

各向异性网格生成及其在曲面三角化中的应用

赵建军 钟毅芳 周 济

(武汉华中科技大学 CAD 中心, 武汉 430074)

摘 要 网格生成技术在工程分析, 科学计算可视化等领域有着重要的意义. 为了快速进行曲面三角化, 提出了一种二维各向异性网格生成方法, 通过引入椭圆距离和椭圆矩阵, 定义了三角形的外接椭圆, 从而将 Delaunay 三角化方法扩展到各向异性环境中, 并讨论了各向异性网格的性质. 随后将各向异性网格方法应用在曲面三角化当中, 并将曲面的第一基本形式作为参数域的椭圆矩阵, 同时给出了曲面 Delaunay 三角化的定义, 从而成功地利用了各向异性网格方法对曲面进行三角化. 实践证明, 不仅其速度要大大快于传统的三角化方法, 并且该方法能统一处理各种二次曲面和裁剪 NURBS 曲面.

关键词 各向异性网格 Delaunay 三角化 曲面三角化 椭圆距离

中图分类号: TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2002)09-0950-06

Anisotropic Mesh Generation and Its Application to the Surface Triangulation

ZHAO Jian-jun, ZHONG Yi-fang, ZHOU Ji

(CAD Center, Huazhong Univ. of Sci. & Tech., Wuhan 430074)

Abstract Meshing technology is of great importance in the areas of engineering analysis and scientific computing visualization. This paper proposes a anisotropic meshing method, In order to extends the Delaunay method to anisotropic contexts the elliptical distance and elliptical matrix is introduced and defined, and the circum-ellipse of a triangle is also defined. And then the method is applied to the surface triangulation, which takes the first fundamental form of surface as the elliptical matrix. Consequently, the definition of surface triangulation is obtained and an algorithm is proposed. The speed of the algorithm is greatly faster than the previous methods. Our approach can uniformly copy with quadratic and trimmed NURBS surfaces.

Keywords Anisotropic mesh, Delaunay Triangulation, Surface triangulation, Elliptical distance

0 引 言

网格生成技术在工程分析, 科学计算可视化等领域中有着重要的意义, 有关网格生成方法已开展了大量的研究, Ho-Le 以及 Owen 先后对本领域的研究进行了较全面的综述^[1,2]. 然而, 绝大多数研究均只探讨了各向同性的网格生成技术, 其目标通常是追求生成的单元质量最佳, 或者单元个数最少, 或者逼近误差最小. 其实, 在有些场合, 网格单元的形

状并不是越接近最佳就质量越好, 而是具有方向性要求, 例如, 在 CFD 领域, 就希望单元的形状与流体的流动方向对齐, 而在曲面的参数域, 又希望单元的形状与映射的拉伸方向对齐, 这就导致了各向异性网格生成技术的研究.

各向异性网格最直接的应用就是曲面的三角化. 尽管曲面三角化问题可直接在曲面的空间域进行, Lau 和 Lo 就提出了基于波前法的直接法^[3], 但由于这种方法必须计算曲面的法矢和切矢, 才能对波前进行推进. 另外, 这种方法还需要大量的曲面投

影操作的支持,以确保新生成的节点约束在曲面上;而且,为维护曲面三角网正确的拓扑关系,还需要一些波前的求交测试,因此直接法速度通常都远远低于基于参数域三角化的间接方法,而间接法也存在一些问题,其面临的一个最大问题就是如何在参数域保证空间域网格的质量问题。

解决间接法网格质量问题的方法有如下两种:

(1)修改或重新参数化参数域,以使映射单元质量得到改善^[4]。(2)改进网格生成算法,使参数域单元为各向异性单元,以便使其映射回空间后,成为各向同性的高质量单元^[5~7]。

但以上两种方法都存在一些不足,如质量问题、速度问题等。为克服上述方法的不足,本文提出一种基于椭圆距离的各向异性网格生成方法,并用此方法快捷地对曲面进行三角化。

1 各向异性网格生成

为达到各向异性的目的,先得给出各向异性的度量。本文使用的方法是距离加权法,即使距离的度量是方向的函数,不同方向的距离具有不同的权重,如果希望网格朝某方向对齐,则加大该方向的权重即可。为简化起见,可用椭圆模型来表示这种度量,设椭圆的长短轴之比为 $\mu(\mu \geq 1)$,长轴与 x 轴的夹角为 $\theta(0 \leq \theta < \pi)$,若令短半轴为单位长度,则椭圆方程可用二次齐次式表示为

$$x^T \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} x = 1 \quad (1)$$

化简可得

$$x^T \begin{bmatrix} \frac{\cos^2\theta}{\mu^2} + \sin^2\theta & \frac{\sin\theta\cos\theta}{\mu^2} - \sin\theta\cos\theta \\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{\mu^2} - \sin\theta\cos\theta & \frac{\sin^2\theta}{\mu^2} + \cos^2\theta \end{bmatrix} x = 1$$

令

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\cos^2\theta}{\mu^2} + \sin^2\theta & \frac{\sin\theta\cos\theta}{\mu^2} - \sin\theta\cos\theta \\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{\mu^2} - \sin\theta\cos\theta & \frac{\sin^2\theta}{\mu^2} + \cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

则式(2)化为

$$x^T M x = 1 \quad (3)$$

M 为对称正定二阶阵,相反,若给定二阶对称正定矩阵 $M_k = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$,其中, $a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$,则

可求出它的两个特征值 λ_1, λ_2 ,易知 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,以及与之相对应的单位正交化的特征向量 $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$,这样就确定了主方向及长短轴之比 μ 。

定义 1 椭圆距离与椭圆矩阵定义 设平面域 $D \subset \mathbb{R}^2$,给定参考点 $k \in D$,及与 k 相关联的二阶对称正定矩阵 $M_k = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$,满足 $a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$,则定义任意两点 $p_1 \in D, p_2 \in D$ 间的距离

$$d_k(p_1, p_2) = [(p_1 - p_2)^T M_k (p_1 - p_2)]^{1/2} \quad (4)$$

为椭圆距离, M 为椭圆矩阵,椭圆距离显然满足以下距离的 3 个公理:

- (1) 正定性: $d(x, x) = 0, \forall x \in D$;
 $d(x, y) > 0$ 当 $x \neq y$;
- (2) 对称性: $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in D$;
- (3) 三角不等式: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in D$.

称域 D 上定义的度量 d 为椭圆距离,以 (D, τ_d) 表示。

若对 $\forall x \in D$,均有二阶对称正定矩阵 M_x 与之关联,则 D 中以任一点为参考点 x 都有椭圆距离。当椭圆矩阵处处相等,且为单位阵时,椭圆距离退化为普通的欧氏距离。以下分两种情况讨论椭圆距离:

(1) 域 D 上椭圆矩阵唯一

若在 D 上,椭圆矩阵 M 处处相等,且与参考点无关,不妨设 M 为式(2),设 $x = p_1 - p_2$,则可通过下式变换

$$x = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \quad (5)$$

将式(4)椭圆距离化为: $y^T y = 1$,即可将椭圆变换成圆。

从式(5)可知

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} x \quad (6)$$

上式表示 x 顺时针方向旋转 θ 后,再在主轴方向压缩 $1/\mu$,即可将椭圆变换成圆。

定义 2 三角形的外接椭圆定义 给定椭圆矩阵 M 及 $\triangle abc, \triangle abc$ 的外接椭圆是到一定点的椭圆距离为定长的点集,该定点即为椭圆的中心,设为 o ,于是满足

$$(x - o)^T M (x - o) = r^2 \quad (7)$$

其中, r 为三角形的外接椭圆半径.

将已知点 a, b, c 的坐标 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3)$ 代入式(7), 可得

$$a(x_i - x_o)^2 + 2b(x_i - x_o)(y_i - y_o) + c(y_i - y_o)^2 = r^2 (i=1, 2, 3)$$

上式看似为三元二次方程组, 实则是由于中心点 (x_o, y_o) 为不动点, 因而可通过三元线性方程组解出, 上式可变换为

$$ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 - (2ax_o + 2by_o)x_i + (2cy_o + 2bx_o)y_i + r^2 - (ax_o^2 + 2bx_o y_o + cy_o^2) \quad (8)$$

令

$$\begin{aligned} A &= 2ax_o + 2by_o \\ B &= 2bx_o + 2cy_o \\ C &= r^2 - (ax_o^2 + 2bx_o y_o + cy_o^2) \end{aligned} \quad (9)$$

则式(8)可化为

$$ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 = Ax_i + By_i + C$$

将 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3)$ 代入上式, 即以线性方程组的方式解出 A, B, C , 从而从式(9)可得

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{Ac - Bb}{2ac - 2b^2} \\ y_o &= \frac{Ab - Ba}{2b^2 - 2ac} \end{aligned} \quad (10)$$

$$r = \sqrt{C + ax_o^2 + 2bx_o y_o + cy_o^2}$$

由于式(10)给出了椭圆中心坐标及半径, 因此三角形外接椭圆中心及半径可通过解三元一次方程组快速解出.

Delaunay 三角化(简称 DT)是构造二维网格最有效的方法, DT 中任一单元的外接圆不包含其他单元的顶点, 这就是 DT 法著名的空外接圆属性^[8], 本文将其推广到三角形的外接椭圆.

定义 3 基于椭圆距离的 DT 定义 设 $V \in D$, 如果 V 的三角化满足 $\Delta = (V, A)$, 且对于 Δ 中任意一个 $\triangle abc$, 其外接椭圆内部不包含 V 中的点, 则 Δ 为基于椭圆距离的 DT, 简称 EDT.

也可仿照约束 DT^[9] 来定义约束椭圆距离的 EDT, 本文不再详述.

EDT 具有和 DT 相同的许多性质, 如:

性质 1 对于通常位置的点(即无 4 点共圆的情况), EDT 唯一.

性质 2 设 $\Delta = (V, A)$ 为 EDT, 则将 p 点插入到 Δ 内, 令

$$C(p) = \{\cup t, t \in T, \cap p \in O(t)\}$$

则 $C(p)$ 关于点 p 呈星形状.

性质 3 设 $\Delta = (V, A)$ 为 EDT, 则将 p 点插入

到 Δ 内, 形成新的三角形网格 Δ_{new} , 设 w 为 $C(p)$ 的任一边界顶点, 则 pw 为 Δ_{new} 中的边.

以上性质表明, 由于 EDT 方法可以采用和 DT 方法完全相同的方式来增量插入, 因此只要稍加改写经典的基于增量插入的 DT 方法就可得到基于椭圆距离的各向异性网格生成算法.

增量插点算法的过程可用下式表示^[10]:

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i - C(p) + B(p)$$

其中, $B(p)$ 为连接 p 与 $C(p)$ 边界顶点形成的三角形网格.

以下给出各向异性 EDT 的增量插点算法, 该算法只给出了插入一点的过程, 实际上, 最终网格的每一点都是调用该算法实现的.

[算 法]: AnisotropicIncrementalInsertion (Point p)

```

初始化栈 stack
定位包含插入点  $p$  的三角形  $t$ 
将  $t$  三角形分成  $t_1, t_2$  和  $t_3$  3 个三角形
将  $t_1$  压入栈 stack 中
将  $t_2$  压入栈 stack 中
将  $t_3$  压入栈 stack 中
While(栈 stack 非空) do
     $t_i =$  stack 弹出一个元素
     $t_{opp} =$  与三角形  $t$  及插入点  $p$  相对应的三角形
    if PtInCircumCircle( $p, t_{opp}$ ) then
        交换由  $t$  和  $t_{opp}$  共有的边
        将  $t$  压入栈 stack 中
        将  $t_{opp}$  压入栈 stack 中
    Endif
EndWhile
End 算法
函数 PtInCircumCircle( $p$ ; Point,  $t$ ; triangle)
由式(10)计算三角形  $t$  的外接椭圆中心  $o$  坐标及半径  $r$ 
由式(4)计算  $o$  点到  $p$  点的椭圆距离  $d$ 
If( $d > r$ )
    Return FALSE
Else Return TRUE

```

从上述算法可知, 除了判断点是否在三角形外接椭圆的函数 PtInCircumCircle 外, 其余与传统的 DT 法^[10] 相同.

(2) 域 D 上每点都存在一个椭圆

以上对 EDT 的定义及它的性质都是基于域 D 上椭圆唯一得出的, 若椭圆不唯一, 则线性变换式(6)不成立, 且 EDT 的有关性质也难成立, 但由于 EDT 的构造过程是局部的, 因此只要局部动态

唯一即可。

若域中的椭圆是点的函数,则每一个点的椭圆不同,其精确距离的计算要通过积分才能得到,通常可取平均距离来近似精确距离。

定义 4 平均距离定义 已知 $\triangle abc$ 及其形心点 o ,以及与每一点相关联的椭圆,则 $\triangle abc$ 两点 p, q 的平均距离 $\bar{d}(p, q)$ 定义为

$$\bar{d}(p, q) = \frac{1}{4} [d_o(p, q) + d_b(p, q) + d_c(p, q) + d_a(p, q)] \quad (11)$$

有了平均度量,即仿照椭圆唯一的方式来定义三角形的外接椭圆以及 EDT。

图 1 和图 2 是两个各向异性网格生成的例子,其中图 1 是随机生成的 200 个呈圆周分布的点,图 2 是随机生成的 300 个呈矩形分布的点。图中 μ 表示长短轴比, θ 表示长轴与 x 轴的夹角。

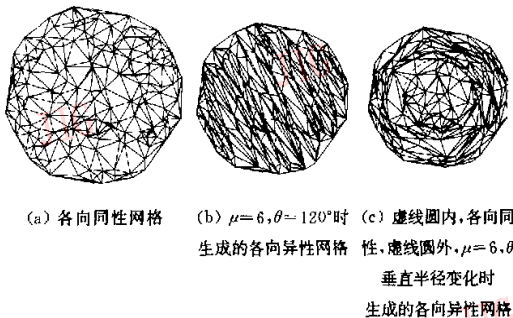


图 1 各向异性网格生成示例 1

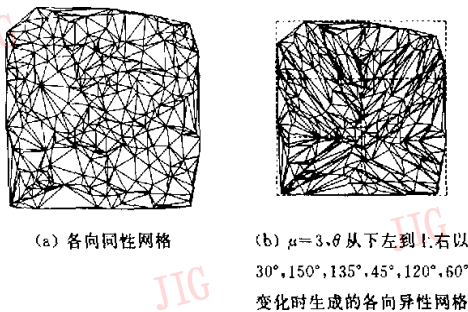


图 2 各向异性网格生成示例 2

2 曲面参数域上的椭圆距离

3D 欧氏空间的参数化曲面 S 定义为 $r=r(u, v)$, 给定参数域 Q 上任意一点 p , 则其 S 曲在上对应点 P 的切空间 $T_p(S)$ 可看作具有度量 g_p

的欧氏向量空间,其中 g_p 二阶正定对称,可表示为

$$g_p = \begin{bmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{bmatrix} \quad (12)$$

也可写成

$$dS^2 = E_p du^2 + 2F_p dudv + G_p dv^2 \quad (13)$$

其中, E_p, F_p, G_p (简称为 E, F, G) 为曲面 S 的第 1 类基本量,分别为

$$\begin{aligned} E &= r_u(p) \cdot r_u(p) \\ F &= r_u(p) \cdot r_v(p) \\ G &= r_v(p) \cdot r_v(p) \end{aligned} \quad (14)$$

据此易知,由于对任意 $p \in Q, E > 0, F > 0, E \times F - G^2 > 0$, 因此 g_p 二阶正定对称。

参数域上, g_p 的几何意义为空间点在点 p 的切平面上的欧氏距离度量,其在 p 点的一小邻域内的度量长度和与之对应的空间域中曲线长度只相差一高阶无穷小量。

下面再讨论几种在几何造型中经常使用的二次曲面的 E, F, G 值。

(1) 正圆柱面

设一正圆柱面的对称轴为 z 轴,半径为 R ,柱面高长为 L ,则它的参数方程可表示为

$$r(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v) \quad 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v \leq L$$

且由

$$\begin{aligned} r_u &= (-R \sin u, R \cos u, 0) \\ r_v &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

可得

$$E = r_u \cdot r_u = R^2, \quad F = r_u \cdot r_v = 0, \quad G = r_v \cdot r_v = 1$$

当 $R > 1$ 时,长短轴之比为 $\sqrt{E/G} = R, R < 1$ 时,为 $1/R$,由此可见,若半径越大,则参数域变形越厉害。

(2) 正圆锥面

设半顶角为 ω ,底圆半径为 R ,则对称轴是 z 轴的正圆锥面的参数方程为

$$r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v \cot \omega) \quad 0 \leq u < 2\pi, 0 < v \leq R$$

这里, $v \neq 0$, 因为 $v = 0$ 对应着正圆锥面的顶点,在顶点处,曲面不可微,所以必须把顶点排除,由

$$\begin{aligned} r_u &= (-v \sin u, v \cos u, 0) \\ r_v &= (\cos u, \sin u, \cot \omega) \end{aligned}$$

可得

$$E = r_u \cdot r_u = v^2, \quad F = r_u \cdot r_v = 0, \quad G = r_v \cdot r_v = 1 + \cot^2 \omega$$

其长短轴之比为 $\sqrt{E/G} = v \sin \omega$, 且 v 越大,参数域变形越厉害。

(3) 旋转面

把 xz 平面中的一条曲线

$$C: \begin{cases} x=f(v) \\ z=g(v) \end{cases} \quad a \leq v \leq b$$

绕 z 轴旋转一周后得到的旋转面的参数方程为

$$r(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)) \quad 0 \leq u < 2\pi, a \leq v \leq b$$

则由

$$r_u = (-f\sin u, f\cos u, 0)$$

$$r_v = (f'\cos u, f'\sin u, g')$$

可得

$$E=r_u \cdot r_u=f^2, F=r_u \cdot r_v=0, G=r_v \cdot r_v=(f')^2+(g')^2$$

据此,可方便地求出椭圆长短轴比 $\sqrt{E/G}$,由于以上 3 种几何形状的 $F=0$,因此椭圆都与坐标轴对齐.

(4) NURBS 曲面

NURBS 曲面的偏导数的计算需要用到德布耳递推公式,文献[13]对此进行了详细讨论.

总之,以上各种曲面的椭圆都可通过解析式得出,这一点就保证了基于椭圆距离的各向异性曲面

三角化算法具有快速的优点.

3 例子

图 3 是对简单二次曲面网格划分的结果,其图形为一个半顶角 45° 的半圆锥,参数域中, u 取 0 到 π , v 从 5 到 10. 图 3(a) 是用各向同性网格生成技术,并采用圆心插点得到的网格;图 3(b) 是对图 3(a) 中的点集用各向异性网格生成技术得到的网格;图 3(c) 是通过椭圆中心插点得到的网格,图 4 分别为图 3 的参数域网格;图 5 是网格质量的比较图, x 轴代表单元内角 (10° 为一个单位), y 轴表示单元内角个数的总和,由图 5 可知,图 3(a) 的网格单元内角大多在 $10^\circ \sim 30^\circ$ 之间,而图 3(b) 采用了各向异性网格生成技术后,质量得到明显的改善,但由于内点已经形成,因此质量改善有限. 图 3(c) 是采用椭圆中心插点的各向异性网格生成算法得到的网格(经过光顺处理),其内角都在 $50^\circ \sim 80^\circ$ 之间,质量最好.

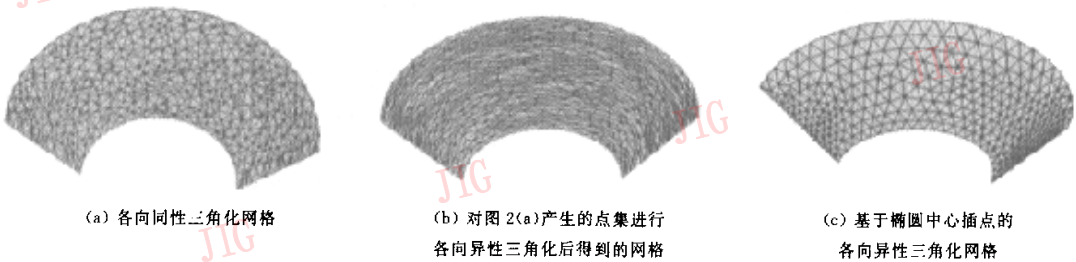


图 3 三角化结果

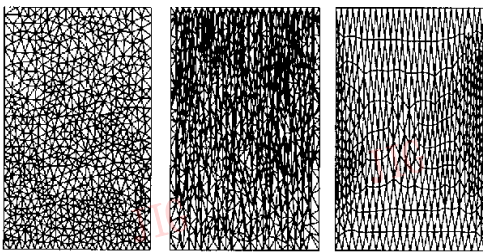


图 4 与图 3 中网格对应的参数域网格

图 6 是一个 NURBS 曲面的三角化例子,由图 6 可见,本文的算法生成的网格具有很高的质量.

4 结论

本文给出了一种各向异性网格生成方法,该方法可独立使用,也可用于曲面的三角化,当该方法应

用在需要快速获得任意点椭圆的场合时,能得到非常满意的效果.但该方法应用在曲面的逼近上,还有待进一步研究.

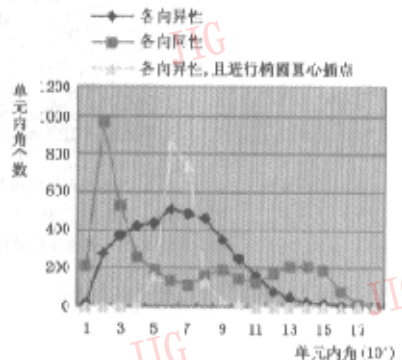


图 5 单元内角分布比较



图6 由 Trimmed NURBS 曲面组成的导弹外形的三角化

参考文献

- 1 Ho-Le. Finite element mesh generation method: a review and classification[J]. Computer-Aided Design, 1988,20(1):27~37.
- 2 Owen. Non-simplicial unstructured mesh generation [D]. Pittsburgh, USA. Carnegie Mellon University, 1999.
- 3 Lau T. S. Lo S. H. Finite element generation over analytical surfaces[J]. Computers and Structures, 1996,59(2):301~309.
- 4 Farouki R T. Optimal parameterizations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997,14:153~168.
- 5 Vigo M, Pla N. Directional adaptive surface triangulation[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999,16:107~126.
- 6 Vigo M, Pla N. Computing directional constrained delaunay triangulations[J]. Computers & Graphics, 2000,24:181~190.
- 7 Cuilliere J C. An adaptive method for the automatic triangulation of 3D parametric surfaces[J]. Computer Aided Design, 1998, 30(2):139~149.
- 8 Watson D F. Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes [J]. Computer Journal, 1981,24:167~172.
- 9 Vigo M. An improved incremental algorithm for constructing restricted Delaunay triangulations [J]. Computer & Graphics, 1997,21(2):215~223.
- 10 Borouchaki, Paul Louis. Aspects of 2D Delaunay mesh generation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997,40:1957~1975.
- 11 Leibon Leibon, Letscher D. Delaunay triangulations and Voronoi diagrams for Riemannian manifolds[A]. In:Proceedings of the sixteenth annual symposium on computational geometry 2000[C]. Hong Kong, China, 341~349, 2000.
- 12 苏步青, 胡和生等. 微分几何[M]. 北京:人民教育出版社, 1979.
- 13 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样[M]. 北京:高等教育出版社,2001.



赵建军 1973年生,2002年获华中科技大学博士学位,现为华中科技大学CAD中心研究人员,主要研究兴趣为有限元网格生成、CAD/CAE技术等。



钟毅芳 1936年生,教授,博士生导师,现为华中科技大学CAD中心学术委员会主任,主要研究兴趣为机械设计理论和方法、机械CAD、机械系统广义优化设计和计算机集成制造技术。

周济 1946年生,中国科学院院士,博士生导师,主要研究方向为CAD/CAM系统、优化设计。