

基于张量的图象边缘检测及滤波

王晓明 顾晓东 刘健

(大连理工大学机械工程学院, 大连 116024)

摘要 边缘检测是数字图象处理中一种重要的处理手段,目前普遍采用的方法是基于直角坐标系下的 Laplacian 算子,取其零交叉位置来检测,而现实中,往往可见到许多表面上的图象,比如柱面贴图,球面贴图,动态景物的数字化效果以及三维医学图象,结合深度信息采用基于微分几何曲线坐标系下的算子进行图象边缘检测及滤波是一种新的尝试.从结果可以看到,处理效果明显优于普通的方法.

关键词 曲线坐标系 Laplacian 算子 边缘检测 扩散方程 图象滤波

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2002)08-0780-03

Tensor Based Image Edge Detection and Filtration

WANG Xiao-ming, GU Xiao-dong, LIU Jian

(Institute of modern manufacture, School of Mech. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024)

Abstract This paper put forward a method of image edge detection and filtration on the curve coordinate system by the use of operator on the curve coordinate system. Edge detection is a important process in image processing, currently the popular method firstly to be used is the Laplacian operator on the Cartesian coordinate system, then the zero-crossing of the Laplacian operator can be found as edge point, image filtration is the convolution result of the differential operator on the Cartesian coordinate system too. It is not fit to deal with many images painted on surfaces such as cylindrical map image, spherical map image, digital effects for motion pictures and medical regime on three dimensional scans of organs. We make use of the differential operator on the curve coordinate system for processing images on surfaces. The practical numerical experiment results showed that differential operator on the curve coordinate system is capability for processing images on surfaces.

Keywords Curve coordinate system, Laplacian operator, Edge detection, Diffusion equation, Image filtration

0 引言

图象边缘检测是数字图象处理中的一种重要处理手段,广泛地用于轮廓、特征的提取,纹理分析和图象分割等领域^[1]. 针对阶跃型边缘的处理,普遍采用的方法是,首先将离散数字图象用一个平滑曲面来表示,然后求出平滑曲面上点的梯度幅度,用于进行边缘检测,或者对平滑曲面进行拉普拉斯变换,取其零交叉位置来检测.其常用的有 Sobel, Robert 等简单算子,还有 Marr 的平滑之后检测零交叉的

算子,Haralick 的基于曲面拟合的方法以及最佳边缘检测算子;Canny 算子进行边缘检测后采用三阶正交多项式进行最佳曲线拟合和插值,并求其二阶导数的零交叉,可获得子像素级的边缘定位^[1,2]. 不同的算子各有其特点和适用范围,文献[3]根据一维单阶跃边缘的数学模型,提出了描述边缘检测的准则并导出了相应的“最佳”算子,文献[4]针对梯度边界模型也提出了类似的准则.图象边缘检测作为最基本的图象处理技术,其结果是计算机视觉重要的信息来源,在运动分析和三维重构^[5-10]领域有重要的作用.

基金项目:国家自然科学基金(59805001);辽宁省自然科学基金(9810200102)

收稿日期:2001-11-23;改回日期:2002-03-19

现有的微分算子总是基于直角坐标系,无法胜任曲面上图象或纹理的处理,比如柱面贴图,球面贴图,动态景物的数字化效果以及三维医学图象(例如:人脑三维扫描图)。当已知曲面参数时,结合深度信息采用基于曲线坐标系的微分算子处理图象是一种新的尝试。同样的方法施用于图象滤波,将图象视为欧几里德空间中的曲面 $(x, y, f(x, y))$ (f 为图象灰度函数),滤波即对应初值为原图象的热扩散方程 $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = c \nabla^2 f$ 的差分解(c 为演化速率函数, c 为正时,对应图象锐化, c 为负时,对应图象平滑)^[1],扩散方程演化实现加权模板与图象信号的迭代卷积,该模板的权系数是由对应点信号的连续性,即像素点梯度的函数来决定。由曲面演化理论^[11]及曲面欧拉公式^[12,13]可知,当演化速率函数为曲面主曲率的增函数时,曲面演化对任意法截形都具有光顺的效果,当演化速率函数为曲面主曲率的减函数时,曲面演化对任意法截形都具有尖锐化的效果。利用拉普拉斯算子的曲线坐标系形式,可得到曲线坐标系下的热扩散方程,从而实现图象滤波。以正交曲线坐标系下的微分算子(具体以拉普拉斯算子为例)处理了几类图象,从结果图可见,处理效果明显优于直角坐标系的算子。

1 算法的实现

由微分几何或张量分析^[12,13]可知,在一般曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) 下,曲面上任意两点的距离为 $|dy|^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ (其中 $g_{ij} = \frac{\partial Y}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x^j}; i, j = 1, 2, 3$)为度规张量。利用度规张量可以将笛卡尔坐标系上的算子直接推广到曲线坐标系上。以经典的Laplacian边缘检测算子为例,在一般曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) 下,标量场 f 的Laplacian算子形式如下^[12,13]:

$$\nabla^2 f = \nabla^i \nabla_i f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = g^{ij} (\partial_i \partial_j f - \Gamma_{ik}^j \partial_k f) \quad (1)$$

其中, $i, j, k = 1, 2, 3$

式中, g^{ij} 是度规逆变量, Γ_{ik}^j 是第2类Christoffel张量,满足 $\frac{\partial g_j}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k g_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3; g_i, g_k$ 为协变基矢量, $g_i = \frac{\partial Y}{\partial x^i}; g_k = \frac{\partial Y}{\partial x^k}$,由对偶关系可得逆变基矢量)。对任意正则曲面 $Y = Y(u, v)$, (u, v) 为曲面上点的曲线坐标, u 曲线、 v 曲线构成曲线网,而与曲面上点 (u, v)

自然标架 $\left\{ \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial v}, n = \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \times \frac{\partial Y}{\partial v} \right) / \left| \frac{\partial Y}{\partial u} \times \frac{\partial Y}{\partial v} \right| \right\}$ 相对应的物理标架(非完整标架)为 $g_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} g_i$ ($i = 1, 2, 3$;

对 i 不求和),故有

$$\nabla^2 f = \frac{1}{g_{11}} (f_{,11} - \Gamma_{11}^k f_{,k}) + \frac{1}{g_{22}} (f_{,22} - \Gamma_{22}^k f_{,k}) + \frac{1}{g_{33}} (f_{,33} - \Gamma_{33}^k f_{,k})$$

对于正交系,上式简化为

$$\nabla^2 f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\left(\frac{H_2 H_3}{H_1} f_{,1} \right)_{,1} + \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} f_{,2} \right)_{,2} + \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} f_{,3} \right)_{,3} \right] \quad (2)$$

式中, $H_1 = \sqrt{g_{11}}, H_2 = \sqrt{g_{22}}, H_3 = \sqrt{g_{33}}$ 。

以几种典型坐标系为例,考虑到图象坐标系(x, y 轴为屏幕图象坐标, z 轴为深度)与世界坐标系不同,算法的数值实现如下:

柱坐标系 $\begin{cases} x=r=r\cos\theta \\ y=y \\ z=r+r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{r^2-(x-r)^2}} \\ dy = dy \end{cases}$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Rightarrow \nabla^2 f = \frac{[r^2-(x-r)^2]}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(x-r)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

球坐标系

$$\begin{cases} x=r+r\cos\theta\cos\phi \\ y=r+r\sin\theta \\ z=r+r\cos\theta\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta = \frac{dy}{\sqrt{r^2-(y-r)^2}} \\ d\phi = -\frac{dx}{\sqrt{[r^2-(y-r)^2-(x-r)^2]}} \end{cases}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) \Rightarrow \nabla^2 f = \frac{[r^2-2(y-r)^2]}{(y-r)^2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{[r^2-(y-r)^2]}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{[r^2-(y-r)^2-(x-r)^2]}{[(y-r)^2]} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(x-r)}{[(y-r)^2]} \frac{\partial f}{\partial x}$$

椭球坐标系

$$\begin{cases} x=a+acos\theta\cos\phi \\ y=b+bsin\theta \\ z=c+ccos\theta\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta = \frac{dy}{\sqrt{b^2-(y-b)^2}} \\ d\phi = -\frac{b \cdot dx}{\sqrt{a^2 b^2 - a^2 (y-b)^2 - b^2 (x-a)^2}} \end{cases}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left[\left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} f_{,s} \right)_{,s} + \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} f_{,t} \right)_{,t} \right] \Rightarrow \nabla^2 f = \frac{1}{g_{11}} \left\{ [b^2-(y-b)^2] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - (y-b) \frac{\partial F}{\partial y} \right\} - \sqrt{b^2-(y-b)^2} \left[\frac{1}{2g_{11}g_{22}} (a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2g_{11}} (a^2 \sin 2\theta \cos^2 \phi - b^2 \sin 2\theta + c^2 \sin 2\theta \sin^2 \phi) \left] \frac{\partial F}{\partial y} + \right. \\
 & \frac{1}{g_{22}} \left\{ \frac{1}{b^2} [a^2 b^2 - a^2 (y-b)^2 - b^2 (x-a)^2] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \right. \\
 & (x-a) \frac{\partial F}{\partial x} \left. \right\} + \frac{1}{b} \sqrt{a^2 b^2 - a^2 (y-b)^2 - b^2 (x-a)^2} \times \\
 & \left[\frac{1}{2g_{11}g_{22}} (a^2 - c^2) \sin^2 \theta \sin 2\phi + \frac{1}{2g_{22}} (a^2 - c^2) \cos^2 \theta \sin 2\phi \right] \frac{\partial F}{\partial x}
 \end{aligned}$$

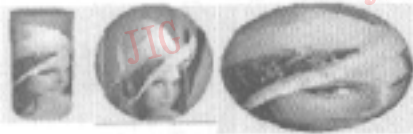
其中

$$\begin{cases}
 g_{11} = \frac{\partial Y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \theta} = a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\
 g_{22} = \frac{\partial Y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \phi} = a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi
 \end{cases}$$

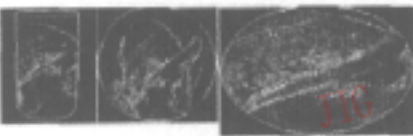
用差分代替微分可进行数值计算。

3 效果对比

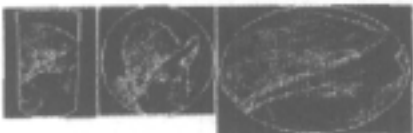
按基于曲线坐标系下的 Laplacian 算子对柱面贴图图和球面贴图及椭球面贴图进行处理。如图 1(a) 为 Lenna 图象的柱面贴图图和球面贴图及椭球面贴图。(b) 为采用曲线坐标系下 Laplacian 算子处理的结果。(c) 为采用笛卡尔坐标系下 Laplacian 算子处理的结果。从图中可见对已知曲面上图象用曲线坐标系下的微分算子进行处理可得到更好的效果。给出 Laplacian 算子的普遍形式, 是力图发展一基于曲线坐标系的图象边缘检测与滤波的处理方法。



(a) Lenna 图象的柱面、球面、椭球面贴图



(b) 在曲线坐标系下的处理结果



(c) (a) 在笛卡尔坐标系下的处理结果

图 1 不同坐标系下 Laplacian 算子处理图象的结果

参考文献

- 1 郑南宁著. 计算机视觉与模式识别[M]. 北京:国防工业出版社, 1998:49~80.
- 2 Castleman K R. Digital image processing[M]. 北京:清华大学出版社, NJ:Prentice Hall, 1997:464~480.
- 3 Canny J A. Computational approach to edge detection[J]. IEEE Trans PAMI, 1986,8:679~698.
- 4 周凌翔. 计算机视觉若干关键问题研究[D]. 杭州:浙江大学, 1997:14~19.
- 5 Joshi T, Ahuja N, Ponce J. Structure and motion estimation from dynamic silhouettes[R]. Technical Report, UIUC-BI-AI-RCV-94-01, University of Illinois, Apr. 1994.
- 6 Kutulakos K N, Dyer C R. Global surface reconstruction by purposive control of observer motion[A]. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition Conference [C], Seattle WA, 1994:331~338.
- 7 Yu Liang-yin. Active 3D surface modeling using perception-based, differential-geometric primitives [D]. University of Wisconsin-madison, 1999:105~125.
- 8 Boyer E, Berger M O. 3D surface reconstruction using occluding contours[J]. Int. Journal of Computer Vision, 1997, 22(3): 219~233.
- 9 Wong K-Y K, Mendonca P R S, Cipolla R. Reconstruction and motion estimation from apparent contours under circular motion [A]. In: Pridmore T. and Elliman D. editors. Proc. British Machine Vision Conference [C], Nottingham. UK, September 1999. 1:83~92.
- 10 Mendonca P R S. Multiview geometry: Profiles and self-calibration[D]. Jesus College, University of Cambridge. 2001: 55~85.
- 11 王晓明. 曲面演化的理论与方法及其应用[D]. 大连:大连理工大学, 1996:24~37.
- 12 苏步青原著. 微分几何学[M]. 姜国英改写. 北京:高等教育出版社, 1987:197~231.
- 13 黄克智, 薛明德, 路明万. 张量分析[M]. 北京:清华大学出版社, 1986:195~264.



王晓明 1965年生, 博士后, 大连理工大学机械工程学院副教授。研究方向为曲面演化、先进制造技术、工程数值计算和图象处理。

顾晓东 1973年生, 讲师, 大连理工大学机械工程学院博士生。研究方向为图象处理和计算机视觉。

刘健 1936年生, 大连理工大学机械工程学院教授, 博士生导师。研究方向为啮合原理、曲面演化、信息处理。