

用多项式近似的图象逆滤波及 空间移变系统图象的恢复

文玉梅 李平

(重庆大学光电工程学院教育部光电技术及系统重点实验室, 重庆 400044)

摘要 光(电)成像系统的特性会引起图象降质,但如果能够根据系统的传递函数确定其逆滤波函数,就可以对这种降质图象进行一定的恢复.为此,提出了一种用多项式近似的图象逆滤波的图象恢复方法,该方法就是首先将连续的逆滤波函数按泰勒级数展开,并用多项式来近似表示,通过对用多项式表达的用于图象恢复的逆滤波函数作反傅里叶变换,就可得到恢复图象在空间域中的近似运算公式,该运算是图象信号及其各阶导数的线性组合,而不是复杂的反卷积操作.同时还详细分析了方法的原理,并推导了算法公式,最后给出了空移不变和移变系统图象的恢复处理结果.实验表明,该方法特别适合于空间移变系统降质图象的恢复,如场曲恢复.

关键词 计算机图象处理(520·6040) 图象恢复 反卷积 逆滤波 空间移变 场曲

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2003)09-1021-07

The Image Inverse Filtering with Polynomial Approximation and the Image Recovery in Spatially Variant Systems

WEN Yu-mei, LI Ping

(College of Optoelectronic Engineering and The Key Lab of Optoelectronic Technology and Systems of the Education Ministry Chongqing University, Chongqing 400044)

Abstract The deteriorated image resulting from imaging system performances can be recovered with inverse filtering by multiplying the inverse filtering function and the Fourier transform of the acquired image providing that the optical imaging transfer function is known and its inverse function or the corresponding inverse filtering function can be found according to the measure or the priori knowledge of the imaging transfer function. If the inverse function is continuous about the origin it may actually be represented as the Taylor series. The inverse Fourier transform operation of the polynomial series is differentiation of orders corresponding to degrees in the polynomial. Consequently, the inverse Fourier transform of the recovered image is approximately realized in spatial domain by the linear combinations of the image and its derivatives rather than by complicated deconvolution. It is considerable for the recovery of the spatially variant deterioration, such as the deterioration resulting from curvature of field. For images of space-variant degradation, the linear combining coefficients are functions of spatial coordinates specified by the spatial variance. Detailed analysis and derivation of equations are presented. Finally, the processing results both in spatial invariant and variant systems are given.

Keywords Image recovery, Deconvolution, Inverse filtering, Spatially variance, The curvature of fields

0 引言

一般由光学系统或光电成像系统获得的图象信号,都受到系统特性的作用.例如,由于实际的系统都是频率带宽有限的,所以获得的图象都是通过一

个频率选择系统的信号.图象恢复就是从获得的图象信号中,尽量消除由系统的非理想性能对图象信号的降质.对于线性系统来说,从获得的图象恢复出不失真的图象是一个反卷积过程^[1].由于在空间域中的反卷积运算复杂,所以反卷积更多的是首先在空间频率域施行,然后再通过反傅里叶变换来得到

基金项目:重庆市科技攻关项目(20020813)

收稿日期:2002-09-03; 改回日期:2003-02-10

恢复图象的空间信号. 可是由于移变系统对输入的作用, 不再是卷积, 而是一个叠加积分, 因而不能用反卷积方法来恢复移变系统造成的图象降质. 如果通过分割图象, 把每一个局部图象区域的传递函数认为是空移不变的, 又将引入分割噪声, 进而将使各个区域的边界产生图象畸变.

逆滤波图象恢复则首先需要估计和确定线性系统传递函数, 其逆函数和图象信号的傅氏变换乘积的反傅氏变换就是恢复的图象信号. 本文提出的方法是首先将传递函数的逆函数进行泰勒级数展开, 然后用 n 阶多项式近似表示, 这样逆函数和图象信号的傅氏变换乘积的反傅氏变换就近似等于获得图象及其 n 阶导数的线性组合, 由于其组合系数是由传递函数的逆函数在空间确定点的参数确定, 因此这种方法也适合空间移变系统降质的恢复.

1 多项式近似逆滤波原理

一个光学或者光电成像系统的点扩散函数为 $h_{s,r}(x, y)$, 其中, (s, t) 为物平面(输入平面)坐标, (x, y) 为像平面(输出平面)坐标. 对于空间移变系统点扩散函数为 $h_{s,r}(x, y)$ 的自变量是 (x, y, s, t) , 而系统的传递函数

$$H_{s,r}(u, v) = \mathcal{F}(h_{s,r}(x, y)) \quad (1)$$

是点扩散函数对变量 (x, y) 的傅氏变换, \mathcal{F} 表示傅氏变换, u, v 分别是 x, y 方向的空间角频率. $H_{s,r}(u, v)$ 的角变量是 (u, v, s, t) .

一般空移不变系统的点扩散函数为 $h_{s,r}(x, y) = h(x, y)$ 仅仅是变量 (x, y) 的函数, 而其传递函数 $H(u, v)$ 也仅仅是 (u, v) 的函数, 即对输入面上各个点的输入都具有相同的系统作用. 对空移不变系统, 输入信号 $g(s, t)$ 通过点扩散函数 $h(x, y)$ 映射为输出 $f(x, y)$.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, t) h(x - s, y - t) ds dt \quad (2)$$

式(2)是卷积运算. 这里没有考虑成像过程可能叠加的噪声. 式(2)的傅氏变换是

$$F(u, v) = H(u, v) \cdot G(u, v) \quad (3)$$

其中, $G(u, v)$ 是输入信号 $g(s, t)$ 的傅氏变换.

图象恢复就是要从成像系统得到的图象信号 $f(x, y)$ 或者 $F(u, v)$, 尽量不失真地得到 $g(x, y)$ 或者 $G(u, v)$. 如果能确定 $H(u, v)$ 的逆函数 $H_{-1}(u, v)$, 因为 $H_{-1}(u, v) \cdot H(u, v) = 1$, 那么就能恢复得到没

有受到系统作用的真实图象, 于是

$$H_{-1}(u, v) \cdot F(u, v) = H_{-1}(u, v) \cdot H(u, v) \cdot G(u, v) = G(u, v) \quad (4)$$

这就是反卷积的频率域实现, 或者称为逆滤波.

如果 $H_{-1}(u, v)$ 在图象信号的频率支持域内是 $C^{(n)}$ 类函数 (n 阶偏导连续), 那么就可应用泰勒公式将 $H_{-1}(u, v)$ 在 $(0, 0)$ 处展开为如下 n 阶多项式

$$H_{-1}(u, v) = H_{-1}(0, 0) + \frac{1}{1!} D(H_{-1}(0, 0)) + \frac{1}{2!} D^{(2)}(H_{-1}(0, 0)) + \dots + \frac{1}{n!} D^{(n)}(H_{-1}(0, 0)) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} D^{(n+1)}(H_{-1}(\theta u, \theta v)) \quad (0 < \theta < 1) \quad (5)$$

式中, 微分算子 D 为

$$D = \frac{\partial}{\partial u} u + \frac{\partial}{\partial v} v \quad (6)$$

取 $H_{-1}(u, v)$ 的 n 阶近似, 式(5)可以表示成

$$G(u, v) \approx \left[H_{-1}(0, 0) + \frac{1}{1!} D(H_{-1}(0, 0)) + \frac{1}{2!} D^{(2)}(H_{-1}(0, 0)) + \dots + \frac{1}{n!} D^{(n)}(H_{-1}(0, 0)) \right] \cdot F(u, v) \quad (7)$$

对式(7)作反傅氏变换就得到近似的恢复图象信号 $\tilde{g}(x, y)$. 由于 $\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^m \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]^m f(x, y)$ 和 $u^m v^m F(u, v)$ 是傅里叶变换对 (m, n 是整数)^[2], 因此式(7)的反傅氏变换是

$$g(x, y) \approx \tilde{g}(x, y) = H_{-1}(0, 0) \cdot f(x, y) + \frac{1}{i^i \cdot 1!} \times H^{(1)}(0, 0) \cdot f^{(1)}(x, y) + \frac{1}{i^i \cdot 2!} \times H^{(2)}(0, 0) \cdot f^{(2)}(x, y) + \dots + \frac{1}{i^i \cdot n!} \times H^{(n)}(0, 0) \cdot f^{(n)}(x, y) \quad (8)$$

其中, i 代表虚部,

$$H^{(n)}(0, 0) = \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right]^{(n)} H_{-1}(u, v) \Big|_{u=0, v=0}, f^{(n)}(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n)} f(x, y).$$

这里首先需要说明选取在空间频率坐标的原点, 也就是在 0 频率点对传递函数进行多项式展开的合理性: 因为实际的光(学)电系统, 都是从零频到一定频率范围的频率有限系统, 即它的传递函数只是包含原点在内的有限频率支持域, 或者是能量集中在包含原点的某一个区域内的速降函数. 例如, 与数字化图象信号对应的连续信号, 其频率支持域为 $(|u| \leq \omega_s/2, |v| \leq \omega_s/2,$

ω_x, ω_y) 分别是 x, y 方向的空间采样频率, 其数字化频率区间为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. 式(8)实际上是图象恢复反卷积的近似表达, 它表明, 当计算恢复信号 $\tilde{g}(x, y)$ 的各点值时, 仅仅需要输入平面对应点的逆传递函数参数和输出平面对应点的获得信号及其各阶导数的值即可. 相对于反卷积运算, 或者频率域逆滤波后再进行反傅立叶变换的图象恢复算法来说, 利用式(8)来实现图象恢复的计算优势是十分明显的. n 阶近似的逆传递函数表示为 $\tilde{H}_{-1}(u, v)$, 根据泰勒公式, 其近似的余项是

$$\Delta(u, v) = H_{-1}(u, v) - \tilde{H}_{-1}(u, v) = \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right]^{(n+1)} H_{-1}(\theta u, \theta v), 0 < \theta < 1 \quad (9)$$

恢复后系统的传递函数 $R(u, v)$ 为

$$R(u, v) = H(u, v) \cdot \tilde{H}_{-1}(u, v) = 1 \cdot H(u, v) \cdot \Delta(u, v) \quad (10)$$

根据式(10)可以评价恢复系统的性能.

2 多项式近似逆滤波处理

逆滤波首先需要根据图象系统的传递函数来获得它的逆函数, 而且只要逆函数在频率原点是连续的, 就可以根据式(8)求得图象恢复所需要的参数. 一般说来, 若函数的多项式近似, 且近似阶数越高, 则近似误差越小, 但是在用多项式来近似逆滤波恢复图象时, 其图象恢复的误差由式(8)中反传递函数多项式的近似阶次和对应的图象信号的高阶导数值的误差确定. 由于随着近似阶数次的增加, 尽管多项式误差将减小, 但是图象恢复运算量将增加, 并且图

象信号的高阶导数计算误差也会因信号的数字化量化误差而累计增加, 所以应根据图象的特征和误差要求来选取合适的近似阶次.

例如, Gauss 型点扩散函数

$$h(x, y) = Ae^{-\sigma(u^2+v^2)} \quad (11)$$

是光电成像系统最常见的散焦模糊降质函数. 其中 A 是常数, $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ 是扩散方差, 其平方根通常定义模糊半径 σ . 其对应的傅氏变换^[3]为

$$H(u, v) = A \cdot \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha(u^2+v^2)/4\alpha} \quad (12)$$

其逆函数是

$$H_{-1}(u, v) = \frac{\alpha}{A\pi} e^{\alpha(u^2+v^2)/4\alpha} \quad (13)$$

由于 Gauss 函数的奇次阶导数在原点处为零, 所以采用偶阶次近似. 由根据式(10)作的数值分析显示可见, 二阶多项式近似恢复后的系统带宽(3dB 带宽)是原带宽的 1.7~1.9 倍, 四阶多项式近似恢复后的系统带宽是原带宽的 2.3~2.5 倍, 而六阶多项式近似恢复却只提高到原带宽的 2.5~2.7 倍. 这也表明, 在逆滤波中, 当多项式近似阶次达到一定时, 阶次的增加并不能对恢复性能有显著的提高.

为了解本文方法的图象恢复效果, 选取 3 张具有不同频率特性的图象进行 Gauss 型扩散散焦, 再用多项式进行近似恢复处理. 图 1 至图 5 是以 Gauss 函数不同扩散半径扩散散焦后的模糊图象及其恢复结果. 其中眩晕图象从中心向外频率成分差别较大, 圆点阵图象基本是周期的, 而鹰图象的频率成份则比较丰富. 由图 1 至图 5 可看出, 在获得图象本身的信噪比较高时, 高阶次近似较低阶次多项式的图象恢复效果

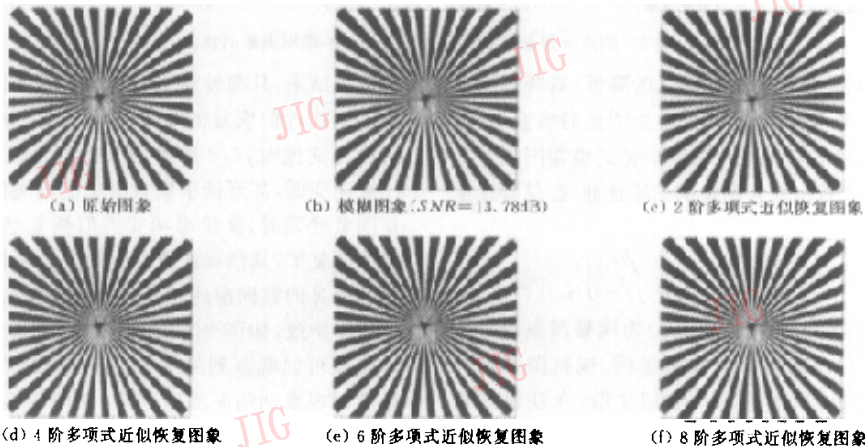


图 1 原始眩晕图象及扩散半径为 3 pixels 模糊图象和多项式近似恢复图象

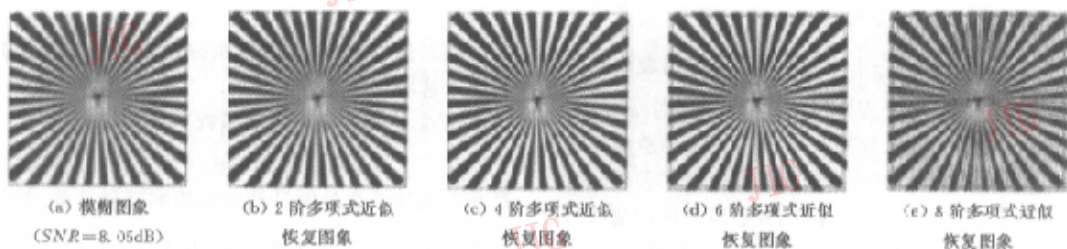


图2 扩散方差为 6 pixels 的模糊眩晕图像及多项式近似恢复图像

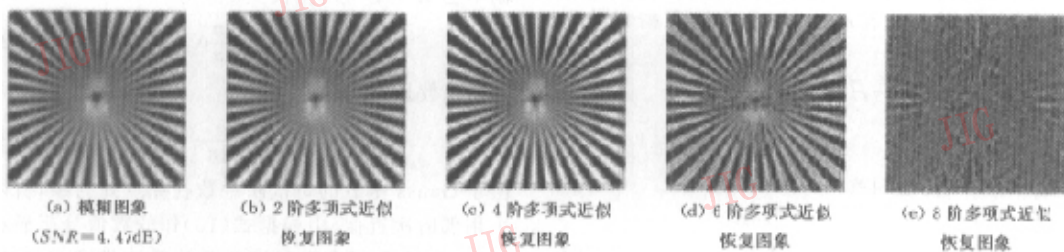


图3 扩散方差为 10 pixels 的模糊眩晕图像及多项式近似恢复图像

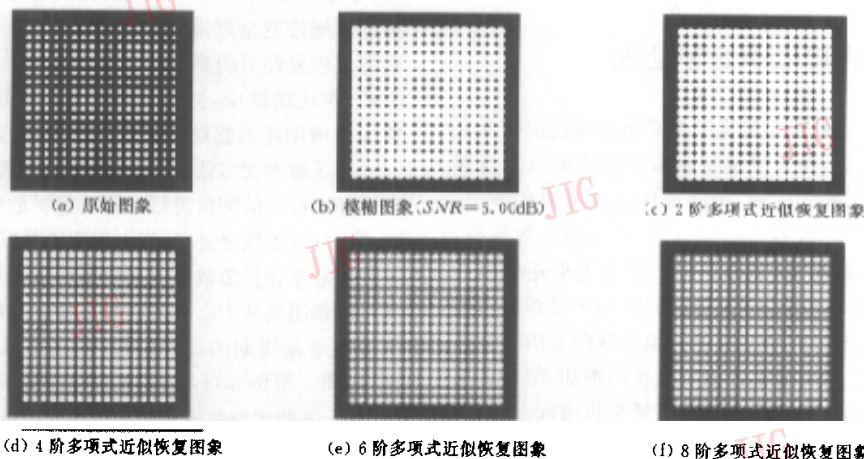


图4 圆点阵图像及其扩散方差 4 pixels 模糊图像的恢复

更好,但是随着获得图像信噪比的降低,高阶多项式近似恢复将引入噪声,使图像发生明显的畸变退化.图6是与经过不同 Gauss 模糊半径的模糊图像对应的各阶多项式近似恢复图像的信噪比曲线.信噪比定义为

$$SNR = 10 \log_{10} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{f^2(i,j)}{[g(i,j) - f(i,j)]^2} \quad (14)$$

式中, $g(i,j)$ 为原始图像, $f(i,j)$ 为模糊图像或者恢复后图像, (i,j) 是图像的像素坐标. 根据图6信噪比曲线可以看出,对于 Gauss 型扩散,在获得图像的信噪比较高时(扩散方差小于 3 pixels),4,6,8 阶多项式近似恢复的图像信噪比优于 2 阶多项式近似

恢复的结果,且都较输入的图像的信噪比提高,4~8 阶多项式近似恢复的效果差别不大;当获得的图像信噪比变低时,6,8 阶多项式近似恢复的图像信噪比快速变低,甚至低于输入图像的信噪比.其实从恢复图像效果看,高阶多项式近似恢复把图像细节更好地恢复了,其信噪比降低是由于在低信噪比时,因高阶运算的数据振荡以及对量化误差的放大而引入了噪声所致,如图 2(e),图 5(f)8 阶多项式近似恢复图像可以观察到的细纹,图 4(f)8 阶近似恢复图像可以观察到的振荡环,图 2(e)8 阶多项式近似恢复图像及图 3(d)和图 3(e)6,8 阶多项式近似恢复图像即发生一定退化.总的来说,4 阶多项式近似恢



图 5 鹰图象及其扩散方差 4 pixels 模糊图象的恢复

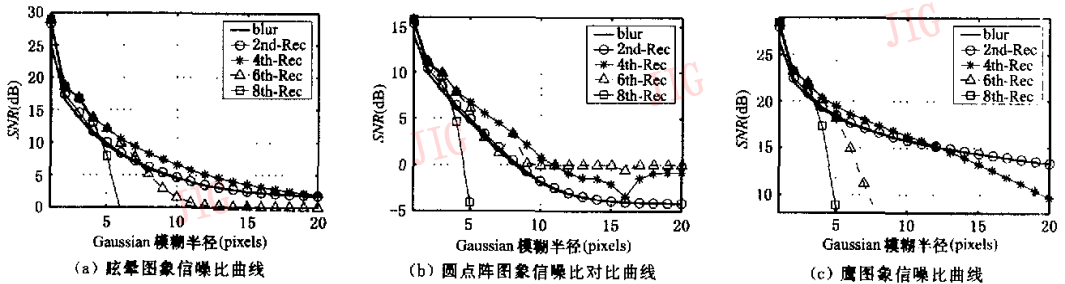


图 6 各阶近似恢复图象信噪比曲线

复的效果最佳. 对于这 3 种图象. 当扩散方差达到 10pixels 时(信噪比甚至小于 0dB), 4 阶多项式近似恢复都能有效提高图象的信噪比, 均可获得一定的图象恢复效果.

3 多项式近似逆滤波恢复场曲图象

对于空间移变系统, 点扩散函数既是输出平面坐标 (x, y) 的函数, 也是输入平面坐标 (s, t) 的函数, 而输入信号 $g(s, t)$ 则通过点扩散函数 $h_{s,t}(x, y)$ 映射为输出 $f(x, y)$. 因为点扩散函数为 $h_{s,t}(x, y)$ 仅仅作用于输入平面 (s, t) 点的输入, 输入信号 $g(s, t)$ 在点 (s, t) 的采样为 $g(s, t) \cdot \delta(x-s, y-t)$, $\delta(x, y)$ 是二维冲激函数, 于是产生的输出是

$$f_{s,t}(x, y) = h_{s,t}(x, y) * [g(s, t) \cdot \delta(x-s, y-t)] = g(s, t) \cdot h_{s,t}(x-s, y-t) \quad (15)$$

经过移变系统的总输出 $f(x, y)$ 是由所有输入 $f_{s,t}$ 产生的输出叠加

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s,t}(x, y) ds dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s, t) \cdot h_{s,t}(x-s, y-t) ds dt \quad (16)$$

应当注意式(16)并不是卷积运算, 而是叠加积分运算, 因为 $h_{s,t}(x, y)$ 本身也是变量 (s, t) 的函数.

尽管式(8)是由空移不变系统推导得到的, 但是在这个反问题解表达式仍表现出一定的空间无记忆性, 因为图象恢复参数只和该点的逆传递函数参数

有关,所以可能将其推论到空移变系统,即只需要将空移不变的逆变换参数 $H_{-1,0,0}^{(n)}(0,0)$ 替代为如下移变的逆变换参数

$$H_{-1,s,t}^{(n)}(0,0) = \left. \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^{(n)} H_{-1,0,0}(u,v) \right|_{u=0,v=0}$$

即可,并且有 $s=x, t=y$. 由此可见,对于空间移变系统的图象恢复就是

$$g(x,y) \approx \tilde{g}(x,y) = H_{-1,0,0}(0,0) \cdot f(x,y) + \frac{1}{i^1 \cdot 1!} H_{-1,0,0}^{(1)}(0,0) \cdot f^{(1)}(x,y) + \frac{1}{i^2 \cdot 2!} H_{-1,0,0}^{(2)}(0,0) \cdot f^{(2)}(x,y) + \dots + \frac{1}{i^n \cdot n!} H_{-1,0,0}^{(n)}(0,0) \cdot f^{(n)}(x,y) \quad (17)$$

当光学系统存在场曲时,则在成像平面上获得的图象始终是中心调焦清晰,边缘就变得模糊;反之,边缘清晰,中心就会变得模糊,即造成系统非均匀散焦. 对于球面透镜,随着像点到调焦中心的距离增减,因散焦降晰(即图象清晰度降低)光斑将增大. 由场曲造成的不均匀模糊的点扩散函数,是空间点到调焦中心的距离 r 的函数,且 r 是连续变量,点扩散函数的参数也是 r 的连续函数^[4]. 1976 年, Sawchuk 和 Peyrovian 提出通过坐标变换使得场曲图象产生均匀模糊,然后再通过反降晰滤波来恢复图象^[5]. 设调焦中心坐标为 $(0,0)$, 那么 $r^2 = x^2 +$

y^2 . 根据几何光学原理,由光学系统散焦造成的图象降晰,虽然其点扩散函数是一个均匀分布的圆形光斑,但是综合成像系统的诸多因素,在多数情况下,选取 Gauss 型点扩散函数来描述散焦降晰更符合实际^[1]. 对于场曲系统来说, α 是 r 的函数,记为 $\alpha(r)$, 该函数关系可根据光学镜头的几何形状和曲率及调焦参数确定,其移变的传递函数为

$$H_r(u,v) = e^{-(u^2+v^2)/4\alpha(r)} \quad (18)$$

显然, $H_r(u,v)$ 的逆函数为

$$H_{-1,r}(u,v) = e^{(u^2+v^2)/4\alpha(r)} \quad (19)$$

故很容易根据式(17)来求出场曲图象恢复的公式.

根据式(17)和式(19)恢复的场曲结果如图 7、图 8 所示. 图 7(a)是原始图象,图 7(b)是场曲降晰图象. 一般场曲扩散参数正比于空间点到调焦中心的距离的平方,从图 7(a)中可以看出,焦点是调节到图象的中心位置的. 这也是大多数光学系统的实际调焦中心位置. 图 7(c)、图 7(d)分别是用 2、4 阶多项式近似修正的图象. 由该两图可以看出,4 阶多项式近似修正优于 2 阶多项式近似修正,这和前述的空移不变系统的恢复结果是一致的. 为了比较是否可以采用空间不移变参数来修正场曲降晰,图 7(e)、图 7(f)分别是采用场曲扩散参数的中间值和最大值来进行空移不变反卷积的结果,也就是说,认为

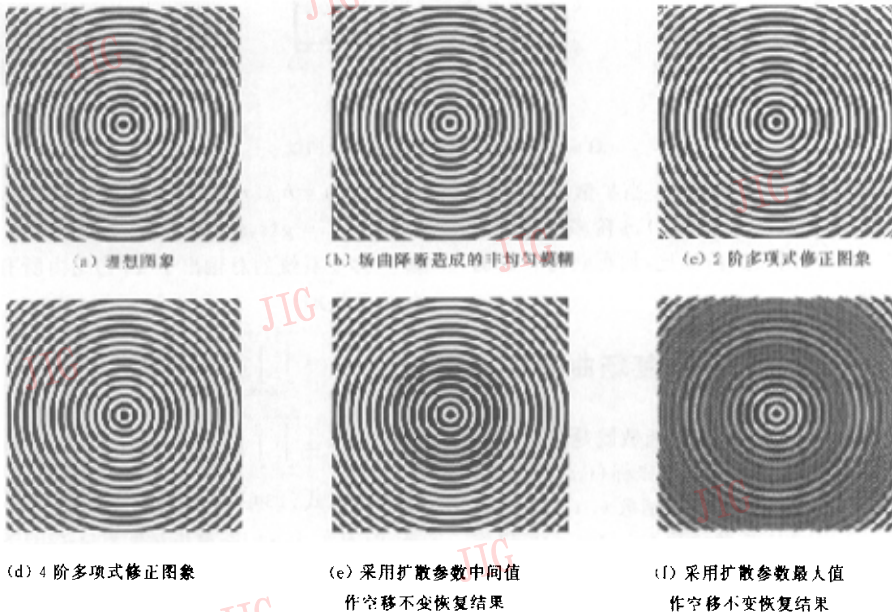


图 7 场曲图象修正仿真



(a) 原始图象

(b) 4阶多项式近似恢复图象

图8 实际场曲图象恢复

整幅图象是按照空间不变的模糊参数降晰的,由于扩散参数的中间值小于像场弯曲较大处(从图象径向的中部到边缘)的实际扩散参数,所以没有能够恢复这区间的模糊;同时因为扩散参数中间值大于图象中心部位的扩散参数,反而使这一部分图象的空间频率谱产生畸变,致使出现图象振荡。当选取最大扩散参数进行反卷积恢复时,图象的边缘虽恢复较好,但频谱畸变现象更严重。图8(b)是对由存在场曲的低档数码相机获取的图象(图8(a))进行恢复处理的结果,由图8(b)恢复结果可见,图象四周的清晰度明显提高,靠左边沿的行人,右下角的树枝、叶,经恢复后都明显可见。

4 结论

人们普遍认为图象恢复不同于图象增强,且图象恢复的方法较之增强更复杂,效果更好,而且图象恢复必须要考虑图象降质的机理,才能通过估计相应的系统模型和参数来进行图象恢复操作。另外,利用图象的导数来对图象进行锐化,一直被认为是一种有效的图象增强方法^[6]。从前述的分析中可以看出,用图象导数和图象信号组合来增强图象的清晰度,实际上是图象反卷积恢复的一种近似。由于对图象恢复必然涉及到对系统恢复参数的辩证估计,因此这种利用传递函数的逆函数的多项式近似,可推导出用图象信号的多阶导数线性组合来实现图象复原的估计,由于对参数的估计可以针对完整图象或者图象局部进行,因此可能得到更准确的参数估计。这种方法和图象反卷积运算一样,对图象噪声非常敏感,在实际运算时,可以通过分别或者同时对图象信号和图象导数信号进

行去噪来控制图象恢复噪声。

参考文献

- 1 邹谋炎. 反卷积和信号复原[M]. 北京:国防工业出版社, 2001: 184~286.
- 2 Bracewell R N. The fourier transform and its applications [M]. New York; McGraw-Hill, 1986.
- 3 潘文杰. 傅里叶分析及其应用[M]. 北京:北京大学出版社, 2000:193~198.
- 4 Geiser M. Petzval curvature versus image quality for the Cooke triplet[J]. Optical Engineering, 1990, 29(3):253~256.
- 5 Sawchuk A A, Peyrovian M J. Restoration of astigmatism and curvature of field[J]. Journal of the Optical Society of America, 1975, 65(6):712~715.
- 6 上井康弘,安藤繁. 图象处理概论[M]. 王宝兴,杨学礼译. 北京:原子能出版社, 1986:175~181.



文玉梅 1964年生,1984年获北京航空航天大学学士学位,1987年获航天部第一研究院研究生院硕士学位,1997年获重庆大学博士学位,1987年至今在重庆大学光电工程学院工作。主要研究兴趣包括智能化光电仪器、传感技术、信号及图象处理。



李平 1963年生,1984年获重庆大学学士学位,1995年获重庆大学硕士学位,1987年至今在重庆大学光电工程学院工作。主要研究兴趣包括传感技术、智能化光电仪器、图象处理。发表论文50余篇。