

两相邻张量积 Bézier 曲面的近似合并

郭清伟^{1),2)} 朱功勤¹⁾

¹⁾(中国科学技术大学数学系,合肥 230026) ²⁾(合肥工业大学理学院,合肥 230009)

摘要 Bézier 曲面是 CAD/CAM 系统中的最常用的造型工具之一,因此在造型系统的发展过程中,对两相邻 Bézier 曲面近似合并算法进行研究是非常重要的。两相邻 Bézier 曲面的近似合并就是:在一定的误差允许范围内,用一片 $k \times l (k \geq m, l \geq n)$ 次的 Bézier 曲面去逼近相邻的两片 $m \times n$ 次 Bézier 曲面。但随着国际互联网越来越发展和跨国企业的大量建立,在产品设计中信息的交换越来越重要,且已能够实现。当前,产品模型数据的交换比以前更加频繁,但由于数据量特别巨大,因此如果在数据交换之前采用近似合并算法,则可减少几何数据。为了能较佳地进行 Bézier 曲面近似合并,因此利用张量积 Bézier 曲面细分后的矩阵表示,并根据所定义的原 Bézier 曲面与合并 Bézier 曲面间的距离函数取最小值,给出了张量积 Bézier 曲面近似合并的一种方法,以便得到合并 Bézier 曲面控制顶点的显示表示式。该方法在合并过程中,由于考虑了原 Bézier 曲面与合并 Bézier 曲面在边界达到高阶连续的情形,因此利用该方法可直接完成两相邻 Bézier 曲面的近似合并。

关键词 张量积 Bézier 曲面 合并 矩阵表示 细分

中图法分类号: TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)05-0598-06

Approximate Merging of a Pair Tensor Product Bézier Surfaces

GUO Qing-wei^{1),2)}, ZHU Gong-qin¹⁾

¹⁾(School of Science, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

²⁾(Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract Bézier surface is one of the most commonly used modeling tools in CAD/CAM systems. During the development of a system, the research of approximate merging algorithms for a pair of adjacent Bézier surfaces is of great importance. Approximate merging of two adjacent Bézier surfaces is that two adjacent Bézier surfaces of degree $m \times n$ is approximated by one of degree $k \times l (k \geq m, l \geq n)$ within the admissible error bound. As exchanging information becomes more and more important in product design, the international network is more and more developed, and more and more enterprises have been vastly established, the exchanging of product model data is becoming far more frequent than ever. Before the exchanging of product model data, if approximate merging algorithms are used, then geometric data can be reduced. In this paper, an approximate merging method for tensor product Bézier surfaces is presented by using the matrix representation of subdivided Bézier surface and by minimizing the distance function defined between the original Bézier surfaces and the merged Bézier surface. The explicit representation for control points of the merged surface is obtained. Higher order of continuity along the boundaries of surfaces is considered in the merging process. The approximate merging for a pair of adjacent Bézier surfaces can be directly carried out by using the method of this paper.

Keywords tensor product Bézier surface, merging, matrix representation, subdivision

1 引言

CAD/CAM 系统的数据通讯中,为了在一定的误差范围内尽量减少数据传输量,必须对数据进行

压缩, Hoschek 提出近似转化的概念^[1]。这种近似转化分为降阶逼近和近似合并两种。近年来,关于近似转化的研究主要集中在 Bézier 曲线曲面, B-样条曲线, 区间 Bézier 曲线曲面的降阶方面^[2~9], 而关于曲线曲面的近似合并, 人们所做的工作还很少, 仅胡事

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10171026)

收稿日期:2003-06-30; 改回日期:2003-12-19

民根据两相邻 n 次 Bézier 曲线能够精确合并成一条 n 次 Bézier 曲线的条件,利用 Bézier 曲线控制顶点扰动法和约束最小二乘方法,讨论了两相邻次 Bézier 曲线的合并问题^[10],但关于两相邻张量积 Bézier 曲面的合并问题,至今还没有见到有关文献。由于该问题有非常重要的理论和应用价值,因此,本文对两相邻张量积 Bézier 曲面近似合并进行了初步研究。

定义 设有两相邻 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面

$$P_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \text{ 和 } Q_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n q_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

其中 $p_{m,j} = q_{0,j} (j=0,1,\dots,n)$, 所谓两相邻 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面 $P_{m,n}(u,v)$ 和 $Q_{m,n}(u,v)$ 的合并系指寻求一 $m \times n$ 次的张量积 Bézier 曲面 $R_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n r_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$,

使 $R_{m,n}(u,v)$ 与曲面 $\hat{R}_{m,n}(u,v)$ 之间的一个适当的距离函数 $d(R_{m,n}(u,v), \hat{R}_{m,n}(u,v))$ 在单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 上取最小值。

这里

$$\hat{R}_{m,n}(u,v) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_i^m\left(\frac{u}{\lambda}\right) B_j^n(v) & 0 \leq u \leq \lambda, 0 \leq v \leq 1 \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n q_{i,j} B_i^m\left(\frac{u-\lambda}{1-\lambda}\right) B_j^n(v) & \lambda \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

其中, λ 是一个细分参数,后文将用两相邻曲面的面积来确定它。 $B_i^m(u) = C_m^i u^i (1-u)^{m-i} (i=0,1,\dots,m)$ 和 $B_j^n(v) = C_n^j v^j (1-v)^{n-j} (j=0,1,\dots,n)$ 分别为 m 和 n 次 Bernstein 基函数。

本文首先将两相邻 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面 $P_{m,n}(u,v)$ 和 $Q_{m,n}(u,v)$ 的合并曲面 $R_{m,n}(u,v)$ 与曲面 $\hat{R}_{m,n}(u,v)$ 之间的一适当距离函数 $d(R_{m,n}(u,v), \hat{R}_{m,n}(u,v))$ 在单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 上取最小值,然后利用 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面细分后的矩阵表示来给出一种将两相邻 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面合并成一片 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面的方法,以得到合并曲面控制顶点的显示表达式。该方法同时考虑了合并曲面与原曲面在相应边界上有相同的高阶偏导数的情形,且不仅给出了合并误差界,并指出升阶可减小合并误差。

在推导合并曲面控制顶点的表达式时,需用到

下面的引理:

引理 设 $R_{m,n}(u,v)$ 是以 $\{r_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 为控制顶点的 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面, λ 是开区间 $(0,1)$ 中任一固定常数,将沿曲面 $R_{m,n}(u,v)$ 上的 v -向曲线 $R_{m,n}(\lambda,v)$ 把曲面 $R_{m,n}(u,v)$ 分成的两片 $m \times n$ 次的张量积 Bézier 子曲面片,分别记为 $R_{m,n}^{(1)}(u,v)$ (相应于曲面 $R_{m,n}(u,v)$ 的参数 $0 \leq u \leq \lambda, 0 \leq v \leq 1$ 部分) 和 $R_{m,n}^{(2)}(u,v)$ (相应于曲面 $R_{m,n}(u,v)$ 的参数 $\lambda \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ 部分); 又设 $R_{m,n}^{(1)}(u,v)$ 和 $R_{m,n}^{(2)}(u,v)$ 的控制顶点分别为 $\{r_{i,j}^{(1)}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 和 $\{r_{i,j}^{(2)}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$, 则

$$R^{(1)} = D_1(\lambda)R \tag{1}$$

$$R^{(2)} = D_2(\lambda)R \tag{2}$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} & \dots & r_{0,n} \\ r_{1,0} & r_{1,1} & \dots & r_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,0} & r_{m,1} & \dots & r_{m,n} \end{bmatrix},$$

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} r_{0,0}^{(1)} & r_{0,1}^{(1)} & \dots & r_{0,n}^{(1)} \\ r_{1,0}^{(1)} & r_{1,1}^{(1)} & \dots & r_{1,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,0}^{(1)} & r_{m,1}^{(1)} & \dots & r_{m,n}^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$R^{(2)} = \begin{bmatrix} r_{0,0}^{(2)} & r_{0,1}^{(2)} & \dots & r_{0,n}^{(2)} \\ r_{1,0}^{(2)} & r_{1,1}^{(2)} & \dots & r_{1,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,0}^{(2)} & r_{m,1}^{(2)} & \dots & r_{m,n}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$D_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_0^1(\lambda) & B_1^1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_0^2(\lambda) & B_1^2(\lambda) & B_2^2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_0^{n-1}(\lambda) & B_1^{n-1}(\lambda) & B_2^{n-1}(\lambda) & \dots & B_{n-1}^{n-1}(\lambda) & 0 \\ B_0^n(\lambda) & B_1^n(\lambda) & B_2^n(\lambda) & \dots & B_{n-1}^n(\lambda) & B_n^n(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$D_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & B_0^{n-1}(\lambda) & B_1^{n-1}(\lambda) & \dots & B_{n-2}^{n-1}(\lambda) & B_{n-1}^{n-1}(\lambda) \\ 0 & 0 & B_0^{n-2}(\lambda) & \dots & B_{n-3}^{n-2}(\lambda) & B_{n-2}^{n-2}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_0^1(\lambda) & B_1^1(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2 两相邻 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面的合并

2.1 不保边界插值的合并

设两 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面

$$P_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

和 $Q_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n q_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$ 的控制顶点分别是 $\{p_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 和 $\{q_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 且 $p_{m,j} = q_{0,j} (j=0,1,\dots,n)$, 即 $P_{m,n}(u,v)$ 和 $Q_{m,n}(u,v)$ 是两相邻的 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面。下面给出求 $P_{m,n}(u,v)$ 和 $Q_{m,n}(u,v)$ 合并曲面的方法。

设 $P_{m,n}(u,v)$ 和 $Q_{m,n}(u,v)$ 的合并曲面为

$$R_{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n r_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

其中控制顶点 $\{r_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 待定。令 $\lambda = s_1 / (s_1 + s_2)$ (这里 s_1 和 s_2 分别表示曲面 $P_{m,n}(u,v)$ 和 $Q_{m,n}(u,v)$ 的面积)。如果把合并曲面 $R_{m,n}(\lambda, v)$ 沿曲线 $R_{m,n}(u, v)$ 分成的两部分分别记为 $R_{m,n}^{(1)}(u, v)$ (相应于曲面 $R_{m,n}(u, v)$ 的参数 $0 \leq u \leq \lambda, 0 \leq v \leq 1$ 部分) 和 $R_{m,n}^{(2)}(u, v)$ (相应于曲面 $R_{m,n}(u, v)$ 的参数 $\lambda \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ 部分), 则由引理可知, 曲面 $R_{m,n}(u, v)$ 、 $R_{m,n}^{(1)}(u, v)$ 、 $R_{m,n}^{(2)}(u, v)$ 的控制顶点 $\{r_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 、 $\{r_{i,j}^{(1)}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 、 $\{r_{i,j}^{(2)}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 满足式(1)和式(2)。定义合并曲面 $R_{m,n}(u, v)$ 和 $\hat{R}_{m,n}(u, v)$ 曲面之间的距离函数 $d(R_{m,n}(u, v), \hat{R}_{m,n}(u, v))$ 为

$$d(R_{m,n}(u, v), \hat{R}_{m,n}(u, v)) = \int_0^1 \int_0^1 |P_{m,n}(u, v) - R_{m,n}^{(1)}(u, v)|^2 dudv + \int_0^1 \int_0^1 |Q_{m,n}(u, v) - R_{m,n}^{(2)}(u, v)|^2 dudv$$

则由两相邻曲面合并的定义可知, 这时应有

$$\int_0^1 \int_0^1 |P_{m,n}(u, v) - R_{m,n}^{(1)}(u, v)|^2 dudv + \int_0^1 \int_0^1 |Q_{m,n}(u, v) - R_{m,n}^{(2)}(u, v)|^2 dudv = \min \quad (3)$$

可先把式(1)和式(2)代入式(3), 然后对式(3)左端关于 $r_{i,j} (i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n)$ 求偏导, 并令偏导数等于零, 则得关于 $\{r_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ 的 $(m+1) \times (n+1)$ 个线性方程, 最后把这些方程写成矩阵的形式, 可得

$$\begin{aligned} (D_1^T(\lambda)CD_1(\lambda) + D_2^T(\lambda)CD_2(\lambda))RE = \\ (D_1^T(\lambda)CP(\lambda) + D_2^T(\lambda)CQ)E \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$C = (c_{i,j}),_{i=0,1,\dots,m,j=0,1,\dots,n}$$

$$c_{i,j} = \int_0^1 B_i^m(t) B_j^n(t) dt$$

$$E = (e_{i,j}),_{i=0,1,\dots,m,j=0,1,\dots,n}$$

$$e_{i,j} = \int_0^1 B_i^m(t) B_j^n(t) dt$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,n} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m,0} & p_{m,1} & \cdots & p_{m,n} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots & q_{0,n} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m,0} & q_{m,1} & \cdots & q_{m,n} \end{bmatrix}.$$

因 $B_i^m(u) (i=0,1,\dots,m)$ 和 $B_j^n(v) (j=0,1,\dots,n)$ 分别为 m 次和 n 次 Bernstein 基函数, 故矩阵 C 与 E 分别为 $m+1$ 阶和 $n+1$ 阶的正定矩阵; 又 $\begin{bmatrix} D_1(\lambda) \\ D_2(\lambda) \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵, 故可知矩阵

$$\begin{bmatrix} D_1^T(\lambda) & D_2^T(\lambda) \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} D_1(\lambda) \\ D_2(\lambda) \end{bmatrix} = D_1^T(\lambda)CD_1(\lambda) + D_2^T(\lambda)CD_2(\lambda) \text{ 为可逆方阵。}$$

这样由式(4)即可得合并曲面 $R_{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n r_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$ 的控制顶点的矩阵表达式为

$$R = [D_1^T(\lambda)CD_1(\lambda) + D_2^T(\lambda)CD_2(\lambda)]^{-1} \times [D_1^T(\lambda)CP + D_2^T(\lambda)CQ] \quad (5)$$

2.2 保边界高阶插值的合并

在 2.1 节中所得的合并曲面一般不能保证在曲面 $P_{m,n}(u, v)$ 的 $u=0$ 的边界线和曲面 $Q_{m,n}(u, v)$ 的 $u=1$ 的边界线上插值, 更不能保证高阶插值。下面将给出求在曲面 $P_{m,n}(u, v)$ 的 $u=0$ 边界线上达到 k 阶插值和在曲面 $Q_{m,n}(u, v)$ 的 $u=1$ 边界线上达到 l 阶插值的合并曲面的方法。这里 $0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n$ 且 $k+l+1 \leq m, k, l \in N$ 。

设合并曲面为

$$R_{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n r_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

由于这时合并曲面满足一定的边界插值条件, 故必有

$$\left. \frac{\partial^i R_{m,n}^{(1)}(u, v)}{\partial u^i} \right|_{(0,v)} = \left. \frac{\partial^i P_{m,n}(u, v)}{\partial u^i} \right|_{(0,v)} \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (6)$$

和

$$\left. \frac{\partial^j R_{m,n}^{(2)}(u, v)}{\partial u^j} \right|_{(1,v)} = \left. \frac{\partial^j Q_{m,n}(u, v)}{\partial u^j} \right|_{(1,v)} \quad j = 0, 1, \dots, l \quad (7)$$

由于式(6)与式(7)对任意 $v \in [0, 1]$ 均成立, 故式(6)和式(7)与下列式(8)和式(9)等价

$$D_{1,1}(\lambda)R_1 = P_1 \quad (8)$$

$$D_{2,2}(\lambda)R_2 = Q_1 \quad (9)$$

其中, 矩阵 $D_{1,1}(\lambda)$ 是矩阵 $D_1(\lambda)$ 右上角的 $(k+1) \times (k+1)$ 阶子矩阵; 矩阵 $D_{2,2}(\lambda)$ 是矩阵 $D_2(\lambda)$ 左下角的 $(l+1) \times (l+1)$ 阶子矩阵。

$$R_1 = \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} & \cdots & r_{0,n} \\ r_{1,0} & r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k,0} & r_{k,1} & \cdots & r_{k,n} \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} r_{m-l,0} & r_{m-l,1} & \cdots & r_{m-l,n} \\ r_{m-l+1,0} & r_{m-l+1,1} & \cdots & r_{m-l+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,0} & r_{m,1} & \cdots & r_{m,n} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,n} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,0} & p_{k,1} & \cdots & p_{k,n} \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{m-l,0} & q_{m-l,1} & \cdots & q_{m-l,n} \\ q_{m-l+1,0} & q_{m-l+1,1} & \cdots & q_{m-l+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m,0} & q_{m,1} & \cdots & q_{m,n} \end{bmatrix}.$$

显然, $D_{1,1}(\lambda)$ 和 $D_{2,2}(\lambda)$ 均可逆, 由式 (8) 和式 (9) 得

$$R_1 = D_{1,1}^{-1}(\lambda)P_1 \quad (10)$$

$$R_3 = D_{2,2}^{-1}(\lambda)Q_1 \quad (11)$$

这时要确定合并曲面 $R_{m,n}(u, v)$, 只需再确定出 R_2 即可
其中

$$R_2 = \begin{bmatrix} r_{k+1,0} & r_{k+1,1} & \cdots & r_{k+1,n} \\ r_{k+2,0} & r_{k+2,1} & \cdots & r_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m-l-1,0} & r_{m-l-1,1} & \cdots & r_{m-l-1,n} \end{bmatrix}$$

为了确定 R_2 , 首先仿照 2.1 节中的推导过程, 然后利用分块矩阵的运算法则, 即可得 R_2 满足的矩阵方程为

$$[J_{1,2}^T C J_{1,2} + J_{2,2}^T C J_{2,2}]R_2 E = J_{1,2}^T [P - J_{1,1}R_1 - J_{1,3}R_3]E + J_{2,2}^T [Q - J_{2,1}R_1 - J_{2,3}R_3]E \quad (12)$$

其中

$$J_{1,1} = D_1(\lambda)[1, 2, \dots, k+1],$$

$$J_{1,2} = D_1(\lambda)[k+2, \dots, n-l],$$

$$J_{1,3} = D_1(\lambda)[n-l+1, \dots, n+1],$$

$$J_{2,1} = D_2(\lambda)[1, 2, \dots, k+1],$$

$$J_{2,2} = D_2(\lambda)[k+2, \dots, n-l],$$

$$J_{2,3} = D_2(\lambda)[n-l+1, \dots, n+1]$$

符号 $D_1(\lambda)[1, 2]$ 表示 $D_1(\lambda)$ 由 $D_1(\lambda)$ 的第 1, 2 列构成的子矩阵。

由于 E 和 C 分别为 $n+1$ 阶和 $m+1$ 阶正定方阵, $\begin{bmatrix} J_{1,2} \\ J_{2,2} \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵, 可知矩阵

$$[J_{1,2}^T \quad J_{2,2}^T]C \begin{bmatrix} J_{1,2} \\ J_{2,2} \end{bmatrix} = J_{1,2}^T C J_{1,2} + J_{2,2}^T C J_{2,2}$$

为可逆方阵, 故由方程 (12) 可得 R_2 的计算公式为

$$R_2 = [J_{1,2}^T C J_{1,2} + J_{2,2}^T C J_{2,2}]^{-1} \times [J_{1,2}^T C [P - J_{1,1}R_1 - J_{1,3}R_3] + J_{2,2}^T C [Q - J_{2,1}R_1 - J_{2,3}R_3]] \quad (13)$$

综上所述, 若取 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面 $R_{m,n}(u, v)$ 的控制顶点为由式 (10)、式 (11) 和式 (13) 所确定的点, 则 $R_{m,n}(u, v)$ 为两相邻 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面 $P_{m,n}(u, v)$ 和 $Q_{m,n}(u, v)$ 在曲面 $P_{m,n}(u, v)$ 的 $u=0$ 的边界和在曲面 $Q_{m,n}(u, v)$ 的 $u=1$ 的边界上分别达到 k 阶和 l 阶插值的合并曲面。

3 合并误差及其上下界

定义 $P_{m,n}(u, v)$ 和 $Q_{m,n}(u, v)$ 与 $R_{m,n}(u, v)$ 的合并误差为 $\varepsilon = d(R_{m,n}(u, v), \hat{R}_{m,n}(u, v))$, 即

$$\varepsilon = \int_0^1 \int_0^1 |P_{m,n}(u, v) - R_{m,n}^{(1)}(u, v)|^2 dudv + \int_0^1 \int_0^1 |Q_{m,n}(u, v) - R_{m,n}^{(2)}(u, v)|^2 dudv \quad (14)$$

由式 (14) 易得合并误差的上下界为

$$0 \leq \varepsilon \leq \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} |p_{i,j} - r_{i,j}^{(1)}|^2 + \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} |q_{i,j} - r_{i,j}^{(2)}|^2 \quad (15)$$

其中, $R_{m,n}^{(1)}(u, v)$ 和 $R_{m,n}^{(2)}(u, v)$ 为合并曲面 $R_{m,n}(u, v)$ 沿曲线 $R_{m,n}(\lambda, v)$ 分成的两子曲面, $\{r_{i,j}^{(1)}\}_{i=0, j=0}^{m,n}$ 和 $\{r_{i,j}^{(2)}\}_{i=0, j=0}^{m,n}$ 为它们的控制顶点, λ 见 2.1 节定义。

4 升阶后的合并

设 $P_{m,n}(u, v)$ 和 $Q_{m,n}(u, v)$ 是两相邻的 $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面, $R_{m,n}(u, v)$ 是它们的合并曲面, $P_{m+1,n}(u, v)$ 、 $Q_{m+1,n}(u, v)$ 、 $R_{m+1,n}(u, v)$ 分别是由 $P_{m,n}(u, v)$ 、 $Q_{m,n}(u, v)$ 、 $R_{m,n}(u, v)$ 沿 u -轴经 1 次升阶后所得曲面; 又设 $T_{m+1,n}(u, v)$ 是 $P_{m+1,n}(u, v)$ 和 $Q_{m+1,n}(u, v)$ 的合并曲面。若 $P_{m,n}(u, v)$ 和 $Q_{m,n}(u, v)$ 与 $R_{m,n}(u, v)$ 的合并误差定义为

$$\begin{aligned} \epsilon &= d(\mathbf{R}_{m,n}(u,v), \hat{\mathbf{R}}_{m,n}(u,v)), \text{ 则} \\ \epsilon &= d(\mathbf{R}_{m,n}(u,v), \hat{\mathbf{R}}_{m,n}(u,v)) \\ &= d(\mathbf{R}_{m+1,n}(u,v), \hat{\mathbf{R}}_{m+1,n}(u,v)) \end{aligned} \quad (16)$$

又 $\mathbf{P}_{m+1,n}(u,v)$ 和 $\mathbf{Q}_{m+1,n}(u,v)$ 与 $\mathbf{T}_{m+1,n}(u,v)$ 的合并误差为

$$\begin{aligned} \epsilon &= d(\mathbf{T}_{m+1,n}(u,v), \hat{\mathbf{R}}_{m+1,n}(u,v)) \leq \\ & d(\mathbf{R}_{m+1,n}(u,v), \hat{\mathbf{R}}_{m+1,n}(u,v)) \end{aligned} \quad (17)$$

由式(16)和式(17)可得

$$\begin{aligned} d(\mathbf{T}_{m+1,n}(u,v), \hat{\mathbf{R}}_{m+1,n}(u,v)) &\leq \\ d(\mathbf{R}_m(u,v), \hat{\mathbf{R}}_{m,n}(u,v)) \end{aligned} \quad (18)$$

这里

$$\hat{\mathbf{R}}_{m+1,n}(u,v) = \begin{cases} \mathbf{P}_{m+1,n}\left(\frac{u}{\lambda}, v\right) & 0 \leq u \leq \lambda, 0 \leq v \leq 1 \\ \mathbf{Q}_{m+1,n}\left(\frac{u-\lambda}{1-\lambda}, v\right) & \lambda \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

式(18)表明,升阶可以减小合并误差。在下一节中,将以具体实例给出升阶前后合并误差的比较,以更进一步说明升阶可减小合并误差。

5 数值例子

如图 1 所示, $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 和 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 是两相邻的 7×9 次张量积 Bézier 曲面, 其中 $\mathbf{P}_{7,9}(1,v) = \mathbf{Q}_{1,9}(0,v)$; 如图 2 所示, 7×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{R}_{7,9}(u,v)$ 是曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 和 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 的不保边界插值的合并曲面。它们之间的合并误差 $\epsilon = 0.00562648$ 。

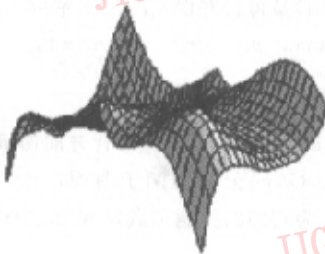


图 1 两相邻 7×9 次 Bézier 曲面

如图 3 所示, 先把 7×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 和 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 分别沿 u -轴升 2 阶, 然后合并成一片不保边界插值的 9×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{R}_{9,9}(u,v)$, 它们之间的合并误差 $\epsilon = 0.00191598$ 。

如图 4 所示, 两相邻的 7×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 和 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 分别在曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 的边界 $\mathbf{P}_{7,9}(0,v)$ 和曲面 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 的边界 $\mathbf{Q}_{7,9}(1,v)$ 上合并成 2 阶连续的曲面 $\mathbf{R}_{7,9}(u,v)$, 它们之间的合并误差 $\epsilon = 0.0708812$ 。

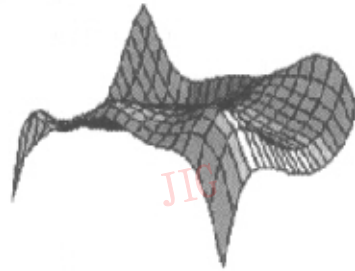


图 2 7×9 次合并 Bézier 曲面(不保边界插值)

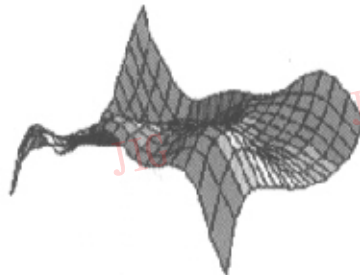


图 3 9×9 次合并 Bézier 曲面(不保边界插值)

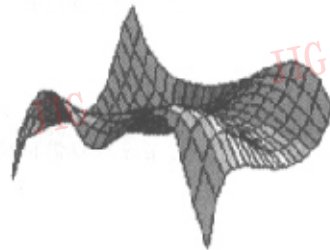


图 4 7×9 次合并 Bézier 曲面(保边界(2,2)阶插值)

差 $\epsilon = 0.0708812$ 。

如图 5 所示, 先把 7×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 和 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 分别沿 u -轴升 1 阶, 然后合并成分别在曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 的边界 $\mathbf{P}_{7,9}(0,v)$ 和曲面 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 的边界 $\mathbf{Q}_{7,9}(1,v)$ 上 1 阶连续的一片 8×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{R}_{8,9}(u,v)$, 它们之间的合并误差 $\epsilon = 0.00957923$ 。

如图 6 所示, 先把 7×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 和 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 分别沿 u -轴升 2 阶, 然后合并成分别在曲面 $\mathbf{P}_{7,9}(u,v)$ 的边界 $\mathbf{P}_{7,9}(0,v)$ 和曲面 $\mathbf{Q}_{7,9}(u,v)$ 的边界 $\mathbf{Q}_{7,9}(1,v)$ 上 2 阶连续的一片 9×9 次张量积 Bézier 曲面 $\mathbf{R}_{9,9}(u,v)$, 它们之间的合并误差 $\epsilon = 0.00408141$ 。

由以上的实例可知, 用本文方法所得到的合并

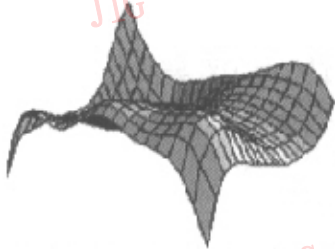


图 5 8×9 次合并 Bézier 曲面(保边界(2,2)阶插值)

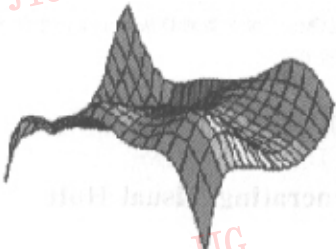


图 6 9×9 次合并 Bézier 曲面(保边界(2,2)阶插值)

曲面对原曲面具有很好的逼近效果; 当要求合并曲面与原曲面在某一局部有较多的共性时, 则合并误差将增大, 这时为了减小合并误差, 改善合并效果, 可采用先升阶, 然后再合并的方法。为了说明升阶和进行边界不同阶的插值对合并效果的影响, 下表给出上例中的两相邻 7×9 次张量积 Bézier 曲面沿 u -轴经 h 次升阶后, 在不同的边界插值条件下所产生的合并误差。

表 1 两相邻 7×9 次张量积 Bézier 曲面沿 u -轴经 h 次升阶后在不同的边界插值条件下的合并误差

h	(k, l)			
	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 2)$
0	0.005 216 73	0.006 244 8	0.012 751 8	0.070 879 6
1	0.002 489 17	0.002 733 69	0.003 840 29	0.009 574 2
2	0.001 915 98	0.002 021 62	0.002 391 27	0.004 037 53

$(-1, -1)$ 表示合并曲面不插值原曲面的边界; (k, l) 表示合并曲面在曲面 $P_{7,9}(u, v)$ 的边界 $P_{7,9}(0, v)$ 和曲面 $Q_{7,9}(u, v)$ 的边界 $Q_{7,9}(1, v)$ 上分别达到 k 和 l 阶插值。

参 考 文 献

- 1 Hoschek J. Approximate conversion of spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(1): 59~66.
- 2 Watkins M, Worsey A. Degree reduction for Bézier curves [J]. Computer Geometric Design, 1988, 20(7): 398~405.
- 3 Eck M. Degree reduction of Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1993, 10(4): 237~257.
- 4 Bogacki P, Weinstein S, Xu y. Degree reduction of Bézier curves by uniform approximation with endpoint interpolation [J]. Computer Aided Design, 1995, 27(9): 651~661.
- 5 陈国栋, 王国瑾. 基于广义逆矩阵的 Bézier 降阶逼近 [J]. 软件学报, 2001, 12(3): 435~439.
- 6 陈国栋, 王国瑾. 带端点插值条件的 Bézier 曲线降阶逼近 [J]. 软件学报, 2000, 11(9): 1202~1206.
- 7 Chen G D, Wang G J. Multi-degree reduction of tensor product Bézier surfaces with conditions of corners interpolations [J]. Science in China (Series F), 2002, 45(1): 51~58.
- 8 Chen F L, Lou W P. Degree reduction of interval Bézier curves [J]. Computer Aided Design, 2000, 32(3): 571~582.
- 9 孙红兵, 陈效群. 区间 Bézier 曲面的降阶 [J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(2): 147~154.
- 10 Hu S M, Tong R F, Ju T, et al. Approximate merging of a pair of Bézier curves [J]. Computer Aided Design, 2001, 33(2): 125~136.



郭清伟 1968 年生, 1991 年获安徽大学数学系理学学士学位, 1994 年获合肥工业大学理学硕士学位, 现为中国科学技术大学数学系博士研究生。主要研究领域为数值逼近、计算机辅助几何设计等。发表论文 10 余篇。



朱功勤 1938 年生, 合肥工业大学教授, 博士生导师。主要研究领域为多元有理逼近、计算机辅助几何设计、统计计算等。发表论文 100 多篇, 出版专著 2 部。