

任意 NUBS 曲线的小波分析和造型技术

刘建 关右江 秦开怀

(清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084)

摘要 为了对任意 NUBS 曲线进行精确的分解和重构, 提出了半正交 B 样条小波分解和重构的新算法, 同时给出了处理非均匀 B 样条曲线的非整数阶分辨率的小波分解和重构算法, 并实现了任意非均匀 B 样条曲线的多分辨率表示, 对于任意非均匀 B 样条或 NUBS 曲线, 无论它有多少个控制点, 均可以对它进行半正交分解和重构, 而不受控制点数必须等于 2^i+3 的限制, 从这个意义上讲, 该方法不仅可以实现连续分辨率水平 (continuous-resolution-level) 的非均匀 B 样条曲线造型, 还可以对非均匀 B 样条和 NURBS 曲线进行精确的分解和重构. 这对于 B 样条曲线曲面的多分辨率造型与显示具有重大应用价值.

关键词 小波 B 样条曲线 多分辨率造型

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2002)09-0894-07

Multi-resolution NUBS Curves with Arbitrary Number of Control Points

LIU Jian, GUAN You-jiang, QIN Kai-huai

(Department of Computer Science & Technology, Tsinghua University, Beijing 10084)

Abstract B-spline wavelets have been widely used in multi-resolution modeling for curves and surfaces, but there are some defects in such modeling using semi-orthogonal B-spline wavelets. First, some existing algorithms for multi-resolution curves use uniform B-spline curves to approximate non-uniform B-spline (NUBS) curves. This will result in an error between the new curve and the original one. Second, the constraints in the existing algorithms specify the shape at a continuous-resolution level by interpolating those at integer-resolution levels. If the control point number of a B-spline curve does not match that of a curve at an integer-resolution, that is, $2^i+3 < n < 2^{i+1}+3$ where i is an integer, it is impossible to exactly reconstruct the curve with n control points from the decomposition. In this paper, new algorithms for decomposition and reconstruction of arbitrary non-uniform B-spline curves are proposed at continuous-resolution levels. Practical examples for multi-resolution modeling of arbitrary non-uniform B-spline curves are given using semi-orthogonal B-spline wavelets.

Keywords Wavelet, B-spline curve, Multi-resolution modeling

0 引言

最近十多年来,小波分析在科学和工程的各个领域都得到广泛的应用,特别是在图象处理、计算机图形学和多分辨率几何造型等领域,无论是正交小波、半正交小波,还是双正交小波,都是理论和应用研究的热点.1994年,Finkelstein等发表了他们运用半正交 B 样条小波进行多分辨率曲线造型的研

究结果^[1];Kazinnik等构造了非均匀 B 样条空间的正交分解^[2],并实现了非均匀 B 样条曲线曲面的分解和重构,由于他们使用的方法需要进行大量内积运算,特别是 B 样条基函数与小波基函数的内积运算计算量很大,需要的内存空间也非常大,如果曲线和曲面的控制点较多,则很难处理,因而限制了该方法处理实际应用问题的能力.而半正交 B 样条小波分析方法的最大优点是计算简单,所需的内存也相对较小,因此,这种方法得到了广泛的应用,其缺点

基金项目: 国家自然科学基金项目(59875047, 69873025); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助课题(20010003048)

收稿日期: 2002-07-08; 改回日期: 2002-07-12

是,半正交 B 样条小波只能处理控制点数为 $2^j+3(j=0,1,\dots$ 为正整数)的准均匀 B 样条曲线的多分辨率形状编辑和造型^[1,3],当控制点数为任意数时,对两个相邻的整数分辨率的小波曲线,目前只能采用线性插值^[1]或基样条插值^[4]等近似处理的方法.近几年来,国内也有一些关于 B 样条曲线曲面多分辨率表示的研究.孙延奎和朱心雄^[5~7]等首先在非均匀 B 样条曲线上进行离散化采样,然后根据曲线的型值点反算出 2^j+3 个控制点,再利用准均匀 B 样条曲线来逼近非均匀 B 样条曲线,从而把问题转化为准均匀 B 样条曲线的多分辨率表示.但这样做却由于近似逼近难免引入额外的误差,因而不可能精确重构出原曲线.此外,曲线的离散采样、计算插值曲线的控制点等过程,也增加了算法的复杂度和计算量.

为此,本文利用半正交和双正交 B 样条小波的概念,提出了对任意非均匀 B 样条和 NURBS 曲线进行精确的半正交分解和重构的新算法,同时对 NURBS 曲线的多分辨率造型技术进行了研究,并得到了满意的结果.

1 B 样条小波分析的基本思想

对于一组有限维嵌套的线性函数空间 $V^0 \subset V^1 \subset V^2 \dots, V^j$ 中,上标 j 表示分辨率的阶数,阶数越大,分辨率越高.下面所有符号的上标都表示分辨率的阶数.定义 W^j 是 V^j 在 V^{j+1} 中的正交补空间.这里不妨把 V^j 中一组基函数排成行向量形式,记为 $\Phi^j(x)$;同时将 W^j 的一组基函数也排成行向量形式,记为 $\Psi^j(x)$.通常人们把 $\Phi^j(x)$ 称为尺度函数,把 $\Psi^j(x)$ 称为小波函数.对于某函数 $v^{j+1}(x) \in V^{j+1}$,因为 $V^{j+1} = V^j + W^j$,所以存在唯一的 $v^j(x) \in V^j$ 和唯一的 $w^j(x) \in W^j$,满足 $v^{j+1}(x) = v^j(x) + w^j(x)$.

由于 V^j 是嵌套的函数空间,有 $V^{j-1} \subset V^j, W^{j-1} \subset V^j$,所以存在矩阵 P^j, Q^j ,使得

$$\Phi^{j-1}(x) = \Phi^j(x)P^j \tag{1}$$

$$\Psi^{j-1}(x) = \Phi^j(x)Q^j \tag{2}$$

则上面的两式可以用分块矩阵联合表示为

$$[\Phi^{j-1}(x) | \Psi^{j-1}(x)] = \Phi^j(x)[P^j | Q^j] \tag{3}$$

用 C^j 表示一组离散的采样信号.在 B 样条小波曲线中, C^j 可看成是与曲线控制点对应的坐标(x, y 或 z 坐标), C^j 可写成列向量的形式.对 $\forall v^j \in V^j, \exists v^{j-1} \in V^{j-1}, \exists w^{j-1} \in W^{j-1}$,因为 $v^j = v^{j-1} + w^{j-1}$,

所以,若有列向量 C^j, C^{j-1}, D^{j-1} ,则满足

$$\Phi^j C^j = \Phi^{j-1} C^{j-1} + \Psi^{j-1} D^{j-1} \tag{4}$$

再联合式(3)可得到

$$\Phi^j C^j = \Phi^j [P^j | Q^j] \begin{bmatrix} C^{j-1} \\ D^{j-1} \end{bmatrix}, \text{即 } C^j = [P^j | Q^j] \begin{bmatrix} C^{j-1} \\ D^{j-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

式(5)提供了 B 样条小波分解和重构的基本思路.现在问题集中在 P^j, Q^j 如何确定. P^j 是尺度函数 Φ^j 到低一阶分辨率尺度函数 Φ^{j-1} 的变换矩阵, Q^j 是尺度函数 Φ^j 到低一阶分辨率小波函数 Ψ^{j-1} 的变换矩阵.要想确定 P^j, Q^j ,则 Φ^{j-1}, Ψ^{j-1} 需要满足一定条件.若 Φ^{j-1} 和 Ψ^{j-1} 是行向量形式,则对于半正交小波满足

$$(\Phi^{j-1})^T \cdot \Psi^{j-1} = 0$$

其中, T 表示转置,上式可进一步改写成如下形式

$$(P^j)^T [(\Phi^j)^T \cdot \Phi^j] Q^j = 0 \tag{6}$$

符号“ \cdot ”表示矩阵中元素间的乘法运算用内积运算代替.如果确定了 P^j ,则根据上式的限制也可以确定一个合适的 Q^j ,但符合条件的 Q^j 并不唯一,一般方法是使 Q^j 有尽可能少的非零元素.除了半正交小波,还有正交小波和双正交小波,可参考文献^[8,9].

本文下面的讨论主要是基于半正交小波的定义,下文所用到符号的意义与上面定义的一致.另外,为简单起见,下面的算法中均采用端点插值的 3 次非均匀 B 样条曲线.但是,所提出的方法不受此限制,具有一般性.

2 曲线的整数阶多分辨率分析

在这一节中,将重点讨论非均匀 B 样条曲线的整数阶多分辨率分解和重构的方法.之所以先单独讨论曲线的整数阶多分辨率分析,是因为在此情况下,可以得到一些简洁高效的公式或算法,以便减少时间复杂度和提高效率.

还应当指出的是,这里研究的是非均匀 B 样条曲线的半正交小波分析方法,与 Finkelstein 等介绍的 3 次准均匀 B 样条小波曲线^[1,3]以及 Kazinnik 等讨论的非均匀 B 样条空间的正交分解方法^[2]是不同的.

在此,先给出一些基本的符号说明.

端点插值的三次非均匀 B 样条曲线在 j 阶分辨率下的控制点数是 2^j+3 个, $j=0,1,\dots$. 设 j 阶分辨率下的控制点、尺度函数矢量分别是 $C^j = [c_0^j, c_1^j, \dots, c_{2^j+2}^j]^T$ 和 $\Phi^j = [B_{0,4}^j, B_{1,4}^j, \dots, B_{2^j+2,4}^j]$, 节点矢量是 $T^j = [t_0^j, t_1^j, \dots, t_{2^j+6}^j]$; $j-1$ 阶 ($j=1,2,\dots$) 分辨率下

的控制点、尺度函数和曲线细节部分(高频)的控制点矢量分别是

$$C^{j-1} = [c_0^{j-1}, c_1^{j-1}, \dots, c_{2^{j-1}+2}^{j-1}]^T$$

$$\Phi^{j-1} = [B_{0,4}^{j-1}, B_{1,4}^{j-1}, \dots, B_{2^{j-1}+2,4}^{j-1}]$$

$$D^{j-1} = [d_0^{j-1}, d_1^{j-1}, \dots, d_{2^{j-1}-1}^{j-1}]^T$$

节点矢量是 $T^{j-1} = [t_0^{j-1}, t_1^{j-1}, \dots, t_{2^{j-1}-6}^{j-1}]$.

2.1 尺度函数 Φ^j 到 Φ^{j-1} 的变换矩阵 P^j 的确定

在多分辨率分析中, B 样条曲线的分辨率升高一阶的过程, 可以看成是一个通过节点插入来使曲线的控制点和节点数增加的过程. 从 $j-1$ 阶分辨率升到 j 阶分辨率, 曲线的控制点增加 $2^{(j-1)}$ 个, 节点数也增加 $2^{(j-1)}$ 个. 同样, 降低一阶分辨率可以看成是上述过程的逆过程. 在 j 阶分辨率, 曲线的定义域是 $[t_0^j, t_{2^j+3}^j]$, 有 2^j+1 个节点, 此时保留第 1 个节点, 删除下一个节点, 如此类推, 刚好删除 2^{j-1} 个节点时, 区间变为 $[t_0^{j-1}, t_{2^{j-1}+3}^{j-1}]$, 它即是 $j-1$ 阶分辨率下曲线的定义域. 这个过程可以逆向操作.

定义 Φ_i^{j-1} 是 $j-1$ 阶分辨率下曲线插入 i 个节点后, B 样条基函数组成的行向量, 显然有 $\Phi_0^{j-1} = \Phi^{j-1}, \Phi_{2^{j-1}}^{j-1} = \Phi^j$; 定义 P^j 是 Φ_i^{j-1} 到 Φ_i^j 的变换矩阵. 在插入 $2^{(j-1)}$ 个节点的过程中, 会产生以下等式

$$\Phi_0^{j-1} = \Phi^{j-1} P_1^j; \Phi_1^{j-1} = \Phi_2^{j-1} P_2^j; \dots; \Phi_{2^{j-1}-1}^{j-1} = \Phi_{2^{j-1}}^{j-1} P_{2^{j-1}}^j$$

利用节点插入的通用算法^[9], 可以计算出 $P_1^j, P_2^j, \dots, P_{2^{j-1}}^j$. 反复利用式(1), 可得

$$P^j = P_{2^{j-1}}^j P_{2^{j-1}-1}^j \dots P_2^j P_1^j$$

可见, P^j 是 2^{j-1} 个矩阵的积, 即一个 $(2^j+3)(2^{(j-1)}+3)$ 阶的矩阵, 且 P^j 是带宽的. 经计算可以得到 P^j 矩阵中的每一个元素的公式, 它是节点矢量的函数. 令

$$P^j = [p_{m,n}], m=0, 1, \dots, 2^j+2; n=0, 1, \dots, 2^{j-1}+2$$

其中, $p_{m,n}$ 为 P^j 的第 m 行、第 n 列元素, $0 \leq m \leq 2^j+2, 0 \leq n \leq 2^{j-1}+2$; 为方便起见, 令 $t_i = t_i^j \in T^j$, 则通过插入节点^[9], 可以得到 $p_{m,n}$ 的计算公式如下:

(1) P^j 矩阵的头 3 列

$$p_{0,0} = 1; \quad p_{1,0} = (-t_4+t_5)/t_5; \quad p_{1,1} = t_4/t_5;$$

$$p_{2,1} = (-t_4+t_7)/t_7; \quad p_{2,2} = t_4/t_7;$$

$$p_{3,1} = (-t_4+t_7)(-t_6+t_7)/(t_7)^2;$$

$$p_{3,2} = t_4(-t_6+t_7)/(t_7)^2 + t_6(-t_4+t_5)/(t_7 t_5);$$

$$p_{4,2} = (-t_6+t_5)/t_5;$$

$$p_{5,2} = (-t_6+t_5)(-t_8+t_5)/(t_5(-t_5+t_6));$$

P^j 矩阵头 3 列的其他矩阵元素等于 0.

(2) P^j 矩阵中间的 $2^{j-1}-3$ 列

$$p_{n,m} = \frac{(-t_n+t_{n-1})(-t_n+t_{n+3})}{(-t_n+t_{n+4})(-t_n+t_{n+6})};$$

$$p_{n+1,m} = \frac{(-t_n+t_{n+1})(-t_{n+3}+t_{n+6})}{(-t_n+t_{n+6})(-t_{n-1}+t_{n+6})} + \frac{(-t_{n+1}+t_{n+3})}{(-t_{n+1}+t_{n+6})};$$

$$p_{n+2,m} = \frac{(-t_{n+1}+t_{n+3})(-t_{n+5}+t_{n+6})}{(-t_{n-1}+t_{n+6})(-t_{n+2}+t_{n+6})} +$$

$$\frac{(-t_n+t_{n+1})(-t_{n+3}+t_{n+6})(-t_{n+5}+t_{n+6})}{(-t_n+t_{n+6})(-t_{n+1}+t_{n+6})(-t_{n+2}+t_{n+6})} +$$

$$\frac{(-t_{n+2}+t_{n+5})(-t_{n+3}+t_{n+6})}{(-t_{n+2}+t_{n+6})(-t_{n-2}+t_{n+6})};$$

$$p_{n+3,m} = \frac{(-t_{n+5}+t_{n+6})}{(-t_{n+2}+t_{n+6})};$$

$$p_{n+4,m} = \frac{(-t_{n+5}+t_{n+6})(-t_{n+7}+t_{n+8})}{(-t_{n+2}+t_{n+6})(-t_{n+4}+t_{n+8})};$$

其中, $m = 3, 4, 5, \dots, 2^{j-1}-3; n=3, 5, 7, \dots, 3+2^{(2^{j-1}-5)}$, P^j 矩阵中间 $2^{j-1}-3$ 列的其他矩阵元素等于 0.

(3) P^j 的最后 3 列, 在形式上与前三列是反对称的, 只不过节点的下标有所改变而已.

对上面计算方法有两点说明:

(1) 若出现分母为零, 则相应分式为零.

(2) 上述计算是针对分辨率阶数 $j \geq 3$ 的. 当 $j=1, 2$ 时, 则 P^j 中每个元素都很容易求得, 这里不再写出公式了.

2.2 尺度函数 Φ^j 到 Ψ^{j-1} 的变换矩阵 Q^j 的确定

本文求解 Q^j 采用的是半正交小波, 可利用式(6)来计算.

首先需要计算 Φ^j 的内积矩阵, 不妨设 $[(\Phi^j)^T \cdot \Phi^j] = [\langle \Phi^j | \Phi^j \rangle]$. 在计算任意两个 B 样条基函数的内积^[10]时, 可以利用 B 样条函数的局部性来确定该内积是否为零, 如果不为 0, 那么再利用内积递推公式^[10](见附录)来求出其内积矩阵, 而且所得矩阵是带宽的, 比如 3 次 B 样条基函数内积矩阵带宽是 7.

这里不妨设 $(P^j)^T [\langle \Phi^j | \Phi^j \rangle] = R^j$, 由于 P^j 和 $[\langle \Phi^j | \Phi^j \rangle]$ 都是带宽的, 因此可以利用这一点节省大量计算, 结果矩阵也是带宽的. R^j 是 $2^{(j-1)}+3$ 行 2^j+3 列的矩阵, 现在需要利用它, 求出矩阵 Q^j 中 $2^{(j-1)}$ 个列的最优解. 当分辨率阶数 $j \leq 3$ 时, Q^j 的各列, 很容易由式(6)解得, 这里不再赘述. 现在主要针对分辨率阶数 $j \geq 4$ 的情况进行讨论.

当分辨率阶数 $j \geq 4$ 时, 通过对 R^j 矩阵中非零项规律的分析, 主要思路是找到 R^j 矩阵中秩等于其列数减一的子块, 并通过某种方式找到 $2^{(j-1)}$ 个这样

的子块,使每个子矩阵的零空间中的一个解对应 Q' 的一列。为了方便叙述,定义以下符号:设 $Q^i = [q_{i0}^i, \dots, q_{i(2^i-1)}^i]$, 其中, q_i^i 是有 2^i+3 行的列向量,字母 i 代表列号。 R' 中,从第 i_b 行、第 j_b 列开始到第 i_e 行、第 j_e 列结束的子矩阵用 $\text{sub}[i_b, j_b; i_e, j_e]$ 表示。

算法如下:

```

for (i=0; i<2n-1; i++) {
  if (i<3) //i 是前3列 {
    sub[0, i; i+7-1, 2*i+7]子块矩阵(共 7+i 行, 共 8+i 列)的零空间中的一个解对应列向量  $q_i^i$  从  $i$  行到  $2*i+7$  行,此列向量其余元素是 0.
  }
  else if (i 是中间  $2^{i-1}-6$  列) {
    sub[i-3, 2*(i-3)+3; i+6, 2*(i-3)+13]子块矩阵(共 10 行, 共 11 列)的零空间中的一个解对应
  }
}

```

```

列向量  $q_i^i$  从  $2*(i-3)+3$  行到  $2*(i-3)+13$  行, 此列向量其余元素是 0.
}
else //i 是最后3列 {
  sub[i-3, 2*i-3; 2n-1+2, i+2n-1+3]子块矩阵(共  $2^{n-1}-i+6$  行, 共  $2^{n-1}-i+7$  列)的零空间中的一个解对应列向量  $q_i^i$  从  $2*i-3$  到  $i+2^{n-1}+3$  行,此列向量其余元素是 0.
}
}

```

2.3 实例

图1是利用本文方法对端点插值的三次非均匀 B 样条曲线,在整数阶多分辨率下进行显示的例子。

说明:(1)图中未画出控制多边形;(2)使用 Riesenfeld 方法确定非均匀 B 样条曲线的节点矢量,见文献[11]。

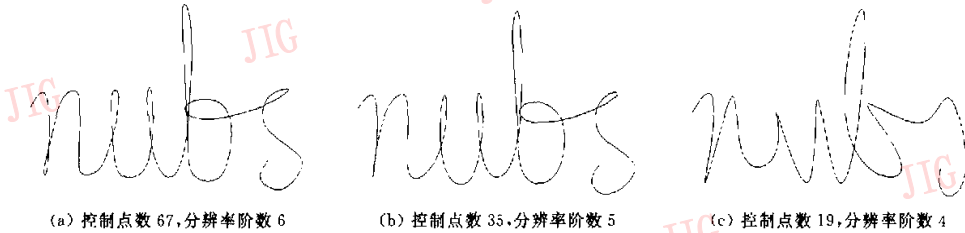


图1 本文方法对端点插值的三次非均匀 B 样条曲线进行整数多分辨率显示实例

3 任意控制点数曲线的多分辨率分析

当分辨率不是整数阶时,控制点的数目是任意的,设控制点数是 m 个,分辨率阶数为 k ,若 k 不是整数,则存在某个 j 阶的分辨率,使 $j-1 < k < j$, $2^{j-1}+3 < m < 2^j+3$ 。如果能把这个介于 $j-1$ 和 j 之间的非整数阶的分辨率降为 $j-1$ 阶分辨率,就可以解决问题了。

3.1 尺度函数 Φ^j 到 Φ^{j-1} 变换矩阵 P^k 的确定

定义 $\delta = m - (2^{j-1}+3)$ 。根据上述分析可知,一定存在一组变换矩阵 $P_1^k, P_2^k, \dots, P_\delta^k$, 使

$$\Phi^{j-1} = \Phi^k P_1^k, P_2^k, \dots, P_\delta^k \quad (7)$$

变换矩阵 $P_1^k, \dots, P_{\delta-1}^k, P_\delta^k$ 可以在下面的过程中得到,即在 $j-1$ 阶分辨率曲线的节点矢量 T^{j-1} 中,插入节点,使之成为 k 阶分辨率曲线的节点矢量 T^k ,每次节点插入,与两组 B 样条基函数对应的变换矩阵就是 $P_1^k, \dots, P_{\delta-1}^k, P_\delta^k$ 。

δ 取值在 1 和 2^{j-1} 之间,从 $j-1$ 阶分辨率升为

k 阶分辨率不能再像上面整数阶分辨率一样,在定义区间中,每两个节点之间都插入一个节点,为了可以均匀地插入节点,有以下定义

$$\lambda = \delta / (m - 3) \quad (8)$$

λ 可认为是要删除节点在所有节点中的比例。以下算法用于确定从 $j-1$ 阶分辨率升为 k 阶分辨率需要插入的节点,同样从 k 阶分辨率删除这些节点,则分辨率降为 $j-1$ 阶,节点在 T^k 中的下标存储在数组 $\text{del_pos}[\delta]$ 中,算法如下:

```

判定某节点是否该删除的权因子  $a=0$ ;
删除节点的计数  $r=0$ ;
删除节点在  $T^k$  中的下标  $p=3$ ;
while (r<delta) {
  a+=lambda;
  if (a>=1) { //则此节点需要删除
    a-=1; del_pos[r]=p; r++;
  }
  节点下标加 1, p++;
}

```

上述定义在 $m = 2^{j-1}+3$ 或 $m = 2^j+3$ 时也成

立. 从节点矢量 T^k 中, 去掉 del_pos 中标示的节点, 便可以得到 $j-1$ 阶分辨率曲线的节点矢量 T^{j-1} . 在删除节点 $del_pos[\delta-1], del_pos[\delta-2], \dots, del_pos[0]$ 的过程中, 利用上述节点插入的通用算法可得到变换矩阵 $P_0^k, P_1^k, \dots, P_i^k$, 进而可以得到 Φ^k 到 Φ^{j-1} 的变换矩阵 $P^k = P_0^k P_1^k \dots P_i^k$, 且 $\Phi^{j-1} = \Phi^k P^k$. 在计算 P^k 的过程中, 应该充分利用 P_0^k, \dots, P_i^k 的稀疏性. 由节点插入公式可知, P_i^k 中的非零元素最多有 $i+2^{i-1}+6$ 个, 而且基本分布在对角线上或附近, 所以 P^k 可以在线性时间内求出.

3.2 尺度函数 Φ^k 到 Ψ^{j-1} 变换矩阵 Q^k 的确定

由于控制点数的任意性, 导致矩阵 Q^k 的列数会有很大的波动, 即可能只有一列, 也可能有 $2^{j-1}-1$ 列, 因而造成利用式(6)求解 Q^k 各列时会遇到困难. 定义 $R^k = (P^k)^T [\Phi^k | \Phi^k]$. R^k 中的若干子矩阵块零空间的解与 Q^k 每个列向量对应, 关键是找出其对应关系. 如果 Q^k 只有一列, 则显然与 R^k 矩阵零空间的解对应, 进一步可以发现, R^k 子矩阵块的划分与因降低分辨率而删除的控制点有密切的关系.

B 样条基函数内积矩阵的计算仍采用 2.2 节的方法. 考虑到矩阵 P^k 非零元素的分布与删除节点的位置是密切相关的, 且由于内积矩阵非零元素的分布是固定的, 所以可以分析出 R^k 中非零元素的分布与删除的节点之间的对应关系. 求解 Q^k 的主要思路还是在 R^k 中找到秩比列数小 1 的子矩阵块. 这里需要注意, 由于控制点数的任意性, 矩阵 R^k 已经没有对称的形式了, 因此在搜索 R^k 中符合要求的子矩阵时, 是从矩阵 R^k 右下角向左上角扫描的, 控制点总数 m , 删除节点的下标数组 $del_pos[\delta]$ 见 3.1 节, 算法如下:

(1) 确定 R^k 非零元素的分布规律, 经过对 $(P^k)^T [\Phi^k | \Phi^k]$ 结果的分析验证, 可以知道 R^k 中非零元素分布在带状的区域, 由于带状区域上面成一个阶梯, 下面也成一个阶梯, 因此通过这两个阶梯就可以确定此区域. 这里用数组 $top_chain[m]$ 描述从右向左扫描 R^k 矩阵中非零元素分布的带状区域的上阶梯.

按如下方法确定数组 $top_chain[m]$ 中的值: 如果 i 列的非零元素的最小行号比 $i-1$ 列的非零元素的最小行号大 1, 则 $top_chain[i] = 1$, 否则 $top_chain[i] = 0$. 具体算法如下:

```
初始化 top_chain[m] 全零
for (i = 4; i < m; i++) {
    如果 i 不是该删除的节点下标, 即 i 不在 del_pos 数组
```

中, 则 $top_chain[i-1] = 1$;

R^k 中, 非零元素分布在带状区域的下阶梯反映了 R^k 中每一列非零元素的最大行号的变化规律. 通过分析可知, 因为下阶梯与上阶梯分布规律类似, 下阶梯可由上阶梯向左移 3 位得到, 所以存储时只用一个数组即可.

(2) 要利用 R^k 非零元的分布规律来求 Q^k 的各列. 求解 Q^k 各列时, 需要自右向下向左扫描 R^k , 以确定 $m-2^{j-1}-3$ 个以求零空间解的矩阵子块. 设 q frag-info 中, 存储子块的信息包括起始和终止行列的标号, 算法如下:

```
//start_col, end_col 表示子块的起始列和结束列, 注意
    起始列在结束列右面
//start_row, end_row 表示子块的起始行和结束行, 注意
    起始行在结束行下面
//由于是自右向下向左扫描矩阵, 所以
//子矩阵块是 sub(end_row, end_col; start_row, start_col) (见 2.2 节定义)
//end_row_begin 表示子矩阵块的起始列 start_col 上的
    非零元素的最小行号
初始化 start_col = m; start_row = 2^{j-1} + 2;
    end_row_begin = start_row - 3;
while (找到的子块数小于 m - 2^{j-1} - 3 个)
//共需要找到 m - 2^{j-1} - 3 个合法子块 {
    子块起始列指针左移一位 start_col--;
    如果 top_chain[start_col] = 1,
        即非零元素上链出现阶梯,
        则子矩阵结束行指针改变 end_row_begin--;
        如果 start_col + 3 < m,
            且 top_chain[start_col + 3] = 1,
                即非零元素下链出现阶梯,
                则子矩阵起始行指针改变 start_row--;
//以上操作定位出子矩阵起始列上的非零元素
    起始和终止的行号
    子矩阵块结束列初始值 end_col = start_col;
    子矩阵块结束行初始值 end_row = end_row_begin;
while (子块的列数小于等于子块的秩,
        即子块列数小于等于行数时) {
        子块结束, 列左移一位 end_col--;
        如果 end_col < 0, 则退出当前循环,
        此次搜索子块失败;
        如果 top_chain[start_col] = 1,
            则子块结束行, 上移一行 end_row--;
    }
}
如果搜索子块成功, 即找到了子块的列数比子块的
```

```

秩大 1 的子块;
如果((需要找到的子块总数 - 已找到的子块数 <= 3)
   或者(当前找到的子块结束列的序号 < 上次找到的
   的合法子块的结束列的列号))
则当前找到的子块是符合要求子矩阵块,
需将其记录在 q_frag_info 中;
否则不是合法子块,不需要纪录;
}
}

```

以上算法可以保证找到 $m - 2^{j-1} - 3$ 个合法子块,且 R^k 的非零元素都在子矩阵块中得到利用,另外,每个子矩阵的列数可以尽可能地少.这样当求出这些子矩阵零空间的解,即求出了 Q^k 的各列,这个

算法可以使 Q^k 矩阵中,有尽可能少的非零元素.

计算出 P^k 和 Q^k 后,就可以在非整数阶分辨率 k 下进行分解,降为 $j-1$ 整数阶分辨率后,就可利用 2.1 节,2.2 节中的方法进行分解.重构过程是同样的原理.

3.3 实例

图 2 是利用本文方法对端点插值的三次非均匀 B 样条曲线在非整数阶分辨率和整数阶分辨率下进行显示的例子:

说明:

- (1)控制点总数 300 个, $2^8 + 3 < 300 < 2^9 + 3$;
- (2)节点矢量的确定与上例相同.



图 2 本文方法对端点插值的三次非均匀 B 样条曲线进行非整数多分辨率显示实例

4 结 论

本文以半正交小波为基础,利用整数阶与非整数阶分辨率的非均匀 B 样条的小波分析实现了对任意非均匀 B 样条的多分辨率造型,并构造了符合特定要求的双正交小波.本文提出的算法,有两个显著的优点:其一,对 B 样条曲线的节点矢量没有任何限制,可以使各种 B 样条曲线统一处理,非常方便;其二,对 B 样条曲线的控制点数没有任何限制,不仅可以进行连续分辨率的小波分析,而且能够快速的地分解和重构曲线.

附录 计算两个 B 样条基函数的内积

定义符号: $B_{i,k,x}$ 表示第 i 个定义在节点矢量 $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$ 上的 k 阶 B 样条基函数,

$$T_{i,j}^{k,l} = (-1)^k [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; t] [y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+l}; s] (s-t)^{k+l-1}$$

其中, $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; t]$ 是关于变量 t 在序列 $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ 上的差商符号, $[y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+l}; s]$ 也

同样.有: $\int_{-\infty}^{\infty} B_{i,k,x}(t) B_{j,l,y}(t) dt = \frac{k! l!}{(k+l-1)!} T_{i,j}^{k,l}$

其中

$$T_{i,j}^{k,l} = \begin{cases} \frac{(k+l-1)!}{k! l!} B_{i,k,x}(y_j), & y_j = y_{j+l}, l \geq 0 \\ \frac{(k+l-1)!}{k! l!} B_{j,l,y}(x_i), & x_i = x_{i+k}, k \geq 0 \end{cases}$$

$T_{i,j}^{k,l}$ 的递归形式如下:

$$T_{i,j}^{k,l} = \begin{cases} \text{当 } x_{i+k} \leq y_{j+l}, y_j \leq y_{j+l} \text{ 时} \\ \frac{(x_{i+k} - y_j) T_{i,j}^{k-1,l-1} + (y_{j+l} - x_{i+k}) T_{i,j}^{k,l} + T_{i,j}^{k-1,l}}{y_{j+l} - y_j} \\ \text{当 } y_j \leq x_i, y_l \leq y_{j+l} \text{ 时} \\ \frac{(x_i - y_j) T_{i,j}^{k,l-1} + (y_{j+l} - x_i) T_{i,j}^{k,l} + T_{i,j}^{k,l-1}}{y_{j+l} - y_j} \\ \text{当 } x_i \leq y_j, x_i \leq x_{i+k} \text{ 时} \\ \frac{(y_j - x_i) T_{i,j}^{k-1,l} + (x_{i+k} - y_j) T_{i,j}^{k,l} + T_{i,j}^{k-1,l}}{x_{i+k} - x_i} \\ \text{当 } y_{j-l} \leq x_{i+k}, x_i \leq x_{i+k} \text{ 时} \\ \frac{(y_{j+l} - x_i) T_{i,j}^{k,l-1} + (x_{i+k} - y_{j+l}) T_{i,j}^{k,l} + T_{i,j}^{k,l-1}}{x_{i+k} - x_i} \end{cases}$$

由以上各式可以计算出任意两个 B 样条基函数的内积.

参 考 文 献

1 Finkelstein A, Salesin D H. Multiresolution curves [A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'94 Computer Graphics [C].

- Orlando, Florida, USA, July 1994;261~268.
- 2 Kazinnik Roman, Elber Gershon. Orthogonal decomposition of non-uniform bspline spaces using wavelets [J]. Computer Graphics Forum(Proceedings of Eurographics), 1997,16(3):27~38.
 - 3 Stollnitz E J, DeRose T D, Salesin D H. Wavelets for computer graphics, theory & applications [M]. San Francisco, Morgan Kaufmann Publishers, Inc, 1996.
 - 4 Shigeo Takahashi, Yoshihisa Shinagawa, Kunii Toshiyasu L. Continuous-resolution-level constraints in variational design of multiresolution shapes [J]. The Visual Computer, 1998, 14: 177~192.
 - 5 朱心雄等. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
 - 6 孙延奎, 朱心雄. 曲线分层表示的小波方法[J]. 工程图学学报, 1999, (1):40~44.
 - 7 孙延奎, 朱心雄. 任意B样条曲面的多分辨率表示及光顺[J]. 工程图学学报, 1998, (3):49~54.
 - 8 秦开怀, 唐泽圣. B样条小波分解的快速算法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1999, 39(5):85~88.
 - 9 秦开怀, 关右江. B样条曲线的节点插入问题及两个新算法[J]. 计算机学报, 1997, 20(6):556~561.
 - 10 De Door C, Lyche L, Schumaker L L. On calculating with B-splines ii; integration[A]. In: Collatz L, Werner H, Merinardus G, eds., Numerische Methoden der Approximationstheorie[C]. Basel: Birkhauser. 1976:123~146.
 - 11 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社.

刘建 1978年生, 清华大学计算机科学与技术系博士研究生, 2001年获清华大学计算机科学与技术系工学学士学位. 研究兴趣包括计算机图形学、计算机辅助几何造型、小波分析等.



关右江 清华大学精密仪器与机械学系讲师. 研究兴趣包括计算机图形学、工程图学、计算机辅助设计等.



秦开怀 1958年生, 清华大学计算机科学与技术系, 高性能计算研究所教授, 博士生导师. 1990年获华中理工大学博士学位. 1999~2000年任美国哈佛大学访问教授. 主要研究兴趣包括计算机图形学、计算机辅助几何造型、小波分析、医学图象处理、可视化、动画、虚拟现实(VR)、CAD/CAM等.