

# 超声逆散射图象重建问题中截断奇异值分解正则化方法研究

刘超<sup>1),2)</sup> 汪元美<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup>(浙江大学CAD&CG国家重点实验室,杭州 310027) <sup>2)</sup>(浙江大学玉泉校区生物医学工程系,杭州 310027)

**摘要** 为解决超声逆散射成像问题中的非线性,人们需要反复地求解前向散射方程和逆散射方程,以达到对全场和未知函数的精确近似,从而根据这一未知函数的精确近似,较好地重建物体内部的断层图象。前向散射方程是一个适定的方程组,可以采用通常的方法进行求解;而逆散射方程则是一个不适定性的方程组,即使数据中存在一个微小的误差,都可能引起解的较大偏离,因此,对这个不适定方程组的求解问题是整个迭代算法成功的关键。而在不适定性问题的求解过程中,正则化参数的选取又是非常重要的。求解不适定性方程的传统方法是Tikhonov正则化方法,这一方法的实质是在传统最小二乘方法上加上一个小于1的滤波因子,对于超声逆散射成像问题来说,效果并不太好。本文将截断奇异值分解正则化方法应用于逆散射方程的求解问题中,并对正则化参数的选取方法进行修正。数值仿真结果表明,这一方法配合适当的正则化参数选取,可以更好地滤除噪声,提高重建图象的质量与可信度,同时还可以减小迭代过程中的计算量。

**关键词** 计算机图象处理(520·6040) 超声 逆散射 图象重建 奇异值分解 正则化  
**中图分类号**: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2003)10-1146-07

## The Study on Truncated Singular Value Decomposition Method in Ultrasound Inverse Scattering Image Reconstruction

LIU Chao<sup>1),2)</sup>, WANG Yuan-mei<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup>(State Key laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

<sup>2)</sup>(Department of Biomedical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** To process the nonlinear property of ultrasound inverse scattering image, one should alternately solves the well-posed forward scattering equations for an estimated total field and the ill-posed inverse scattering equations for the desired object property function. Forward scattering equations can be solved by common method while inverse scattering equations is ill-posed and should be regularized. For ill-posed inverse scattering equations, very little perturbation in data will cause great change in the solution. So the iterative procedure depends strongly on the precision of the solution of ill-posed inverse scattering equations. Previous work on the ill-posed inverse scattering equations commonly used Tikhonov regularization which by adding small filter factors to original least squares problem and can't filter noise efficiently. The method for choosing regular parameter is difficulty in Tikhonov regularization because the parameter is continuous. This paper adopts the truncated singular value decomposition (TSVD) method to solve the inverse scattering equations which can filter noise better than Tikhonov regularization. Since the regularization parameter is an integer in TSVD method, it can be revised by an appropriate method. Different images with different structure are simulated by truncated singular value decomposition method equipped with a revised parameter choosing strategy. Simulation results show that this method associated with a good approach for choosing regular parameter can efficiently filter noise, and hence the quality and reliability of the reconstruction image can be improved. At the same time, this method can decrease computations at the iterative procedure.

**Keywords** Computer image processing, Ultrasound, Inverse scattering, Image reconstruction, Singular value decomposition, Regularization

基金项目:国家自然科学基金(600272030)

收稿日期:2003-01-06; 改回日期:2003-06-05

## 0 引言

当物体的内部结构已知, 求超声波穿过物体时的散射场问题, 称为前向散射问题 (Forward Scattering Problem); 而物体内部结构未知, 根据测得的穿过物体的超声散射场求解物体的内部结构问题称为逆散射问题 (Inverse Scattering Problem)<sup>[1]</sup>. 超声逆散射图象重建技术是指根据所测得的散射场数据重建物体的内部结构图象. 由于超声波无电高辐射、设备造价便宜, 因此这一技术引起了生物工程、无损检测、地球物理、模式识别、考古等领域的高度重视.

超声逆散射图象重建问题具有较强的非线性性质, 这一问题早期的解决办法是对原问题附加一些限制条件, 如假设物体内部结构简单、介质之间的声学参数相对变化较小, 对声波的散射较弱等, 从而将原问题转化为一个线性问题来解决, 这类方法有衍射层析成像技术、射线跟踪技术、根据发射器到接收器之间的渡越时间来研究介质内部的衰减特性等<sup>[2]</sup>. 由于在这些技术中附加了较强的限制条件, 因此, 使得其应用范围受到限制. 近 20 年来, 一类基于超声场精确描述的代数迭代技术迅速发展<sup>[3~8]</sup>, 由于这类方法基于超声场的精确描述、且不加任何附加的约束条件, 因此其应用范围大大扩展. 但这类迭代技术除了计算量大的缺陷外, 另一个困扰人们的主要问题是逆散射方程的不适定性问题, 即解的存在性、唯一性和稳定性的满足问题. 随着计算机技术的迅猛发展, 计算量大的问题得到了缓解; 对于解的存在性和唯一性问题, 人们通过寻找适当的数学方法也可加以解决; 而对于稳定性 (当数据有微小的变化时, 解是否较大地偏离问题的真实解) 问题, 尽管已有很多种正则化方法, 但在超声 (微波) 逆散射图象重建问题中, 大多研究者<sup>[5~8]</sup>在该问题的正则化处理过程中均采用古典的 Tikhonov 正则化技术. 当物体内部介质较复杂, 散射特性较强时, 逆散射方程的不适定性非常严重, 此时采用 Tikhonov 正则化方法的成像效果不十分好. 为此将截断奇异值分解 (Truncated Singular Value Decomposition TSVD) 正则化方法应用于超声逆散射图象重建问题中, 并对求解过程中的正则化参数的选取问题进行修正, 通过对大量不同结构图象的数值仿真, 对解的收敛性及其与真实解的逼近程度进行了探究.

## 1 超声逆散射成像问题的基本原理和公式

当用超声波从某一方向作用于物体的被成像截面时, 超声波与物体内部介质相互作用产生的场可以用非齐次亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程表示<sup>[2]</sup>, 其解可用 Lippmann-Schwinger 积分方程表示. 采用离散化方法——矩量法<sup>[3,4]</sup>, 可将超声场与描述物体内部介质声学特性参数的函数的相互关系式转化为代数方程组的形式:

$$U^{(1)}(r_n) = U^{(m)}(r_n) + G^d [O(r_n)] U^{(1)}(r_n) \quad (1)$$

$$U^{(s)}(r_m) = G^s [U^{(1)}(r_n)] O(r_n) \quad (2)$$

其中,  $r_n, n=1, 2, \dots, N$ , 表示被成像物体某一截面上离散化的点, 即要成像截面被离散化的像素;  $U^{(1)}(r_n)$  表示物体内部的  $N \times 1$  维全场矢量;  $U^{(m)}(r_n)$  表示  $N \times 1$  维入射场矢量;  $U^{(s)}(r_m)$  表示在围绕物体的圆周上  $M$  个接收器接收到的  $M \times 1$  维散射场矢量,  $m=1, 2, \dots, M$ ;  $O(r_n)$  为描述物体在各个离散化点 (像素) 上的声学特性函数, 即要求解的未知函数;  $[O(r_n)]$  和  $[U^{(1)}(r_n)]$  表示以  $O(r_n)$  和  $U^{(1)}(r_n)$  为对角元素的  $N \times N$  对角矩阵;  $G^d$  和  $G^s$  为  $N \times N$  和  $M \times N$  维系数矩阵; 其中  $G^d$  的元素为零阶第 1 类汉克尔函数在离散化小区域上的积分, 可表示为<sup>[3]</sup>

$$g_{pq}^d = \frac{jk_0^2}{4} \iint_{cell} H_0^{(1)}(k_0 \rho) dx dy = \begin{cases} \frac{j}{2} [\pi k_0 a H_1^{(2)}(k_0 a) - 2j] & \text{if } p = q \\ \frac{j}{2} \pi k_0 a J_1(k_0 a) H_0^{(2)}(k_0 \rho_{pq}) & \text{if } p \neq q \end{cases}$$

$p=(x, y), q=(x', y')$  表示成像截面离散化后的中心点,  $p$  是观测点,  $q$  表示散射源点;  $\rho_{pq} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$  表示  $p, q$  两点之间的距离;  $cell$  表示离散小区域内接圆的区域,  $a$  表示离散小区域内接圆的半径;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $k_0$  表示背景介质中的波数;  $J_1(\cdot), H_0^{(1)}(\cdot), H_0^{(2)}(\cdot), H_1^{(2)}(\cdot)$  为贝塞尔函数和汉克尔函数的标准记号.  $G^s$  的计算同  $G^d$  的计算, 只是  $p$  点表示成像区域内的点,  $q$  点表示成像区域外接收器上的点, 因此, 不存在  $p=q$  的情况. 应注意, 方程 (2) 表示声波从某一个方向上入射时的方程, 当声波从  $\Phi$  个不同的方向上照射物体时, 得到的方程的总个数为  $\Phi \times M$  个, 选择  $\Phi$  和  $M$  使其满足  $\Phi \times M > N$ , 从而形成一个超定方程组. 由从各个方向测得的散射场  $U^{(s)}(r_m)$  和入射场  $U^{(m)}(r_n)$  的数

据,用这个超定方程组求解描述物体内部声学特性参数的函数  $O(r_n)$ , 方程(1)常称为前向散射方程(Forward Scattering Equation), 方程(2)为逆散射方程(Inverse Scattering Equation)<sup>[1]</sup>.

还应注意在方程(2)中物体内部的全场也是未知的,且由方程(1)知,它也是未知函数  $O(r_n)$  的函数,因此使得求解未知函数  $O(r_n)$  的问题具有较强的非线性. 目前对这一非线性问题的求解方法可分为两类,一类是利用上述两个方程之间的反复迭代来求解,如 Born 迭代法<sup>[5]</sup>(Born Iteration 简称 BI)、变形 Born 迭代法<sup>[6]</sup>(Distorted Born Iteration 简称 DBI)等;另一类是将方程(1)表示的全场代入方程(2),然后采用非线性最优化的方法求解,如 Levenberg-Marquardt 算法<sup>[7]</sup>(简称 LM)、Newton-Kantorovich (简称 NK)算法<sup>[8]</sup>等. 但这两类方法的基本思想是一致的,故在此仅简单介绍第 1 类方法.

Born 迭代方法的主要步骤<sup>[5]</sup>

(1) 首先根据 Born 假设,即全场等于入射场  $U^{(0)}(r_n) = U^{(inc)}(r_n)$ ,由方程(2)求得未知函数的初始解  $O_0(r_n)$ ,常称其为 Born 逆解;

(2) 然后将  $O_k(r_n)$  代入方程(1)求更接近实际的全场;

③ 将第 2 步求得的全场,代入方程(2),计算散射场,并求计算散射场与测量散射场的差,记为  $\Delta U_k^{(s)}$ ;

(4) 根据散射场的改变量  $\Delta U_k^{(s)}$ ,由方程  $\Delta U_k^{(s)}(r_n) = G^*[U^{(0)}(r_n)]\Delta O_k(r_n)$  求未知函数的改变量  $\Delta O_k(r_n)$ ,然后赋  $O_{k+1}(r_n) = O_k(r_n) + \Delta O_k(r_n)$  作为未知函数的新值;

(5) 由新的未知函数值  $O_{k+1}(r_n)$ ,返回步骤 2,进一步求更近似的全场,如此反复迭代,直至  $\Delta U_k^{(s)}$  达到精度要求或  $O_{k+1}(r_n)$  稳定.

变形 Born 迭代方法是 Born 迭代方法的改进,它与 Born 迭代方法的主要区别是:在每次迭代的第 4 步中,根据未知函数的最新值修正系数矩阵  $G^*$ ,使得逆散射方程更加逼近实际模型,加快迭代的收敛速度,但正如这一算法的提出者 Chew 和 Wang 指出的那样<sup>[5]</sup>,由于在每次迭代过程中修正系数矩阵  $G^*$ ,使得算法的稳定性较差;而 BI 方法尽管收敛速度较慢,但其稳定性较好;大量超声逆散射模型的数值仿真结果也证实了这一结论,尤其是对于噪声较严重的模型,BI 方法在对真实解的逼近程度上要优于 DBI 方法,而这一点对于逆散射问题是非常重要的

的,因此在下面的仿真试验中均采用了 BI 方法

无论是采用上述直接迭代的第 1 类方法,还是采用求解非线性问题的最优化方法,在其求解过程中,均将遇到如上述第 4 步中不适定性逆散射方程的求解问题,而对不适定性问题的正则化技术的选择是否得当,将直接影响迭代算法的稳定性,也就直接决定所求的解与真实解的逼近程度,所以,对方程不适定性问题的研究——正则化技术是目前超声(微波)逆散射图象重建问题的关键所在.

## 2 截断奇异值分解正则化技术

由上一节知,超声逆散射图象重建问题中的关键是对方程

$$\Delta U_k^{(s)}(r_n) = G^*[U^{(0)}(r_n)]\Delta O_k(r_n) \quad (3)$$

的不适定性问题的正则化. 为简化记号,记  $G^*[U^{(0)}(r_n)] = A, \Delta O_k(r_n) = x, \Delta U_k^{(s)}(r_n) = b$ ,使得方程(3)简化为习惯的形式  $Ax = b$ . 这里需要注意的是方程(2)表示的是超声波从某一方向入射时所形成的方程组,在实际问题的求解过程中,为了获得足够的物体内部的散射信息,必须从  $\Phi$  个不同的方向照射物体,且使  $\Phi \times M > N$ ,将从不同方向照射物体时所得的方程组合在一起,则形成一个超定方程组,也即方程(3)是一个具有  $N$  个未知数、 $\Phi \times M$  个方程的线性方程组. 为简化记号,记  $\Phi \times M$  为  $m$ ,记  $N$  为  $n$ ,此时则有  $A \in R^{m \times n}, m > n$ . 对于形如  $Ax = b$  的超定方程组,由于其不适定性,用通常的线性代数手段是无法求解的,需借助于最小二乘方法

$$\min_x \|Ax - b\| \quad (4)$$

若矩阵  $A$  的奇异值分解为

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T \quad (5)$$

其中,  $\sigma_i$  为奇异值,且  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$  以递减顺序排列,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ;  $v_i$  为右奇异向量,且有  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n), V^T V = I_n$ ;  $u_i$  为左奇异向量,  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n), U^T U = I_m$ ,则原问题式(4)的最小二乘解可表示为

$$x_{ls} := \sum_{i=1}^n \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} v_i \quad (6)$$

方程组的不适定性蕴含着系数矩阵  $A$  的奇异值逐渐接近于零,也即随着下标  $i$  的增加,矩阵  $A$  的奇异值  $\sigma_i$  非常小,此时若在其对应的高频分量中存在噪声,从上式可以看出,则噪声将被放大,从而使

得数据中的微小噪声,引起所求得解远远偏离原问题的真解。

当数据中存在噪声时,为使式(4)的解不过分地偏离真实解,Tikhonov 等人提出对其进行正则化处理<sup>[12]</sup>,其主要思想是对原问题加入解的先验信息,在保证数据拟合的前提下,使得解的某种范数最小,即求下述最小化问题:

$$\min \{ \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|L(x - x^*)\|_2^2 \} \quad (7)$$

其中,  $\lambda > 0$  为正则化参数;  $L$  为正则化矩阵;  $x^*$  为对初始解的估计; 当  $L$  为单位阵, 初始值  $x^* = 0$  时, 称为 Tikhonov 正则化的标准形式. 通过适当的处理, Tikhonov 正则化的标准形式可转化为

$$(A^T A + \lambda^2 I_n) x_{\text{tik}}^{(\lambda)} = A^T b \quad (8)$$

则式(8)的解可表示为

$$\begin{aligned} x_{\text{tik}}^{(\lambda)} &= V \Sigma^{-1} (I_n + \lambda^2 \Sigma^{-2})^{-1} U^T b \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \right) \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} v_i \end{aligned} \quad (9)$$

通常情况下,正则化参数的选取一般满足<sup>[10]</sup>  $\sigma_n \leq \lambda \leq \sigma_1$ , 由此,则必定存在一个正整数  $k$  使得:  $\sigma_{k+1} \leq \lambda \leq \sigma_k$ , 从式(9)可以看出,当  $i > k$  时, Tikhonov 正则化实质上是对高频分量加入了一个滤波因子  $f_i = \sigma_i^2 / (\sigma_i^2 + \lambda^2) < 1$ , 从而阻尼或滤除高频分量中的噪声,使求得的解稳定。

观察式(8)可以发现,在 Tikhonov 正则化方法中,它不是直接从矩阵  $A$  的病态性入手去改造  $A$ , 而是对原方程  $Ax = b$  的法方程  $A^T A = A^T b$  改造,即引入一个良态、满秩的矩阵  $A^T A + \lambda^2 I_n$ , 将原问题转化为一个良态方程组的求解问题. 而截断奇异值分解方法则是直接改造系数矩阵  $A$ , 将原方程(而不是法方程)转化为一个良态问题而求解,其主要思想是寻找一个良态的矩阵  $A_k$ , 使其在 2-范数下较好地近似矩阵  $A$ . 具体地,对于  $k < \text{rank}(A)$ , 若取

$$A_k = \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^T \quad (10)$$

则有<sup>[11]</sup>

$$\min_{\text{rank}(B) \leq k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 \quad (11)$$

由此知,其中,  $\text{rank}(A)$  表示矩阵  $A$  的秩, 矩阵  $A_k$  是秩为  $k$  的矩阵中最接近原矩阵  $A$  的, 因此将原问题  $Ax = b$  转化为适定方程  $A_k x = b$  的求解问题. 由式(6)及式(10)知, 方程  $A_k x = b$  的解为

$$x_{\text{TSVD}} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} v_i \quad (12)$$

事实上, 上式相当于对式(6)中较小的奇异值直接截去, 这就是称该方法为截断奇异值分解的原因。

由上述简单分析可以看出:

(1) 通过比较 Tikhonov 正则化解(9)与 TSVD 正则化解(12), 可以看出, Tikhonov 正则化主要是通过乘一个滤波因子来阻尼高频分量中的噪声. 而 TSVD 方法则是直接将高频分量直接去除, 由于造成不适定问题解的不稳定性的主要原因是高频分量中的噪声, 从而 TSVD 正则化方法比 Tikhonov 正则化更好地去除了高频分量中的噪声, 当噪声越严重时, TSVD 正则化方法将越有效. 而在超声逆散射问题中, 由于物体内部介质是未知的, 形成的方程组(3)的不适定性通常较强。

(2) 当方程组的不适定性较强时, 系数矩阵  $A$  的频谱特性较复杂, 而其法方程的系数矩阵  $A^T A$  谱特性将更加复杂, 所造成的计算量也随之增加; 而截断奇异值分解直接作用于原方程的系数矩阵, 无需过多的增加计算量;

(3) 处理不适定问题的另一个难点在于正则化参数的选取问题, 在 TSVD 正则化方法中, 相当于截断参数  $k$  的选择问题. 目前关于正则化参数的选择方法有几种, 如基于离差原理 (Discrepancy Principle) 的方法、广义交叉验证方法 (Generalized Cross-Validation, GCV)、准最优化 (Quasi-Optimal) 方法和 L 曲线 (L-Curve) 法<sup>[9]</sup> 等, 但具体用哪一种方法选择参数, 需要根据具体的模型来尝试. 对于上述超声逆散射模型, 对不同结构的图象采用上述 4 种方法选择正则化参数发现, L 曲线方法比较接近实际情况. 由于在 BI 方法中不适定模型存在于迭代过程中, 正则化参数的选择显得更加重要, 一次参数的选择不当可能使得整个迭代发散或收敛于不正确的解. 而采用 TSVD 正则化方法所需选择的参数是一个正整数, 因此在求解过程中可以方便地调整, 而在 Tikhonov 正则化中, 正则化参数是一个非常小的实数 ( $\sigma_n \leq \lambda \leq \sigma_1$ ), 若想对其进行调整是很难的。

在仿真实验中, 对正则化参数的选择修正如下: 首先采用 L 曲线法选取一个适当的参数  $k'$ , 这一参数可能不是最优的, 然后根据正则化的主要思想<sup>[10]</sup>, 即在确保数据拟合的前提下, 使得解的范数最小这一原则, 在 L 曲线所求得的参数  $k'$  附近进行一维搜索, 求出使残差的范数  $\|A x_k - b\|_2$  和解的范数  $\|x_k\|_2$  之和达到最小的参数  $k$ , 将其作为正则化的截断参数. 在大量的仿真试验中表明采用这一方法,

解的收敛效果均要优于其他的直接参数选取方法。

通过上述理论分析,可以发现 TSVD 方法无论是在对不适定问题的正则化上,还是在计算量上均要优于 Tikhonov 正则化方法,因此可以大大改善 BI 方法在超声逆散射问题中的收敛特性和收敛速度,提高成像的可信程度。

### 3 数值仿真

用 Born 迭代方法,逆散射方程的正则化采用 TSVD 方法,对不同的模型进行仿真,并将仿真的结果与 Tikhonov 正则化方法进行比较。

在仿真试验中,假设成像物体被无限空间中的水所包围(其目的是为了防止从发射器到物体之间声波的散射)。发射器(同时也是接收器)等间隔地放在围绕物体的圆周上(如图 1 所示),发射波的频率为 200kHz,则声波在水中的波速约为  $C_0=1500\text{m/s}$ ,波长约为  $\lambda=7.5\text{mm}$ ;发射器个数  $\Phi$  以及接收器的个数  $M$  的多少取决于物体的大小和所需成像的分辨率,但需满足  $\Phi \times M > N$ 。

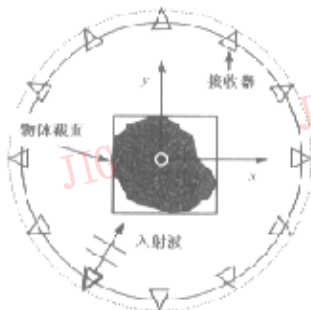


图1 实验结构图

为对不同的算法进行比较,首先定义

相对误差(Relative Error)

$RE = \frac{\|x_{reg} - x_{ext}\|_2}{\|x_{ext}\|_2}$ , 其中  $x_{reg}$  表示正则化解,  $x_{ext}$  表示精确解。RE 表示正则化解对真实解的逼近程度。

相对残差(Relative Residual Error)

$RRE = \frac{\|Ax_{reg} - b\|_2}{\|b\|_2}$  表示正则化解对测量数据的拟合程度。

由于相对误差中的  $x_{ext}$  事先是无法得知的,迭代的终止法则一般取相对残差稳定或不再下降时。在实际问题中,只能根据相对残差判断问题解的精确程度。在此之所以引入相对误差,是为了判断算法是

否收敛于真实解以及收敛于真实解的精度。

**仿真 1** 对如图 2(a)所示的 Sheep-logan 模型,共由 8 个椭圆组成,物体内部结构较复杂,则其散射特性也较为复杂,假设描述物体内部声学特性的未知函数  $O(r)$  在  $-0.1 \sim +0.1$  之间变化,则对应的声速变化范围是:  $1430 < C < 1580$ , 满足声波在生物软组织内的特性。



(a)Sheep-Logan 原始图 (b) TSVD (c) Tikhonov

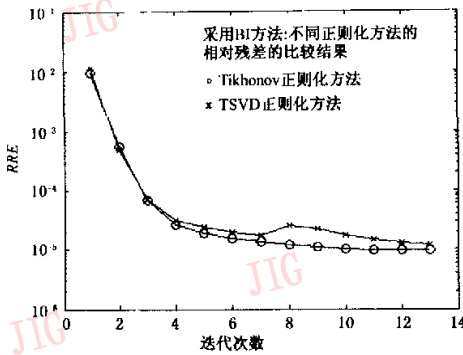
图2 对图(a)采用 TSVD 与 Tikhonov 正则化迭代 13 次的结果

对物体周围的外接矩形区域进行均匀采样(见图 1),采样间隔为  $\lambda/10=0.75\text{mm}$ ,采样点的个数为  $32 \times 32$ 。发射器(同时也是接收器)距物体中心的距离为  $100\lambda=750\text{mm}$ ,发射器(接收器)的个数为 40。则形成的代数方程组(3)具有  $40 \times 40=1600$  个方程,  $32 \times 32=1024$  个未知数。采用 BI 方法,迭代第一次即求 Born 逆解时,散射方程(3)的系数矩阵的最大奇异值为  $\sigma_1=1.4215$ ,最小奇异值为  $\sigma_{1024}=3.0261 \times 10^{-17}$ ,则方程的条件数为:  $Con(A) = \sigma_1 / \sigma_{1024} = 4.6975 \times 10^{16}$ ,因此方程具有较强的不稳定性。

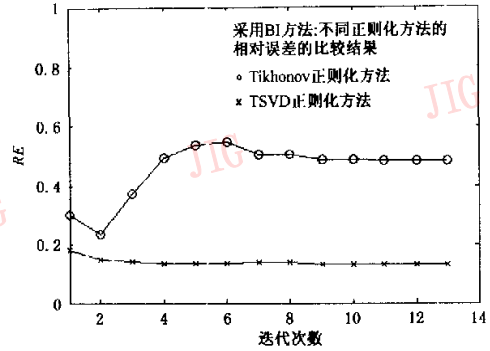
迭代解的相对残差(RRE)和相对误差(RE)如图 3。从图中可以看出,迭代 10 次以后,相对残差和相对误差均不再有很大的变化,因此在第 13 迭代终止。从这两个数据分析图还可以看出,TSVD 正则化方法与 Tikhonov 正则化方法在数据的拟合程度(RRE)相差不多,但在对真实解的逼近程度(RE)却优于 Tikhonov 正则化方法,仿真结果图分别如图 2(b)、图 2(c)所示。

**仿真 2** 采用一个同样尺寸但结构相对简单的图象,如图 4 所示。对这个结构相对简单的图,假设描述物体内部声学特性参数的未知函数  $O(r)$  在  $-0.2 \sim +0.2$  之间变化,即物体内部不同介质之间的声学特性参数的差别比上例大了一倍,声波从一种介质到另一种介质之间的散射特性要比仿真 1 大很多,因此构成模型的不稳定性也就强。

同样对物体的采样间隔取  $\lambda/10=0.75\text{mm}$ ,采样点的个数为  $32 \times 32$ ,发射器的布局如图 1 所示,

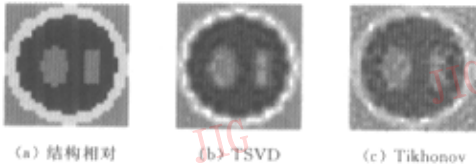


(a) 图 2(a) 图像仿真的相对残差比较



(b) 对图 2(a) 图像仿真的相对误差比较

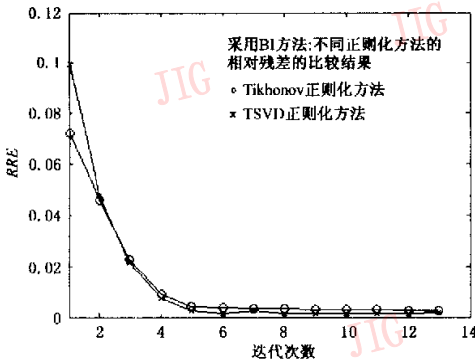
图 3 对图 2(a) 图像仿真的相对残差与相对误差的比较



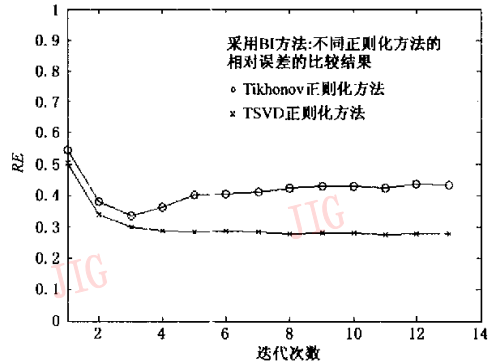
简单的图像

图 4 对图(a)采用 TSVD 和 Tikhonov 正则化迭代 13 次的结果

$32 \times 32 = 1024$  个未知数。迭代第 1 次即求 Born 但为区别起见, 取发射器(接收器)的个数为 36, 则形



(a) 对图 4(a) 图像仿真的相对残差比较



(b) 对图 4(a) 图像仿真的相对误差比较

图 5 对图 4(a) 图像仿真的相对残差与相对误差的比较

**仿真 3** 图像同仿真 2, 但改变了描述物体内部声学特性参数的未知函数  $O(r)$  的变化范围, 使其在  $-0.1 \sim +0.1$  之间变化, 此时, 不仅物体内部结构简单, 而且未知函数  $O(r)$  的变化较小, 即散射较弱。在这种情况下, 第 1 次迭代求 Born 逆解时, 逆散射方程的系数矩阵的最大奇异值为  $\sigma_1 = 1.1926$ , 最小奇异值为  $\sigma_{1024} = 1.7386 \times 10^{-9}$ , 方程的条件数为  $Con(A) = \sigma_1 /$

成的代数方程组(3)具有  $36 \times 36 = 1296$  个方程, 逆解时, 逆散射方程的系数矩阵的最大奇异值为  $\sigma_1 = 1.2796$ , 最小奇异值为  $\sigma_{1024} = 1.5236 \times 10^{-20}$ , 方程的条件数为  $Con(A) = \sigma_1 / \sigma_{1024} = 8.3986 \times 10^{19}$ , 方程的不适定性程度比上一例还强。

迭代的相对残差和相对误差如图 5 所示, 从这两个数据分析图可以看出, TSVD 正则化方法无论在数据的拟合程度上还是在真实解的逼近程度上均优于 Tikhonov 正则化方法, 最后的仿真结果图像分别见图 4(b)和(c)。

$\sigma_{1024} = 6.8596 \times 10^8$ , 此时方程的不适定性相对于前两个例子来说较弱, 对该问题采用 Tikhonov 和 TSVD 正则化方法的数据结果, 除精度、成像质量提高外, RRE 和 RE 的结果与仿真 1 非常相似。

同样对其他具有不同结构和不同介质分布的图像也进行了大量的仿真试验, 实验结果均显示, 当超声逆散射模型受各种噪声的影响不适定性时, 采用

TSVD 正则化方法的相对误差( $RE$ )趋于零的速度要比采用 Tikhonov 正则化方法快,这说明 TSVD 正则化方法所求得解逼近真实解的程度要优于 Tikhonov 正则化方法,从而重建图象的可信程度要高于 Tikhonov 正则化方法.从数值仿真的相对残差( $RRE$ )数据来看,两者相差不大;在实际问题中,相对误差  $RE$  通常是未知的,只能根据相对残差来判定问题是否达到精度,通过上述仿真结果可以看出,在相对残差达到相当的精度时,相对误差可能还相去甚远.综上所述,正则化方法的选择是否适当,直接影响着解的精度,影响着重建图象是否真正反映了物体的内部结构图.

#### 4 结论

本文给出了超声逆散射图象重建问题中不适定问题的一个较好的解决方法——截断奇异值分解正则化方法,并给出了正则化参数选取的一种修正方法.通过相对残差( $RRE$ )的比较可以看出,截断奇异值分解正则化技术与传统的 Tikhonov 正则化技术相比,在收敛效果上相差无几;但从相对误差( $RE$ )的结果比较来看,TSVD 方法要优于 Tikhonov 正则化方法,这说明 TSVD 方法不仅解决了问题的稳定性,而且还具有更好的噪声滤除效果,使得 Born 迭代方法较好地逼近问题的真实解,也使得重建的图象能够较好地反映物体内部结构的真实情况,提高了成像的可信度.事实上,在超声逆散射成像问题中,由于超声波与物体内部介质之间相互作用的复杂性,即使是选择较好的实验环境,实验噪声的影响也在所难免.同时由于物体内部的结构及其复杂程度是无法事先判断的,在实验过程中,如果超声入射波的频率、发射器和接收器距物体的距离、位置等选择的不够适当,则会造成超声逆散射成像问题的模型具有较强的不稳定性,因此,在超声逆散射成像问题中,如何选取适当的算法使得所求的解稳定,同时又能合理地滤除噪声,是提高重建图象的质量与可信程度的关键,TSVD 正则化方法在些方面无疑具有较好的特点.其缺点在于 TSVD 方法要用到系数矩阵的奇异值分解,因此在每次迭代中所需的计算量、存储量均较大,无法满足时实的要求,目前人们正在研究不直接求奇异值和奇异向量(如 Lanczos 双对角化)的方法<sup>[9]</sup>,以加快算法的速度、减小对计算机存储量的需求,关于这方面的工作,仍有待于进一步的研究.

#### 参考文献

- 1 Broup D T, Johnson S A, Kim W W. Nonperturbative diffraction tomography via gauss-newton iteration applied to the scattering integral equation [J]. *Ultrasonic Imaging*, 1992, 14(5):69~85.
- 2 Avinash C Kak, Malcolm Slaney. Principles of computerized tomographic imaging[M]. New York: IEEE Press, 1999.
- 3 Steven A Johnson, Michael L Tracy. Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method-part 1: Theory[J]. *Ultrasonic Imaging*, 1983,5(4):361~375.
- 4 Michael L Tracy, Steven A Johnson. Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method part 1: Numerical Evaluations[J]. *Ultrasonic Imaging*, 1983,5(4):376~392.
- 5 Wang Y M, Chew W C. An iterative solution of two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem [J]. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 1989, 1(1):100~108.
- 6 Chew W C, Wang Y M. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted born iterative method [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1990,9(2):218~225.
- 7 Ann Franchois, Christian Pichot. Microwave Imaging—Complex Permittivity Reconstruction with a Levenberg-Marquardt Method[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1997,45(2):203~215.
- 8 Nadine Joachimowicz, Jordi J Mallorqui, Jean-Chharles Bolomey *et al.* Convergence and stability assessment of new-kantorovich reconstruction algorithms for microwave tomography[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1997,17(4):562~570.
- 9 Hansen P C. Regularization tools: A matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems [J]. *Numerical Algorithms*, 1994,6(1-1):1~35.
- 10 Per Christian Hansen. Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank[J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1990,11(3):503~518.
- 11 Gene H Golub, Charles F Van Loan. Matrix computations[M]. Baltimore, Maryland, U. S. A: The Johns Hopkins University Press, 1983.
- 12 Andrey N Tikhonov, Vasily Y Arsenin. Solutions of ill-posed problems [M]. Washington D. C: V. H. Winston & Sons, 1977.



刘 超 1964年生,浙江大学生物医学工程系博士研究生.主要研究领域有数字图象处理、超声逆散射图象重建和逆问题正则化方法等.



汪元美 1945年生,浙江大学生物医学工程系,博士,教授,博士生导师,国家自然科学基金委员会信息科学部电子学科评审专家组成员.主要研究方向为医学图象处理、神经网络和向量场优化理论等.