍然保持细分曲面的造型特点,即能够解决 NURBS 曲面难以处理的任意拓扑结构的造型问题.同时由于 Catmull-Clark 细分模式固定单一,因此如果用 C-B 样条来构造 Catmull-Clark 细分曲面,则会因控制参数 α 的调节作用,而使造型的自由度增加.

1 C-B 样条

1.1 C-B 样条曲线的定义和性质

C-B 样条曲线是指用 $[\sin t \ \cos t \ t \ 1]$ 代替三次均匀 B 样条曲线方程中的基 $[t^3 \ t^2 \ t \ 1]$ 来构造类似的基函数,以便生成与三次均匀 B 样条曲线相似的曲线.其定义用矩阵表示为

$$P_i(t) = \frac{1}{2\alpha(1-C)} (\sin t \ \cos t \ t \ 1) \times \begin{bmatrix} C & -(1+2C) & 2+C & -1 \\ -S & 2S & -S & 0 \\ -1 & 1+2C & -(1+2C) & 1 \\ \alpha & -2\alpha C & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \\ b_{i+3} \end{bmatrix}$$

其中, $i=0, 1, \dots, n-1$; $0 < \alpha \leq \pi$, $0 < t \leq \alpha$, $S = \sin \alpha$, $C = \cos \alpha$. $b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, b_{i+3}$ 为 C-B 样条曲线的控制顶点.将矩阵展开,即可得 C-B 样条曲线的多项式表示

$$P_i(t) = B_0(t) \times b_i + B_1(t) \times b_{i+1} + B_2(t) \times b_{i+2} + B_3(t) \times b_{i+3} \quad (1)$$

其中

$$B_0(t) = \frac{(\alpha-t) - \sin(\alpha-t)}{2\alpha(1-C)}$$

$$B_1(t) = B_3(t) - 2B_0(t) + \frac{\alpha-t}{\alpha}$$

$$B_2(t) = B_0(t) - 2B_0(t) + \frac{t}{\alpha}$$

$$B_3(t) = \frac{t - \sin t}{2\alpha(1-C)}$$

而 $B_0(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t)$ 则称为 C-B 样条曲线的基函数.

设给定 4 个控制顶点,当 α 在 $(0, \pi)$ 范围内变化时,就得到一族关于 α 的 C-B 样条曲线(图 1、图 2).当 α 趋近 0 时,C-B 曲线逼近三次均匀 B 样条曲线.由图 1、图 2 可知, α 对曲线的形状有调节作用:当 α 从 π 逐渐趋近于 0 时,则 C-B 样条曲线逐渐接近 B 样条曲线;当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,C-B 样条曲线就是三次均匀 B 样条曲线.由图 2 可见,当 α 变大时,曲率往四边形各边的中点分配.

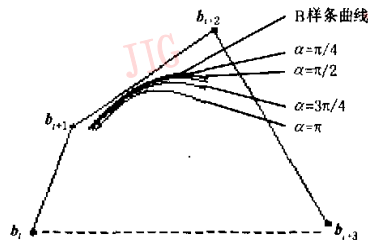


图 1 α 不同时的一簇 B 样条曲线

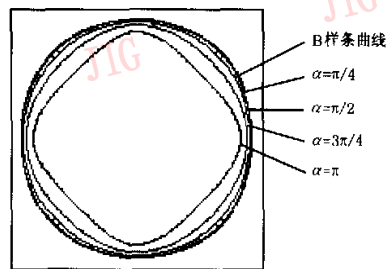


图 2 控制参数 α 的作用

同样 C-B 样条曲线具有与 B 样条曲线相似的性质^[5],例如端点特性: $P_i(\alpha) = P_{i+1}(0)$, $P'_i(\alpha) = P'_{i+1}(0)$, $P''_i(\alpha) = P''_{i+1}(0)$,即 C-B 样条曲线段之间满足二阶连续.而且其首、末端有与均匀 B 样条相类似的几何特性,可用几何作图法求得首、末端点的位置、一阶导矢和二阶导矢.同时由于 α 的作用,使 C-B 曲线可以方便地表示圆弧和椭圆弧等二次曲线弧.例如它们表示圆的规则如下:

假设 4 个控制顶点 b_0, b_1, b_2, b_3 , 满足 $|b_1 - b_0| = |b_2 - b_1| = |b_3 - b_2|$, 在以点 O 为圆心、 R 为半径的圆上, b_0b_1, b_1b_2, b_2b_3 3 边的中心角都为 α , 那么这些控制顶点所对应的以 α 为参数的 C-B 样条曲线为一条圆弧,其半径为 $r = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R$ (图 3). 据此可

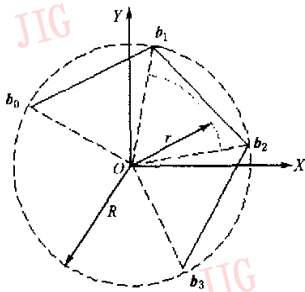


图3 C-B样条曲线表示图

得到如下结论:只要控制顶点在由其构成的边长为 \$l\$ 的等边 \$n\$ 边形上,那么当 \$\alpha=2\pi/n\$ 时,由 4 个顶点决定的 C-B 样条就是一条半径为 \$r=\frac{\cos(\alpha/2)}{\alpha}l\$, 圆心角为 \$\alpha\$ 的圆弧. 由于 \$\alpha<\pi\$, 因此必须 \$n>2\$. 同样可以用 C-B 样条来表示椭圆, 其表示规则可参考文献 [5].

1.2 C-B 样条曲线的分割

设 \$B(\alpha, b_0, b_1, \dots, b_{n+2}) (0 \le \alpha \le \pi), (n \ge 1)\$ 是一条任意给定的 C-B 样条曲线, 那么 \$B(\frac{\alpha}{2}, b'_0, b'_1, \dots, b'_{2n+2})\$ 是表示和 \$B(\alpha, b_0, b_1, \dots, b_{n+2})\$ 一样的一条曲线. 其中,

$$b'_{2i} = \frac{1}{2}(b_i + b_{i+1})$$

$$b'_{2i-1} = \frac{1}{4(1+C_k)}(b_i + (2+4C_k)b_{i+1} + b_{i+2}) \quad (2)$$

$$(i=0, 1, \dots, n+1)$$

$$C_k = \cos \alpha_k, \alpha_k = \alpha_{k-1}/2 \quad (k \ge 1)$$

式(2)就是 C-B 样条曲线的细分公式, 值得注意的是, 在新的 C-B 样条函数中, 新的控制参数 \$\alpha_k\$ 为原来 C-B 样条控制参数 \$\alpha_{k-1}\$ 的一半, 例如第 1 次细分时, \$C_1 = \cos \alpha_1, \alpha_1 = \alpha_0/2\$.

式(2)中, 当 \$\alpha \to 0\$ 时, \$C_k = 1\$, 此时式(2)就是三次均匀 B 样条的分割公式

$$b'_{2i} = \frac{1}{2}(b_i + b_{i+1}) \quad (i=0, 1, \dots, n, n+1)$$

$$b'_{2i+1} = \frac{1}{8}(b_i + 6b_{i+1} + b_{i+2}) \quad (i=0, 1, \dots, n-1, n)$$

(3)

笔者注意到, 当曲线的分割次数不断增加时, 由极限 \$\lim_{n \to \infty} (\frac{\alpha_k - 1}{2})^n = 0\$, 控制参数 \$\alpha_k \to 0, \cos \alpha_k \to 1\$, 那么 C-B 样条细分曲线就不断收敛于 B 样条曲线, 此时曲线 \$C^2\$ 连续. 具体的细分过程如图 4 所示, 图 4(a) 为控制多边形以及经过 1 次细分得到的三次均匀 B

样条曲线, 图 4(b) 为经过 5 次不断细分得到的三次均匀 B 样条曲线.

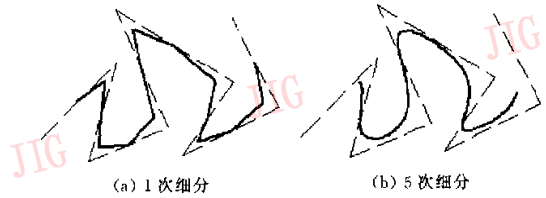


图4 控制多边形细分成三次均匀 B 样条曲线

由以上分析可知, 和 C-B 样条曲线中 \$\alpha\$ 控制曲线的生成结果一样, C-B 样条细分曲线中细分的结果和初始控制参数 \$\alpha_0\$ 有关, 即和图 2 所示一样, 当 \$\alpha_0\$ 变小时, 细分曲线的曲率沿顶点集中; 当 \$\alpha_0\$ 变大时, 曲率沿边的中点集中; 同样用细分的方法也可以精确生成圆、椭圆等规则形状, 这种性质使得用 C-B 样条构造的 Catmull-Clark 细分曲面能够应用于工程上.

2 Catmull-Clark 细分曲面

考虑任意一个控制多边形网格 \$P^0, P^0\$ 可表示为一个三元组 \$P^0 = (F^0, V^0, E^0)\$, 其中, \$F^0 = \{F_i^0\}\$ 为多边形集, \$V^0 = \{V_i^0\}\$ 为顶点集, \$E^0 = \{E_i^0\}\$ 为边集. 对于任意顶点 \$V_i^0\$ 与它相邻的面的数目称为它的入度. 一般, 若 \$V_i^0\$ 为内部顶点, 则其入度等于与它相邻的边数, 而对边界顶点, 其入度小于相邻边的数目. 矩形拓扑的参数曲面网格化后, 其内部顶点的入度为 4, 而对于任意的拓扑网格, 其入度不一定为 4. 在 Catmull-Clark 曲面中, 那些入度不为 4 的顶点被称为奇异点 (extraordinary points), 其每个奇异点对应初始网格上的一个奇异点. 这样, Catmull-Clark 细分曲面就可按照下列规则形成, 其由几何点的产生和拓扑结构两部分组成 [7]:

(1) 几何点的产生

新面点: 对网格上的每一个面 \$F_i^0\$, 一个新面点 \$M_i\$ 的定义为组成面 \$F_i^0\$ 的所有顶点的平均值, 即 \$M_i = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m V_k\$, \$m\$ 为面 \$F_i^0\$ 的顶点数.

新边点: 对网格上的每条边, 一个新边点 \$P_i\$ 的定义为组成 \$E_i^0\$ 的两端点及由该边两相邻面定义的新面点的算术平均;

新顶点: 对网格上每一个顶点 \$V_i^0\$, 一个新顶点 \$Q_i\$ 的定义为与 \$V_i^0\$ 相邻的所有面的新面点以及与 \$V_i^0\$ 相邻的所有边的新边点和该顶点的线性加权平均,

即 $Q_i = \frac{n-2}{n}V_i + \frac{1}{n}\sum_j M_j + \frac{1}{n}\sum_j P_j$, n 为该点的入度.

(2) 拓扑结构

连接一个新面点与周围的新边点;

连接每一个新顶点与周围的新边点.

根据上述细分规则可以得到一个加密的多边形,上述过程一直重复下去,即可得到一系列多边形网格 P^1, P^2, P^3, \dots , 最终收敛于极限曲面 P . 研究表明,该极限曲面除了在那些奇异点外,都保持切向和曲率连续,由细分过程可知,由于奇异点的个数最多为初始网格上的奇异点个数,因此,其数目极少.实际上,Catmull-Clark 细分是一个拓扑网格细化的过程,因为除了在奇异点外,细分的过程等价于在 B 样条的中点处插入结点,故而极限曲面 P 是以初始网格为控制点的三次均匀 B 样条曲面.

3 基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面

3.1 曲面生成

现仍用前面的记号,任意一个顶点 V_i , 其入度为 n , 相邻边记为 $E_i = V_i V_j, (j=1, 2, \dots, n)$; 相邻面记为 $F_i = \bigcup_k V_i V_j$, 这里将 C-B 样条曲线的分割公式,通过不同方向两次细分应用到双三次均匀 B 样条曲面上,再拓展到任意拓扑结构,得到基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分方法,如图 5 所示,其中的新面点、新边点和新顶点如下:

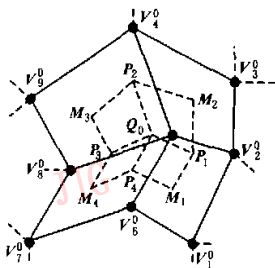


图 5 Catmull-Clark 细分过程

(1) 新面点 与 Catmull-Clark 细分曲面中的新面点的定义相同,即对网格上的每一个面 F_i^0 , 其新面点 M_i 就为组成 F_i^0 的所有顶点的平均值,即

$$M_i = \frac{1}{m} \sum_{x=0}^m V_{ix}, m \text{ 为面 } F_i^0 \text{ 的顶点数} \quad (4)$$

(2) 新边点 对网格上的每条边,定义一个新边点 P_i . 设组成该 E_i^0 边的两 endpoints 平均值为 \bar{V}_i , 由该边两相邻面定义的新面点的平均值为 \bar{M}_i , 则新边点为这两者的加权平均,它的确切的位置取决于此时的曲面的控制参数 C_k , 即

$$P_i = \frac{1}{(1+C_k)}(\bar{M}_i + C_k \bar{V}_i) \quad (5)$$

其中, $\bar{M}_i = (M_{i1} + M_{i2})/2, \bar{V}_i = (V_{i1} + V_{i2})/2$.

(3) 新顶点 对网格上每一个顶点 V_i^0 , 定义一个新顶点 Q_i . 该新顶点 Q_i 即为与 V_i^0 点相邻的所有 m 个面新面点的平均值 \bar{M}_i 以及与 V_i^0 点相邻的所有边中点的平均值 \bar{P}_i 和原顶点 V_i^0 的加权平均,而顶点的确切位置则取决于此时曲面的控制参数 C_k , 即

$$Q_i = \frac{1}{(1+C_k)^2}(\bar{M}_i + 2C_k \bar{P}_i + C_k^2 V_i^0) \quad (6)$$

其中, $\bar{M}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m M_{ij}$.

这里需注意上述公式中的 C_k 为曲面的控制参数,由公式(2)中的 $C_k = \cos \alpha_k, \alpha_k = \alpha_{k-1}/2$ 可知,只要选择初始控制参数 α_0 , 则每一轮细分的控制参数 C_k 都可确定.

通过连接一个新面点与周围的新边点,并连接每一个新顶点与周围的新边点,就可以得到一个加密的多边形.上述过程一直重复下去,即可得到一系列多边形网格 P^1, P^2, P^3, \dots , 最终收敛于极限曲面 P . 这就是基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面.当 $\alpha_0 \rightarrow 0$, 即 $C_0 = 1$ 时,基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面就退化成 Catmull-Clark 细分曲面.与控制参数 α_0 对细分曲线的形状进行调节一样,控制参数同样对细分曲面有调节作用,由图 6 所示的立方体的细分可以看出,和曲线一样,当 α_0 变小时,曲率沿顶点集中;当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,就是 Catmull-Clark 细分模式;当 α_0 变大时,曲率沿边的中点集中.这说明引入参数 α 后,细分形状有了一定的调节变化,这样就可以做出各种特殊效果.

3.2 连续性分析

和 Catmull-Clark 细分方法一样,基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分方法不受控制网格的拓扑限制,它可作用到任意拓扑网格上.当用其细分规则对任意拓扑网格作用一次后,则所有的面均变为四边形,而且从此以后,奇异点的个数保持不变.式(2)保证了除在奇异点外,基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面是 C^2 连续的.同时如果知道 C-B 样

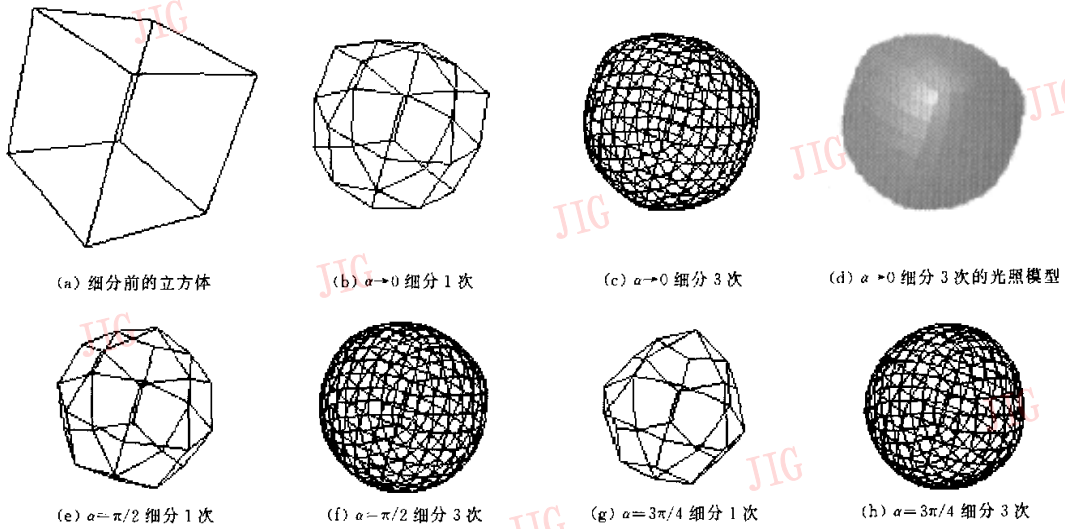


图 6 基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分过程

条曲线通过细分收敛于 B 样条曲线,那么在奇异点处,基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面和 Catmull-Clark 细分曲面一样,是 C^1 连续的;也就是说,同样可以利用离散 Fourier 方法,找到细分矩阵的实特征根和特征向量,以发现在各奇异点处的切平面连续,这将在以后的研究中给出详细的证明,有兴趣的读者可以参考文献[8]方法进行验证.还是以上面立方体为例,奇异点是由 3 个边组成,从图 7 中可以观察到,在奇异点处,细分曲面是连续的.

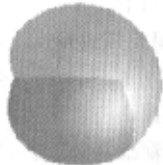
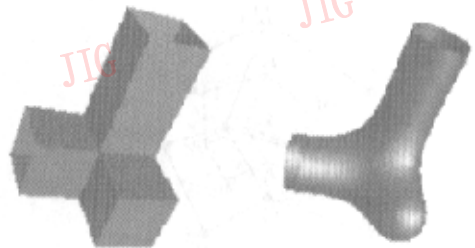


图 7 在奇异点处的连续性

4 用基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分方法生成工程形体

工程上许多常用的基本图形是圆、圆柱、圆环等,这些图形现在的做法大都是用 NURBS^[2]来表示,但是用基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分方法也可以生成.通过前面分析可知,只要选择合适的初始控制参数,就能够通过 C-B 样条曲线细分的方法来精确生成工程上常用的圆弧,因此基于 C-B 样条的

Catmull-Clark 细分方法很适合表示工程旋转面等.根据前面阐述的用 C-B 样条曲线表示圆的方法,如果控制多边形是一个已确定边长的四边形,那么利用 $a_0 = 2\pi/m$,即 $a = \pi$,就能通过细分方法表示圆,而且圆的半径可以确定;同样按照这种方式,就可以生成旋转面.通过在 PC 机上,基于 OpenGL 图形库设计了一个细分软件包,实现了以上算法,并设计了一个人机交互界面,图 8 就是该软件包生成的工程零件图形,它是一个工程上常用的管子图形,它有 3 个头,其中两个头是圆柱面,另一个是近似球面,从该图可以看出,用上述算法能很容易地表示圆柱体,并且可以通过调节参数,让细分曲面的形状有所变化.



(a) 原始图形 (b) 经过几次细分后的图形

图 8 通过细分生成工程零件图形

5 结论

本文为了解决 Catmull-Clark 细分曲面在工程

上难以推广的问题,给出了一种基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面算法. 这种新的细分曲面方法充分利用了 C-B 样条能够精确表示圆、椭圆等规则形体的特性,它不但能够像 C-B 样条曲线、曲面一样,可精确地表示圆柱等常规曲面及统一工程曲面的造型;同时仍然能保持细分曲面的造型特点,即能够解决 NURBS 曲面难以处理的任意拓扑结构的造型问题,另外,还可依赖控制参数 α 的调节作用,增加造型的自由度,这是细分曲面在工程上应用的新探索. 但是由于本文给出的基于 C-B 样条的 Catmull-Clark 细分曲面算法只有一个控制参数,因此调节范围有限;但是笔者也发现,在第 3 种形式的 C-B 样条^[6]中,每个控制顶点可以有不同的控制参数 α ,如果能找到这种形式的 C-B 样条的细分公式,那么用这种细分形式构造的细分曲面,其造型能力将大大加强,这将是以后研究的重点.

参 考 文 献

- 1 Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes[J]. CAD, 1978,10(6):350~355.
- 2 DeRose T, Kass M, Truong T. Subdivision surfaces in character animation[A]. In:Computer Graphics(Proceedings of SIGGRAPH'98)[C], 1998:85~96.
- 3 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 1994.
- 4 Sederberg T, Zheng J, Swell D *et al.* Non-uniform recursive subdivision surfaces[A]. In:Computer Graphics(Proceedings of SIGGRAPH'98)[C], 1998:387~394.
- 5 Zhang Jiwen. C-curves: An extension of cubic curves [J]. CAGD, 1996,13:199~217.
- 6 Jiwen Zhang, Two different forms of C B-splines[J]. CAGD, 1997,14:31~41.
- 7 王国瑾,汪国昭,郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- 8 Jörg Peters, Ulrich Reif. Analysis of algorithms generalizing B-spline subdivision[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998,35(2):728~748.



林 兴 1976 年生,2002 年获浙江大学硕士学位,美国加州大学 Riverside 分校博士研究生. 主要研究领域为 CAD/CAM.



罗国明 1954 年生,高级工程师. 研究领域为 CAD/CAM.

张纪文 1942 年生,教授,研究领域为 CAD/CAM/CAGD.