

# 一类全不连通分形图的构造

章立亮

(宁德师范高等专科学校数学系, 福建宁德 352100)

**摘要** 为构造一类全不连通的分形图, 利用了适当的类康托集, 将某一迭代函数系统升腾为高维空间上的升腾迭代函数系统, 并通过参数调整构造出大量造型上全不连通的分形图, 同时发现了类康托集的结构和分形图的结构之间的变化关系, 实验结果表明, 该方法简单易用。

**关键词** 计算机图形学(520·6030) 迭代函数系统 分形图 类康托集 全不连通

**中图分类号**: TP391.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2003)07-0744-04

## Making of the Totally Disconnected Fractal Graphics

ZHANG Li-liang

(Department of Mathematics, Ningde Teachers College, Ningde Fujian 352100)

**Abstract** It makes a totally disconnected fractal image. The method for getting the IFS code from fractal image using the IFS code to draw the fractal image based on Iteration Function System are discussed. Traditional fractal method has been applied to the simulation of natural scenery. This paper attaches importance to the improvement of traditional fractal modeling. A iterated function systems is lifted liter iterated function systems to use similarity cantor rally and using the method of adjustment parameter make a large amount of fractal image totally disconnected and the relation is found the similarity cantor rally and the fractal image. It uses varying parameter for getting a large amount of fractal image. A simple image technique is given for computer simulation of the fractal image. The experimental result is shown to demonstrate that the model is simple and valid. I has been known that Iteration Function System is a very important method for generating fractal images. It show that Iteration Function System is also an effective way to generate ordinary planar curves.

**Keywords** Computer graphics, Iterated funtion systems, Fractal image, Similarity cantor rally, Totally disconnected

## 0 引言

众所周知, 迭代函数系统 IFS(Iterated function systems)是构造分形图的重要方法之一, 目前对于构造分形图的 IFS 码的求取还没有一般的方法<sup>[1]</sup>, 虽然对少数一些比较特殊的分形图已经得到它的 IFS 码, 但如何在已有的分形图 IFS 码的基础上产生新的 IFS 码, 以构造更丰富多样的分形图就显得特别有意义. 通过研究, 若将一类几何造型上呈现为“刚触及”和“重叠”形态的分形图转化为具有“全不连通”形态的分形图, 则可利用已有的分形图构造出

新类造型的分形图, 并且可对这种全不连通分形图的形态造型利用参数调整的方法加以控制, 以便为分形图的计算机模拟提供一种简单实用的造型技术. 实践证明, 这种分形图具有广泛的实际应用价值, 如可将它用于信息加密防伪、印染行业的图案设计、时装设计、书籍封面、宣传广告、包装材料图案、建筑装饰画等.

## 1 预备知识

**定义 1** 设集合  $\Sigma = \{x: x = x_1x_2, \dots, \forall i, x_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}\}$ , 其中  $N$  是任一正整数, 在  $\Sigma$  上定

基金项目: 宁德师范高等专科学校科学基金(200203)

收稿日期: 2002-10-10; 改回日期: 2003-04-07

义度量  $\rho_c(x, y) = \rho_c(x_1x_2 \cdots, y_1y_2 \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}$ ,  $\forall x, y \in \Sigma$ , 称  $(\Sigma, \rho_c)$  为  $N$  个数码的编码空间.

**定义 2** 设  $\{X, \omega_1, \dots, \omega_N\}$  是集合  $X$  上的一个双曲 IFS, 则  $N$  个数码的编码空间  $(\Sigma, \rho_c)$  称为相应于此双曲 IFS 的编码空间.

为了建立地址的概念, 可构造一个连续映射  $\varphi: \Sigma \rightarrow A$ , 把迭代函数系统的吸引子  $A$  上的点与编码空间  $\Sigma$  中的点相对应起来, 为此引入以下定理.

**定理** 设  $\{X; \omega_n; n=1, 2, \dots, N\}$  是完备度量空间  $(X, \rho)$  上的一个双曲 IFS, 相应的编码空间是  $(\Sigma, \rho_c)$ , 此 IFS 的吸引子为  $A$ , 对任意  $\sigma \in \Sigma, n \in \mathbb{N}$  和  $x \in X$  定义函数<sup>[2]</sup>:  $\varphi(\sigma, n, x) = \omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \dots \circ \omega_{\sigma_n}(x)$ , 则极限  $\varphi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\sigma, n, x)$  存在, 且  $\varphi(\sigma) \in A$  与初始点  $x$  无关, 函数  $\varphi: \Sigma \rightarrow A$  是连续且满的.

**定义 3** 设  $\{X; \omega_n; n=1, 2, \dots, N\}$  是双曲 IFS,  $(\Sigma, \rho_c)$  是相应的编码空间,  $\varphi: \Sigma \rightarrow A$  为如上定义的连续函数, 则集合  $\varphi^{-1}(a) = \{\omega \in \Sigma; \varphi(\omega) = a\}$  称为  $a$  的地址集. 如果任一  $a \in A$  只有唯一的地址, 则称 IFS 是全不连通的. 如果它不是全不连通的, 且存在一个非空开集  $V \subset X$  使 ①  $\omega_i(V) \cap \omega_j(V) = \emptyset$  ( $\emptyset$  为空集)  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$ ; ②  $\bigcup_{i=1}^N \omega_i(V) \subset V$ , 则称此 IFS 是刚触及的. 如果一个 IFS 既不是全不连通的, 也不是刚触及的, 则称此 IFS 是重叠的.

**定义 4** 设  $\Sigma$  是含  $N$  个数码的编码空间,  $\{X; \omega_i; i=1, 2, \dots, N\}$  是一双曲 IFS, 则称  $\{X \times \Sigma, \tilde{\omega}_i; i=1, 2, \dots, N\}$  为相应于双曲 IFS 的升腾 IFS, 其中  $\tilde{\omega}_i(x, \sigma) = (\omega_i(x), i\sigma), i=1, 2, \dots, N, (x, \sigma) \in X \times \Sigma$ . 升腾 IFS 的吸引子为  $\tilde{A} \subset X \times \Sigma = \{(\varphi(\sigma), \sigma); \sigma \in \Sigma\}$ ,  $\tilde{A}$  在  $X$  中的投影为

$$A = \{x \in X; (x, \sigma) \in \tilde{A}, \sigma \in \Sigma\}$$

## 2 全不连通分形图的构造

### 2.1 构造原理

对于刚触及的或重叠的 IFS, 由其中不同的映射进行迭代构成的分形图中, 各迭代图块之间, 在造型上呈现为“刚触及的”或“重叠的”形态, 通过引入适当的类康托集把此类分形图的 IFS 码进行升腾,

即可取得它的相应升腾 IFS 码, 此升腾 IFS 的吸引子是定义在乘积空间  $X \times \Sigma$  上, 由于任一编码空间, 只要含有的数码个数不少于 2 个, 则它一定与某一全不连通的类康托集等价<sup>[2]</sup>, 因此升腾 IFS 的吸引子在  $X \times \Sigma$  空间上是全不连通的, 这样就可以将刚触及的或重叠的 IFS 进行升腾, 以得到高维空间上的升腾 IFS, 然后就可在此空间上构造出形态上全不连通的分形图.

### 2.2 构造方法

对空间  $X$  上给定的 IFS  $\{X; \omega_i; i=1, 2, \dots, N\}$ , 如将每个迭代映射  $\omega_i$  均增加一个分量, 即可得到高维空间  $X \times \Sigma$  上的 IFS  $\{X \times \Sigma, \tilde{\omega}_i; i=1, 2, \dots, N\}$ .

具体方法为:

① 对含有  $N$  个 ( $N > 1$ ) 迭代映射的 IFS  $\{X; \omega_i; i=1, 2, \dots, N\}$ , 可采用类似于康托三分集的构造方法构造一个含有  $2N - 1$  个区间的集合  $G = \bigcup_{i=1}^{2N-1} [r_i, r_{i+1}]$ .

② 取出集合  $G$  中所有的奇数号区间  $[r_i, r_{i+1}]$  ( $i$  为  $1, 2, \dots, 2N - 1$  中的奇数), 以构造一个含这  $N$  个区间的类康托集  $F = \bigcup [r_i, r_{i+1}]$  ( $i$  为  $1, 2, \dots, 2N - 1$  中的奇数), 并用该类康托集  $F$  中的  $N$  个区间分别对应  $N$  个迭代映射  $\omega_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ).

③ 计算每个奇数号区间  $[r_i, r_{i+1}]$  的长度  $r_{i+1} - r_i$  记为  $q_i$  以及  $[r_i, r_{i+1}]$  的左端点值  $r_i$ . 设双曲 IFS  $\{X; \omega_i; i=1, 2, \dots, N\}$ , 其中,

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

则由以上方法构造的升腾 IFS 为

$$\{X \times \Sigma, \tilde{\omega}_i; i=1, 2, \dots, N\}$$

$$\text{其中 } \tilde{\omega}_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \\ r_i \end{pmatrix}$$

由于类康托集的结构对升腾 IFS 的吸引子的形状和结构影响很大, 因此在具体考虑类康托集的构造时, 对于不同的 IFS 码可以通过实验的方法来得得恰当的类康托集, 但在确定两个参数  $q_i$  和  $r_i$  的具体取值范围时, 需要在屏幕上观察相应分形图的形状和结构, 以便反复修正参数值, 直至产生最终满意的图形为止.

## 3 实例与分析

**实例 1** 一个刚触及的双曲 IFS  $\{C; \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ,

其原 IFS 码与升腾 IFS 码见表 1.

表 1 原 IFS 码与升腾 IFS 码表

	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$	$q_i$	$r_i$	概率
$\omega_1$	0	0.577	-0.577	0	0.095	0.589			0.33
$\omega_2$	0	0.577	-0.577	0	0.441	0.789			0.33
$\omega_3$	0	0.577	-0.577	0	0.095	0.989			0.34
$\tilde{\omega}_1$	0	0.577	-0.577	0	0.095	0.589	0.37	0	0.33
$\tilde{\omega}_2$	0	0.577	-0.577	0	0.441	0.789	0.37	2	0.33
$\tilde{\omega}_3$	0	0.577	-0.577	0	0.095	0.989	0.37	3	0.34

选取类康托集

$$F=[0 \ 0.37] \cup [2 \ 2.37] \cup [3 \ 3.37]$$

实例 2 一个重叠的双曲 IFS  $\{C; \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ , 其原 IFS 码与升腾 IFS 码见表 2.

表 2 原 IFS 码与升腾 IFS 码表

	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$	$q_i$	$r_i$	概率
$\omega_1$	0.3535	0.3535	-0.3535	0.3535	0.4	-0.2			0.25
$\omega_2$	0.3535	-0.3535	0.3535	0.3535	-0.4	-0.2			0.25
$\omega_3$	0.5	0	0	0.5	0	0.3			0.25
$\omega_4$	0.5	0	0	0.5	0	-0.3			0.25
$\tilde{\omega}_1$	0.3535	0.3535	-0.3535	0.3535	0.4	-0.2	0.25	0	0.25
$\tilde{\omega}_2$	0.3535	-0.3535	0.3535	0.3535	-0.4	-0.2	0.25	0	0.25
$\tilde{\omega}_3$	0.5	0	0	0.5	0	0.3	0.25	1	0.25
$\tilde{\omega}_4$	0.5	0	0	0.5	0	-0.3	0.25	3	0.25

选取类康托集

$$F=[0 \ 0.25] \cup [0 \ 0.25] \cup [1 \ 1.25] \cup [3 \ 3.25].$$

分析:以上两例中,IFS 的吸引子均采用随机迭代算法生成,由二维空间上的 IFS 升腾为三维空间上的 IFS,其所得的三维图形可通过透视变换<sup>[3]</sup>:

$$\begin{cases} \tilde{x}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma \\ \tilde{y}=x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma \end{cases}$$

显示在屏幕上.上式中的

$(x, y, z)$  为三维空间上点坐标,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  为透视变换后的二维平面上的点坐标,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  为透视角度.实例 1 中,原 IFS 的吸引子是由 3 部分“触及”组成的(见图 1(a)),实例 2 中,原 IFS 的吸引子是由 4 部分的叶子状“重叠”组成的(见图 2(a)).若将它们分别进行升腾,使各个部分分离开,则其得到的全不连通的图形见图 1(b)和图 2(b).这种由  $N$  个迭代映射产生的造型上全不连通的图形,其各局部在纵向上的分布结构和所选取的类康托集的各区间之间的构成形式(即区间的大小、间距)是相对应的,若对原 IFS 分形图按照类康托集的结构反复进行迭代映射,则每进行一次迭代,分形图的各个局部都被进一步划分成  $N$  个部分,这种划分在竖直方向上和相应的类康托集中各区间的划分方式是一致的.由此可

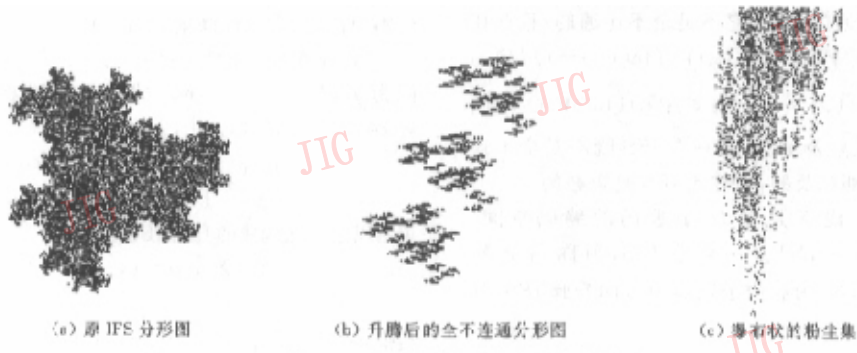


图 1 一个刚触及的双曲 IFS 分形图



图 2 一个重叠的双曲 IFS 分形图

见,类康托集的结构就决定了由它产生的分形图的形态结构,而且类康托集中各区间的长度  $q_i$  和相邻区间之间的间距(由参数  $r_i$  确定)可以根据实际需要取不同的数值,其中区间的长度值将控制产生的分形图中,各迭代图块形态结构紧密或疏散程度,若区间的长度值越小,则相应迭代图块的结构就越紧密,反之区间的长度值越大,则相应迭代图块的结构就越疏散,例如随着参数  $q_i$  的值从零开始,由小到大递增,分形图的结构逐渐由紧密变得疏散,当参数  $q_i$  的值达到一定数值时,各迭代图块急剧溶解散化交织到一起,而演化出另一类分形图,如  $q_i = 0.7$  时,由实例 1 的升腾 IFS 码产生的图形呈瀑布状的粉尘集(图 1(c)),由实例 2 的升腾 IFS 码产生的图形呈火焰状的粉尘集(图 2(c)). 据研究,相邻区间之间的间距值决定了产生的分形图中各迭代图块的高度分布状况,即各迭代图块的高度分布和所选取的类康托集中各区间的布局结构相同,由实验结果可见,若相邻区间的间距越小,则相应迭代图块的纵向距离也越小;反之,则相应迭代图块的纵向距离也就越大,如对图 1(b)和图 2(b)就可以通过调整参数  $r_i$  的值来控制图中各局部之间的纵向距离.

综上所述:利用类康托集构造全不连通的分形图时,通过调整参数  $q_i$  与参数  $r_i$  的取值来求得原 IFS 码的相应升腾 IFS 码,就可以构造出不同形态的分形图,实践表明,这种造型技术简单易用,且不同的参数组合可以得到大量不同形态造型的分形图.

## 4 结束语

通过将某一双曲 IFS 进行升腾来得到相应的升腾 IFS,提出了一种构造一类全不连通分形图的方法,从而为分形图的计算机模拟提供了一种有效的途径. 通过实验发现,在构造升腾 IFS 时,选取的类康托集结构不同,其产生的分形图形状和结构也不相同,另外还找到了类康托集的结构与分形图形状的变化关系,这样通过调整类康托集的结构就可以得到大量不同形态的分形图.

## 参考文献

- 1 齐东旭著. 分形及其计算机生成[M]. 北京:科学出版社,1994:53~60.
- 2 曾文曲,王向阳等著. 分形理论与分形的计算机模拟[M]. 沈阳:东北大学出版社,2001:41~66.
- 3 金以文,鲁世杰编著. 分形几何原理及其应用[M]. 杭州:浙江大学出版社,1998:221~228.



**章立亮** 1963年生,1990年毕业于福建省教育学院数学系,大学本科,讲师,1995年9月~1996年7月于中国科技大学计算数学与应用软件专业学习. 主要研究领域为计算机图形学、分形及计算机模拟.