

## 基于四点分段的一类三角多项式曲线

韩旭里

(中南大学应用数学与应用软件系, 长沙 410083)

**摘要** 提出了一类  $m(m=1, 2, 3)$  次分段三角多项式曲线. 通过引入形状参数, 给出了加权三角多项式曲线, 与三次 B 样条曲线类似, 每段三角多项式曲线由 4 个相继的控制点生成. 对于等距节点的情形, 所提出的三角多项式曲线是  $C^{2m-1}$  连续的; 给出了三角开曲线和闭曲线的构造方法, 论述了椭圆的表示方法, 给出了三角多项式曲线与三次 B 样条曲线的对比. 通过改变次数  $m$  或调整形状参数, 可以得到不同程度地接近于控制多边形的曲线. 因此, 所给曲线的生成方法是一种结构简单和使用方便的曲线生成方法.

**关键词** 曲线设计 三角多项式 样条曲线

**中图法分类号**: TP391.72 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2002)10-1063-04

### A Class of Trigonometric Polynomial Curves on Four-Point Piecewise Scheme

HAN Xu-li

(Department of Applied Mathematics and Applied Software, Central South University, Changsha 410083)

**Abstract** A class of piecewise trigonometric polynomial curves of degree  $m(m=1, 2, 3)$  is presented in this paper. Weighted trigonometric polynomial curves are given by using a shape parameter. Analogous to the cubic B-spline curves, each trigonometric polynomial curve segment is generated by four consecutive control points. For equidistant knots, the given trigonometric polynomial curves of degree  $m$  are  $C^{2m-1}$  continuous. The construction methods of an open and a closed trigonometric polynomial curves are described. The given curves can be used to generate ellipses conveniently. The comparisons between the trigonometric polynomial curves and the cubic B-spline curves are given. By choosing  $m$  or the shape parameter, the trigonometric polynomial curve can approach to the given control polygon in a different way. Therefore, the construction method of the trigonometric polynomial curves is simple and useful for curve design.

**Keywords** Curve design, Trigonometric polynomial, Spline curve

## 0 引言

众所周知, 三次 B 样条曲线<sup>[1]</sup>具有广泛的应用, 由于每段曲线由 4 个相继的控制点生成, 因而可灵活、方便地进行曲线设计.

通过使用张量参数, 人们研究了可以调整曲线形状的多项式曲线和有理曲线<sup>[2~4]</sup>, 文献[5]~文献[7]中给出了更高阶的有理曲线. 本文提出的一类三

角多项式曲线将易于进行曲线的形状调整.

三角样条和三角多项式在理论和实际应用的研究上, 都具有重要意义. 类似于多项式 B 样条, 文献[8]给出了三角 B 样条, 文献[9]建立了任意阶的三角 B 样条的递推关系. 文献[10]进一步地论证了奇数阶(偶数次)的三角 B 样条构成一个常数的单位分划, 因而对应的三角 B 样条曲线具有凸包性. 文中给出了生成二次三角 B 样条曲线的例子, 并提出了结构简单, 使用方便的三角多项式曲线.

### 1 三角多项式曲线

定义1 给定数据  $P_i \in \mathbf{R}^d (i=0, 1, \dots, n+1; d=2, 3)$  和节点  $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ . 对  $m=1, 2, 3$ . 定义调配函数

$$b_0(t) = \frac{1}{2^m + 2} (1 - \sin t)^m$$

$$b_1(t) = \frac{1}{2^m + 2} (1 + \cos t)^m$$

$$b_2(t) = \frac{1}{2^m + 2} (1 + \sin t)^m$$

$$b_3(t) = \frac{1}{2^m + 2} (1 - \cos t)^m$$

对  $i=1, 2, \dots, n-1$ , 定义三角多项式曲线段

$$B_i(t) = \sum_{j=0}^3 b_j(t) P_{i+j-1}, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (1)$$

由所有曲线段构造三角多项式曲线

$$T_m(u) = B_i \left( \frac{\pi}{2} \frac{u - u_i}{\Delta u_i} \right), u \in [u_i, u_{i+1}] \quad (2)$$

其中,  $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, i=1, 2, \dots, n-1$ .

当  $\Delta u_i$  是常数时, 节点向量  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  为等距节点向量, 对应的三角多项式曲线  $T_m(u)$  为均匀三角多项式曲线.

显然,  $b_j(t) \geq 0 (j=0, 1, 2, 3)$  是  $m$  次三角多项式, 并且

$$\sum_{j=0}^3 b_j(t) = 1$$

因此, 三角调配函数在区间  $[0, \pi/2]$  上构成单位分割, 对应的曲线段  $B_i(t)$  具有凸包性.  $T_m(u)$  是定义在  $[u_1, u_n]$  上的  $m$  次三角多项式曲线. 当  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  时, 曲线  $T_m(u)$  位于  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  所构成的凸包中.

式(1)具有与三次 B 样条曲线分段表达式类似的形式, 因而可与三次 B 样条曲线一样进行插值、拟合、嵌入直线, 产生尖点等曲线设计.

为了更便于进行曲线形状的调整, 下面定义更一般的三角多项式曲线.

定义2 由三角多项式曲线式(2)定义加权三角多项式曲线

$$T_{l,m}(u; \lambda) = (1 - \lambda)T_l(u) + \lambda T_m(u) \quad (3)$$

其中,  $0 \leq \lambda \leq 1, 1 \leq l < m \leq 3$ .

式(3)定义了一类三角多项式曲线, 曲线  $T_{l,m}(u; \lambda)$  位于曲线  $T_l(u)$  和  $T_m(u)$  之间. 参数  $\lambda$  为形状参数.

### 2 曲线的连续性

定理 对三角多项式曲线式(2)有

$$T_m^{(k)}(u_i^-) = \left( \frac{\Delta u_i}{\Delta u_{i-1}} \right)^k T_m^{(k)}(u_i) \quad (4)$$

其中  $i=2, 3, \dots, n-1; k=0, 1, \dots, 2m-1$ .

证明 当  $m=1, 2, 3$  时, 有

$$B_{i-1} \left( \frac{\pi}{2} \right) = B_i(0) = \frac{1}{2^m + 2} (P_{i-1} + 2^m P_i + P_{i+1}) \quad (5)$$

$$B'_{i-1} \left( \frac{\pi}{2} \right) = B'_i(0) = \frac{m}{2^m + 2} (P_{i+1} - P_{i-1}) \quad (6)$$

当  $m=2, 3$  时, 有

$$B''_{i-1} \left( \frac{\pi}{2} \right) = B''_i(0) = \frac{m}{2^m + 2} [(m-1)P_{i-1} - 2^{m-1}P_i + (m-1)P_{i+1}]$$

$$B'''_{i-1} \left( \frac{\pi}{2} \right) = B'''_i(0) = \frac{m(m^2 - 3m + 1)}{2^m + 2} (P_{i+1} - P_{i-1})$$

当  $m=3$  时, 有

$$B^{(4)}_{i-1} \left( \frac{\pi}{2} \right) = B^{(4)}_i(0) = -\frac{12}{5} (P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1})$$

$$B^{(5)}_{i-1} \left( \frac{\pi}{2} \right) = B^{(5)}_i(0) = -\frac{57}{10} (P_{i+1} - P_{i-1})$$

因此, 有

$$B_i^{(k)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = B_i^{(k)}(0) \quad (7)$$

其中,  $k=0, 1, \dots, 2m-1; m=1, 2, 3$ .

对  $u \in [u_i, u_{i+1}], t = \frac{\pi}{2} \frac{u - u_i}{\Delta u_i}$ , 有

$$T_m^{(k)}(u) = \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta u_i} \right)^k B_i^{(k)}(t)$$

由此得

$$T_m^{(k)}(u^+) = \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta u_i} \right)^k B_i^{(k)}(0)$$

$$T_m^{(k)}(u_i^-) = \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta u_{i-1}} \right)^k B_{i-1}^{(k)} \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

因此, 由式(7)可知, 式(4)成立. 证毕.

由式(4), 可以说曲线  $T_m(u)$  是几何  $C^{2m-1}$  连续的 ( $GC^{2m-1}$  或  $G^{2m-1}$ , 见文献[1]). 特别地, 对等距节点向量有

$$T_m^{(k)}(u_i^-) = T_m^{(k)}(u_i^+)$$

其中,  $i=2, 3, \dots, n-1; k=0, 1, \dots, 2m-1$ , 因此, 得如下推论.

推论 均匀三角多项式曲线  $T_m(u)$  是  $C^{2m-1}$  连续的, 均匀三角多项式曲线  $T_{l,m}(u; \lambda)$  是  $C^{2l-1}$  连续的.

与三次 B 样条曲线类似, 式(5)和式(6)说明了

三角多项式曲线在节点处的位置和切向. 由定理的证明可见,  $m=2$  时的三角多项式曲线与三次 B 样条曲线在节点处重合, 且在节点处的一阶导矢和二阶导矢方向相同.

### 3 开曲线和闭曲线

开曲线与闭曲线的构造是曲线设计中最基本的内容. 人们需要了解开曲线端点的行为和如何构造闭曲线.

在定义 1 中, 取

$$P_c = 2P_1 - P_2 \text{ 或 } P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}$$

则有

$$T_m(u_1) = B_1(0) = P_1$$

$$T_m(u_n) = B_{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n$$

因此, 三角多项式曲线  $T_m(u)$  是以  $P_i (i=1, 2, \dots, n)$  为控制点的开曲线 ( $P_1 \neq P_n$ ), 点  $P_1$  和  $P_n$  为曲线的端点, 并且

$$T'_m(u_1) = \frac{\pi}{\Delta u_1} \cdot \frac{m}{2^m + 2} (P_2 - P_1)$$

$$T'_m(u_n) = \frac{\pi}{\Delta u_n} \cdot \frac{m}{2^m + 2} (P_n - P_{n-1})$$

即曲线  $T_m(u)$  在  $u_1$  和  $u_n$  处分别以  $P_2 - P_1$  和  $P_n - P_{n-1}$  为切向量. 图 1 分别给出了  $m=1, 2, 3$  时的均匀三角多项式点划曲线、实曲线和虚曲线. 图中点曲线为三次 B 样条曲线, 它几乎与  $m=2$  时的三角多项式曲线重合.

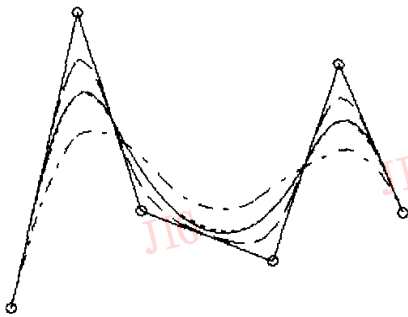


图 1 三角多项式开曲线

为了构造以  $P_i (i=1, 2, \dots, n)$  为控制点的三角多项式闭曲线, 取  $P_c = P_n, P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_2, u_{n+1} > u_n, B_n(t)$  由式 (1) 给出 ( $i=n$ ). 这样, 对  $i=1, 2, 3, \dots, n,$

$$T_m(u) = B_i\left(\frac{\pi u - u_i}{2 \Delta u_i}\right), u \in [u_i, u_{i+1}]$$

是定义在  $[u_1, u_{n+1}]$  上的闭曲线, 即有  $T_m(u_1) = T_m(u_{n+1})$ . 图 2 分别给出了  $m=1, 2, 3$  时的均匀三角多项式点划曲线、实曲线和虚曲线. 图中点曲线为三次 B 样条曲线, 它很接近于  $m=2$  时的三角多项式曲线.

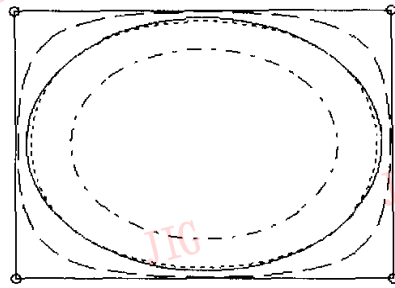


图 2 三角多项式闭曲线

### 4 椭圆的表示

多项式样条曲线不能表示除抛物线以外的圆锥曲线.

设  $P_{i-1} = (-a, -b), P_i = (-a, b), P_{i+1} = (a, b), P_{i+2} = (a, -b)$  为给定的 4 个控制点, 那么当  $m=1$  时,  $B_i(t)$  的坐标为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a(\sin t - \cos t) \\ y = \frac{1}{2}b(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

由此可得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

当  $m=2$  时,  $B_i(t)$  的坐标为

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}a(\sin t - \cos t) \\ y = \frac{2}{3}b(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

由此可得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{8}{9}$$

因此, 当  $m=1, 2$  时, 三角多项式曲线  $T_m(u)$  ( $u \in [u_i, u_{i+1}]$ ) 表示椭圆的一段弧. 当然, 可以按照前节生成闭曲线的方法生成完整的椭圆. 从图 2 可见, 三次 B 样条曲线接近椭圆的程度.

## 5 张量性

由式(5)易见,对  $i=1,2,\dots,n-1$  有

$$T_m(u_i) = P_i + \frac{1}{2^m + 2} (P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1})$$

因此,随着  $m$  的增大,  $T_m(u_i)$  将更接近于控制点  $P_i$ . 由图1和图2可见,随着  $m$  的增大,曲线段  $B_i(t)$  更接近于线段  $P_i P_{i+1}$ , 曲线  $T_m(u)$  更接近于控制多边形.

显然,曲线  $T_m(u)$  ( $m=1,2,3$ ) 之间存在一定的距离. 通过选取形状参数  $\lambda$ , 可以生成位于曲线  $T_m(u)$  ( $m=1,2,3$ ) 之间不同位置的曲线  $T_{l,m}(u; \lambda)$ . 图3分别给出了  $m=1,2,3$  时的三角多项式实曲线和  $l=1, m=2, \lambda=0.5$  时的三角多项式点曲线.

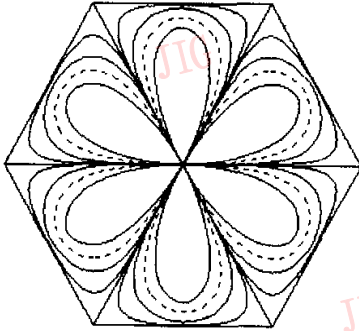


图3 三角多项式曲线示例

若控制点如上节所述, 则  $T_{1,2}(u; \lambda)$  ( $u \in [u_i, u_{i+1}]$ ) 表示一族椭圆弧, 其坐标方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \lambda \right)^2 \quad (8)$$

这样, 给定一个矩形为控制多边形, 由式(8)可见, 可以生成多个不同大小的椭圆, 椭圆的大小可由参数  $\lambda$  来控制. 因此, 所给三角多项式曲线为椭圆的设计提供了一种优越的方法.

## 6 结语

分段三角多项式曲线的表示式结构简单, 能方便地用于曲线设计和构造连续性要求较高的曲线. 三角多项式的次数  $m$  和参数  $\lambda$  起到了张量参数的作用, 即通过  $m$  和  $\lambda$  的选取值, 可以调整三角多项式曲线接近其控制多边形的程度, 以使三角多项式曲线能精确、灵活地表示椭圆.  $m=2$  时的三角多项

式曲线与三次 B 样条曲线接近. 通过使用张量积生成曲面的方法, 可由本文给出的调配函数生成三角多项式曲面, 这方面的问题可以进一步地研究.

## 参考文献

- Hoschek J, Lasser D. Fundamentals of computer aided geometric design[M]. Wellesley, MA: A. K. Peters, 1993.
- Barsky B A. Computer graphics and geometric modeling using Beta-spline[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
- Gregory J A, Sarfranz M. A rational cubic spline with tension [J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(9): 1~13.
- Joe B. Multiple-knot and rational cubic Beta-spline [J]. ACM Trans. Graph. 1989, 8: 100~120.
- Boehm W. Rational geometric splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(4): 67~77.
- Goodman T N T. Constructing piecewise rational curves with Frenet frame continuity [J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(7): 15~31.
- Joe B. Quartic beta-splines [J]. ACM Trans. Graph., 1990, 9: 301~337.
- Schoenberg I J. On trigonometric spline interpolation [J]. J. Math. Mech., 1964, 13: 795~825.
- Lycbe T, Winther R. A stable recurrence relation for trigonometric B-splines [J]. J. Approx. Theory, 1979, 25: 266~279.
- Walz G. Some identities for trigonometric B-splines with application to curve design [J]. BIT, 1997, 37: 189~201.
- Han X L. The parametric cubic trigonometric spline curve with factors [A]. In: Proceedings of the 6th International Conference on Computer Aided Design and Computer Graphics [C]. Shanghai: Wen Hui Publishers, 1999: 1021~1024.



**韩旭里** 1957年生, 博士, 教授, 现为中南大学应用数学与应用软件系主任. 主要研究领域为数值分析、系统科学与系统工程方法、计算机辅助几何建模. 发表论文50余篇.