# 线性多视图重构的新算法

章权兵　　王海贤　　韦　穗
（安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室，合肥　230039）

**摘　要**　研究了由多幅图像恢复摄像机矩阵和空间物体三维几何形状这一多视图三维重构问题，改进了由 Hartley 和 Rother 等人分别给出的基于由无穷远平面诱导的单应进行射影重构的算法，提出了一种新的线性算法，它仅需要空间中 3 个点在每幅图像上均可见。因为空间中不在同一直线上的 3 个点恰好确定一个平面，所以它避免了 Hartley 和 Rother 等方法中需要确定空间 4 个点是否共面这一比较棘手的问题。大量实验结果表明，这种方法快速、准确且受噪声影响小。

**关键词**　射影重构　基本矩阵　单应　无穷单应
**中图法分类号**：TP391.41　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-8961(2004)10-1210-06

# A New Method of Linear Multi-view Reconstruction

ZHANG Quan-bing, WANG Hai-xian, WEI Sui
(*Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Anhui University, Hefei* 230039)

**Abstract**　This paper investigates the problem of how to carry out 3D projective reconstruction from multiple images. Up to now, it is commonly accepted that the bundle adjustment and factorization method are the main methods for projective reconstruction. But the bundle adjustment needs a good initialization and extremely expensive computation, and the factorization method is limited by the restriction that all 3D points must be visible in all views. Recently, a linear algorithm of projective reconstruction based on the homography induced by the infinite plane was given by Hartley and Rother et al., but they needed 4 points on a reference plane be visible in all views. This paper improves their algorithms and proposes a new linear algorithm based on infinite homography where 3 points on a reference plane should be visible in all views. It avoids the difficult task of determining whether 4 object points are coplanar or not, because 3 points which are not collinear just determines a plane. The algorithm proposed in this paper is convenient and can deal with the occluded problem. The algorithms are evaluated on both synthetic and real world images and the experiment results show that the method is accurate and only affected slightly by noise.

**Keywords**　projective reconstruction, fundamental matrix, homography, infinite homography

## 1　引　言

在计算机视觉领域中，由多幅图像恢复摄像机运动参数和空间物体 3 维几何形状的问题称为多视图 3 维重构，它一直是计算机视觉研究的重点和热点之一。该问题的研究成果可以直接应用于机器人导航、精密工业测量、物体识别、虚拟现实以及军事等方面。近年来，该问题又引起多媒体和计算机图形学界的极大关注，为了生成已知景物和虚拟物体的合成环境，必须进行 3 维重构，否则用虚拟技术合成的环境只能用于浏览，而不能进入其中漫游。因此对 3 维重构理论和方法的研究无论是在计算机视觉中，还是在工程应用中都具有十分重要的理论意义和实用价值，大量文献表明，这些年来它受到了相当的重视[1~4]。

迄今为止，捆集调整被公认为是射影重构的黄金标准算法[1]，因为它能够容忍数据的丢失并提供真正的最大似然估计，同时它允许对每一个测量值指派单个协方差，并且可以扩展到先验估计和摄像

**基金项目**：国家自然科学基金(60143003)；国家自然科学基金(60375010)；安徽省教育厅自然科学研究项目(2003KJ005)
**收稿日期**：2003-10-20；**改回日期**：2004-04-28

机参数或点的位置的约束。但该方法却有以下不足:(1)它需要提供一个好的初值;(2)由于涉及到大量参数,它的运算量可能极其巨大。利用将图像数据矩阵分解成摄像机和场景参数的方法可避免以上不足。对于多幅图像,图像点坐标可以被组合成一个所谓的"测量矩阵"。Tomasi 和 Kanade 对由正交摄像机所获得的场景结构的测量矩阵直接进行分解,给出了数值上比较满意的方法[5];Sturm 和 Triggs 将该方法从仿射扩展到射影情形,在计算出对极几何之后,对测量矩阵进行了分解,给出了被证明是数值上最有效的方法[6]。但这两种方法都有一个共同的缺陷,即它们需要所有的点在所有图像上均可见。当部分图像出现遮挡问题时,就无法重构出被遮挡的点,另外,寻找在所有图像上均可见的对应点也使对应点匹配变得更加困难。

Hartley 和 Rother 等人利用由无穷远平面诱导的单应,给出了由多视图重构的不同算法[7~9],避免了所有的点在所有图像上均可见这一苛刻要求,但其中需要 4 个共面点在所有图像中均可见。本文则对其进行了改进,提出了一种新的线性算法,它只需要有 3 个点在所有图像中均可见,当然,这 3 点要不在同一直线上,并且由这 3 点确定的平面不过任一摄像机的光心。这里只要 3 个点的优点是:首先它需要的点数更少,更重要的是它避免了要确定 4 个点是否共面的问题,因为空间中不在同一直线上的 3 个点恰好确定一个平面,而 4 个点则不一定。在没有关于场景的先验信息的条件下,确定多点是否共面本身就是一个非常棘手的问题。

## 2　问题的提出

针孔摄像机将 3 维空间中的点 $\boldsymbol{X}$ 映射到 2 维图像平面上的点 $\boldsymbol{x}$,当 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 都用齐次坐标表示时,这个射影变换关系可以用一个秩为 3 的 3×4 齐次(摄像机)矩阵 $\boldsymbol{P}$ 表示为

$$\boldsymbol{x} \cong \boldsymbol{PX}$$

其中,"≅"表示等式两边相差一个非零尺度因子。假设由 $m$ 个摄像机 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 从不同的位置对空间中 $n$ 个点 $\boldsymbol{X}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 拍摄了 $m$ 幅图像,得到的图像点为 $\boldsymbol{x}_{i,j}$,重构的目标就是直接由不同的射影摄像机对某一物体所拍摄的图像 $\boldsymbol{x}_{i,j}$ 来恢复摄像机矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 和物体的结构 $\boldsymbol{X}_j$。当摄像机未标定,且没有关于物体和摄像机的额外信息时,只能进行 3 维射影重构,即在相差一个射影变换的意义下进行重构。

在传统的分解算法中要求所有的图像点在所有图像上均可见,即要求对任意的 $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, $\boldsymbol{x}_{i,j}$ 都已知。但是当摄像机或物体运动时,经常会出现遮挡情况,这时就很难保证所有的点在每幅图像上均可见,即对某些 $i,j$, $\boldsymbol{x}_{i,j}$ 未知。本文中所给出的方法可以有效地解决这一遮挡问题,其中只要求空间中有不在同一直线上的 3 个点 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ 在每幅图像上均可见。

## 3　基本矩阵与平面诱导的单应

### 3.1　基本矩阵

基本矩阵描述的是同一摄像机在两个不同位置拍摄同一幅场景所获得的两幅图像之间的基本的几何关系,它是对极几何的代数表示。如果两幅图像中的任意一对对应点 $\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{x}'$ 都满足 $\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,则称 $\boldsymbol{F}$ 为基本矩阵,$\boldsymbol{F}$ 是一个秩为 2 的 3×3 矩阵。基本矩阵在相差一个非零尺度因子下是唯一确定的。对极点是连接两摄像机中心的直线(基线)与像平面的交点,也就是一幅图像中另一个摄像机中心的像。若 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{e}'$ 分别是两幅图像的对极点,则 $\boldsymbol{Fe}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{0}$。由点对应求两幅图像之间的基本矩阵已有很多方法,一般给定 8 组点对应即可线性计算基本矩阵,从而可求出对极点。

### 3.2　平面诱导的单应

2 维射影空间到其自身的满足保线性的可逆映射称为单应(homography)。由定义不难发现两个单应的乘积仍然是一个单应。对于图像而言,单应通常发生于下列情形:

(1) 一个平面在两个透视摄像机下的像;

(2) 空间中的一个平面和它在透视摄像机下的像;

(3) 由一个旋转(但不平移)的摄像机拍摄的空间同一景物的两幅图像。

考虑由两个摄像机(中心不同)拍摄的空间同一物体的图像和空间任一不过摄像机中心的平面之间的关系。如图 1 所示,把过点 $\boldsymbol{x}$ 的射线反向延长并与世界平面 $\pi$ 交于点 $\boldsymbol{x}_\pi$,该点投影到另一幅图像上的点 $\boldsymbol{x}'$。在世界平面 $\pi$ 和第 1 幅图像平面之间存在一个透视变换 $\boldsymbol{x}\cong\boldsymbol{H}_{1,\pi}\boldsymbol{x}_\pi$,而在世界平面 $\pi$ 和第 2 幅图像平面之间存在一个透视变换 $\boldsymbol{x}'\cong\boldsymbol{H}_{2,\pi}\boldsymbol{x}_\pi$,这两个透视变换的复合是两个图像平面之间的一个单应

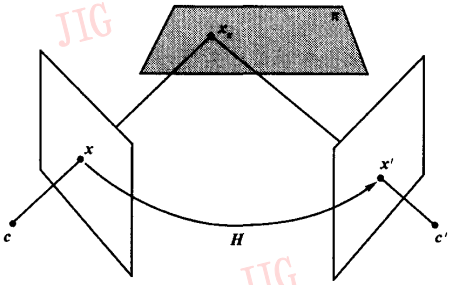



图 1 世界平面诱导的单应

变换 $x' \cong H_{2,\pi}H_{1,\pi}^{-1}x \cong Hx$。这个单应与世界平面 $\pi$ 所在位置有关，因此称为由平面 $\pi$ 诱导的单应。从上述关系可以看出，只要给出一个不过两摄像机中心的平面，就能唯一确定两幅图像之间的一个单应。如果两幅图像之间的单应由无穷远平面所诱导，则该单应称为两幅图像之间的无穷单应。

如果空间某平面 $\pi$ 诱导的第 1 幅和第 2 幅图像的单应为 $H_{1,2}$，第 2 幅和第 3 幅图像的单应为 $H_{2,3}$，则对于 3 幅图像上的点 $x, x', x''$，有 $x' = H_{1,2}x$，$x'' = H_{2,3}x'$，因此 $x'' = H_{2,3}H_{1,2}x$，所以由该平面诱导的第 1 幅和第 3 幅图像之间的单应为 $H_{2,3}H_{1,2}$。

### 3.3 无穷单应和摄像机矩阵之间的关系

因为射影重构恢复的摄像机矩阵和空间物体相差一个任意的射影变换，所以在射影重构中不妨假设世界坐标原点过第 1 个摄像机中心，即 $P_1 = [I \mid 0]$。将其他摄像机矩阵分块为 $P_i = [M_i \mid t_i]$，$i = 2, 3, \cdots, m$，其中 $M_i$ 为 $3\times3$ 矩阵，$t_i$ 为 3 维列矢量。

设第 1 幅图像与其他各幅图像之间的无穷单应分别为 $H_i$，$i = 2, 3, \cdots, m$。则对于诱导无穷单应的无穷远平面上的任一点 $X_j = (x_j, y_j, z_j, 0)^{\mathrm{T}}$，有

$$x_{1,j} = P_1(x_j, y_j, z_j, 0)^{\mathrm{T}} = (x_j, y_j, z_j)^{\mathrm{T}}$$

$$x_{i,j} = P_i(x_j, y_j, z_j, 0)^{\mathrm{T}} = M_i x_{1,j}, i = 2, 3, \cdots, m,$$

因此 $\bar{X}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = x_{1,j}$，并且由前面无穷单应的定义可得 $M_i = H_i$。

## 4 射影重构

由 3.3 节知道，如果求出了图像之间的无穷单应，那么就部分地确定了摄像机矩阵，因此，可以首先求出由无穷远平面诱导的第 1 幅图像与其他各幅图像之间的无穷单应，然后再利用这些无穷远单应确定摄像机矩阵和空间 3 维点的位置。

### 4.1 平面单应的计算

一个 $3\times3$ 的单应矩阵 $H$ 有 9 个元素，去掉一个公共的尺度因子，还有 8 个自由度，由 $x' \cong Hx$ 知，每对点可以提供两个独立的方程，因此至少需要 4 组点对应才能求出该单应矩阵。这正是 Hartley 等人需要 4 个共面点在所有图像上均可见的原因。但若运用两幅图像之间的基本矩阵，则只要 3 组点对应即可[1]。

设 $x_j \leftrightarrow x'_j$，$j = 1, 2, 3$ 是世界平面 $\pi = (v^{\mathrm{T}}, 1)^{\mathrm{T}}$ 上的 3 个点 $X_j$ 在两幅图像上对应的图像，则由该平面诱导的两幅图像的单应可以按下述方式求得：设两幅图像之间的基本矩阵为 $F$，第 2 幅图像上的对极点，即第 1 个摄像机中心在第 2 幅图像上的像为 $e'$，则对应于该基本矩阵的摄像机矩阵可以选择为[1]

$$P = (I \mid 0), P' = ([e']_\times F \mid e')$$

其中，$[e']_\times$ 表示矢量 $e'$ 对应的反对称矩阵，即若 $e' = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$，则

$$[e']_\times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

因此映射到第 1 幅图像上点 $x_j$ 的空间点 $X_j$ 满足 $x_j = PX_j = (I \mid 0)X_j$，$X_j = (x_j^{\mathrm{T}}, \rho_j)^{\mathrm{T}}$。又因为 $X_j$ 在平面 $\pi = (v^{\mathrm{T}}, 1)^{\mathrm{T}}$ 上，所以有 $\pi^{\mathrm{T}}X_j = (v^{\mathrm{T}}, 1)(x_j^{\mathrm{T}}, \rho_j)^{\mathrm{T}} = 0$，即 $\rho_j = -v^{\mathrm{T}}x_j$，$X_j = (x_j^{\mathrm{T}}, -v^{\mathrm{T}}x_j)^{\mathrm{T}}$，$X_j$ 在第 2 幅图像上的投影为

$$x'_j = P'X_j = ([e']_\times F \mid e')X_j = ([e']_\times F - e'v^{\mathrm{T}})x_j \quad (1)$$

因此，由平面 $\pi$ 诱导的两幅图像之间的单应为 $H = [e']_\times F - e'v^{\mathrm{T}}$。下面确定此处的参变量 $v$。记 $A = [e']_\times F$，则式(1)两边做差乘消去尺度因子可得

$$x'_j \times (Ax_j - e'v^{\mathrm{T}}x_j) = (x'_j \times Ax_j) - (x'_j \times e')v^{\mathrm{T}}x_j = 0 \quad (2)$$

再将式(2)与 $x'_j \times e'$ 做内积，即两边左乘 $(x'_j \times e')^{\mathrm{T}}$ 可得

$$x_j^{\mathrm{T}}v = \frac{(x'_j \times (Ax_j))^{\mathrm{T}}(x'_j \times e')}{(x'_j \times e')^{\mathrm{T}}(x'_j \times e')} \quad (3)$$

记

$$G = \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{T}} \\ x_2^{\mathrm{T}} \\ x_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \dfrac{(x_1 \times (Ax_1))^{\mathrm{T}}(x'_1 \times e')}{\| x'_1 \times e' \|^2} \\ \dfrac{(x_2 \times (Ax_2))^{\mathrm{T}}(x'_2 \times e')}{\| x'_2 \times e' \|^2} \\ \dfrac{(x_3 \times (Ax_3))^{\mathrm{T}}(x'_3 \times e')}{\| x'_3 \times e' \|^2} \end{pmatrix}$$

则由式(3)可构造方程组 $Gv = b$，因此 $v = G^{-1}b$。所以

由两幅图像上的 3 组对应点和基本矩阵可以得到由这 3 点所在的世界平面诱导的两幅图像之间的单应为

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{e}']_\times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

要求两幅图像之间的基本矩阵 $\boldsymbol{F}$,至少需要 7 组对应或 6 组对应(其中 4 组是空间同一平面上的点的像),因此,当第 1 幅图像与其他各幅图像之间至少有 7 组或 6 组对应(这里尽管要求至少有 7 组或 6 组对应,但是并不需要所有图像都是同样的对应)时,可以首先求出第 1 幅图像与其他各幅图像之间的基本矩阵 $\boldsymbol{F}_i, i=2,3,\cdots,m$,然后再按照上述方法利用这些基本矩阵求出第 1 幅图像和其他各幅图像之间的平面单应 $\boldsymbol{H}_i$。当第 1 幅图像与其他图像的对应点不够时,这种方法不再有效,但可以用下面的办法求出这些单应矩阵:首先求出任意相邻两幅图像之间的基本矩阵 $\boldsymbol{F}_{i-1,i}, i=2,3,\cdots,m$(不妨假设相邻两幅有足够的对应点可供求解本矩阵),然后求出它们之间的平面单应 $\boldsymbol{H}_{i-1,i}$,最后由单应的传递性,逐次求出第 1 幅图像和其他各幅图像之间的平面单应

$$\boldsymbol{H}_{1,i} = \boldsymbol{H}_{i-1,i}\boldsymbol{H}_{1,i-1}, i=2,3,\cdots,m$$

因为求单应矩阵需要利用式(4),所以需要第 1 幅图像与其他各幅图像至少有 3 组对应点,而这些单应是由空间同一平面诱导的,所以这 3 组对应点在每幅图像中均相同,也就是说,需要有 3 个空间点在每幅图像上均可见。

### 4.2　恢复摄像机矩阵和空间物体

设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ 是在所有图像上均可见的 3 个不共线的空间点,$\boldsymbol{x}_{i,1}, \boldsymbol{x}_{i,2}, \boldsymbol{x}_{i,3}, i=1,2,\cdots,m$ 是它们在各幅图像上的像点。因为射影重构恢复的摄像机矩阵和空间物体相差一个任意的射影变换,所以在射影重构中可以假定 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ 所在的平面为 $\pi_\infty$,即无穷远平面。根据上节中的算法可以求出第 1 幅图像和其他各幅图像之间的无穷单应 $\boldsymbol{H}_i, i=2,3,\cdots m$。

在求出第一幅图像和其他各幅图像之间的无穷单应 $\boldsymbol{H}_i$ 之后,就可以线性地确定摄像机矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 和空间点 $\boldsymbol{X}_j$ 的位置。由 3.2 节知道,摄像机矩阵 $\boldsymbol{P}_i$, $i=2,3,\cdots,m$的前 3 列即为 $\boldsymbol{H}_i$。因此余下的问题是求摄像机的最后一列 $\boldsymbol{t}_i$ 和 3 维点的空间坐标。

对于不在诱导单应的平面上的点 $\boldsymbol{X}_j=(x_j, y_j, z_j, 1)^{\mathrm{T}}$,点投影方程为

$$\boldsymbol{x}_{i,j} \cong \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{X}_j = [\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{t}_i]\boldsymbol{X}_j = [\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{t}_i]\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_j\\ 1\end{pmatrix}$$

其中,$\widetilde{\boldsymbol{X}}_j=(x_j, y_j, z_j)^{\mathrm{T}}$ 为点的非齐次坐标,$\boldsymbol{x}_{i,j}=(x_{i,j}, y_{i,j}, 1)^{\mathrm{T}}$,则上式展开得

$$\begin{pmatrix}x_{i,j}\\ y_{i,j}\\ 1\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}\boldsymbol{h}_{i,1}^{\mathrm{T}} & t_{i,1}\\ \boldsymbol{h}_{i,2}^{\mathrm{T}} & t_{i,2}\\ \boldsymbol{h}_{i,3}^{\mathrm{T}} & t_{i,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_j\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{h}_{i,1}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{X}}_j + t_{i,1}\\ \boldsymbol{h}_{i,2}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{X}}_j + t_{i,2}\\ \boldsymbol{h}_{i,3}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{X}}_j + t_{i,3}\end{pmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{h}_{i,k}^{\mathrm{T}}$表示矩阵 $\boldsymbol{H}_i$ 的第 $k$ 行,$t_{i,k}$是矢量 $\boldsymbol{t}_i$ 的第 $k$ 个元素。利用矢量的叉乘消去公共的尺度因子,再化简后可得如下 2 个独立的方程

$$\begin{pmatrix}x_{i,j}\boldsymbol{h}_{i,3}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{h}_{i,1}^{\mathrm{T}} & -1 & 0 & x_{i,j}\\ y_{i,j}\boldsymbol{h}_{i,3}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{h}_{i,2}^{\mathrm{T}} & 0 & -1 & y_{i,j}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_j\\ t_{i,1}\\ t_{i,2}\\ t_{i,3}\end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

对 $n$ 个点和 $m$ 幅图像,共有 $3n+3(m-1)$个未知元素,对每个图像点,可以按上述方式得到 2 个独立的方程。假设第 $i$ 幅图像上有 $n_i$ 个图像,则一共可以得到 $\sum_{i=1}^{m} n_i$ 个方程。将由所有的图像点得到的方程并在一起就可得到一个形如

$$\boldsymbol{AZ} = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

的齐次线性方程组,其中,$\boldsymbol{A}$ 包含图像点的坐标和第 1 幅图像与其他各幅图像之间的无穷单应,$\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{t}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{t}_3^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{t}_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是由未知的 3 维点 $\boldsymbol{X}_j$ 和矢量 $\boldsymbol{t}_i$ 的元素构成的矢量。这是一个由 $\sum_{i=1}^{m} n_i$ 个方程组成的含 $3n+3(m-1)$个未知元素的齐次线性方程组,因此对于一般位置上的点,当满足 $\sum_{i=1}^{m} n_i = 3n+3(m-1)-1$时,方程组(6)有唯一解。当 $\sum_{i=1}^{m} n_i \geqslant 3n+3(m-1)$时可以求其最小二乘解:对系数矩阵作奇异值分解($SVD$)得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UDV}^{\mathrm{T}}$,并使 $\boldsymbol{D}$ 中奇异值按从大到小的顺序排列,则未知矢量即为矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的最后一列。至此,就求出了空间点的坐标 $\boldsymbol{X}_j$ 和未知矢量 $\boldsymbol{t}_i$,从而也就得到了摄像机矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 和物体的 3 维结构。

### 4.3　重构算法

算法的目标是直接由不同的射影摄像机对某一物体所拍摄的图像点 $\boldsymbol{x}_{i,j}$来恢复射影摄像机矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 和物体的射影结构 $\boldsymbol{X}_j$。归纳起来,射影重构的步骤如下:

(1) 由图像中的对应点求出相邻两幅图像之间的基本矩阵 $\boldsymbol{F}_{i-1,i}, i=2,3,\cdots,m$;

(2) 利用式(4)求出相邻两幅图像之间的无穷单应 $\boldsymbol{H}_{i-1,i}, i=2,3,\cdots,m$;

(3) 利用单应的传递性,逐次求出第 1 幅图像和其他各幅图像之间的无穷单应 $\boldsymbol{H}_{1,i}$,从而得到摄

像机矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 的前 3 列 $\boldsymbol{M}_i$；

(4) 按式(5)构造齐次线性方程组(6)，然后利用线性算法或最小二乘法求出摄像机矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 的第 4 列 $\boldsymbol{t}_i$ 和空间点的坐标 $\boldsymbol{X}_j$。

## 5 实验结果

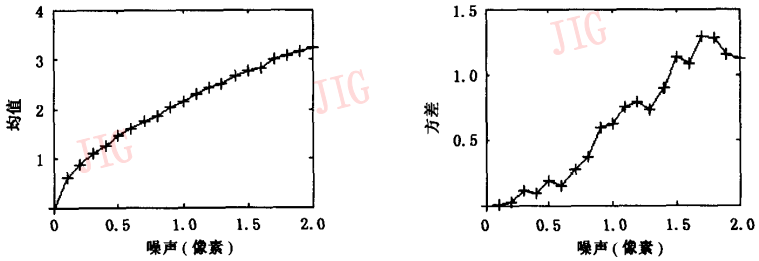
分别用模拟与真实场景进行实验。

(1)模拟实验

首先模拟产生 10 幅分辨率为 800×600 的图像，并对各幅图像上的对应点人为地加上已知方差的零均值高斯噪声，然后利用重构算法求出射影摄像机矩阵和 3 维点的空间位置，再将这些点反投影到对应的图像上，与原来的对应点坐标相比，求出重投影误差 $\frac{1}{m\times n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\|\overline{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{X}_j}-\bar{\boldsymbol{x}}_{i,j}\|$（上面加横线表示对应的非齐次坐标）。对不同水平的高斯噪声分别运行 1 000 次，重投影误差的均值和方差分别如图 2 所示。

(2) 真实场景

使用一架数码照相机从不同角度拍摄了 8 幅图像，如图 3 所示，然后从这些图像中提取出对应点（如第 6 幅图像中标出的点，注意：对于中间的某些点，其他图像上出现了不同程度的遮挡）。利用本文算法实现射影重构，最后标定摄像机，获得欧氏重构如图 4 所示。



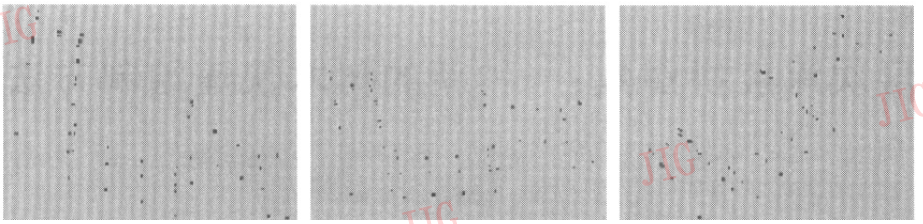

(a) 误差的均值　　(b) 误差的方差

图 2　模拟结果

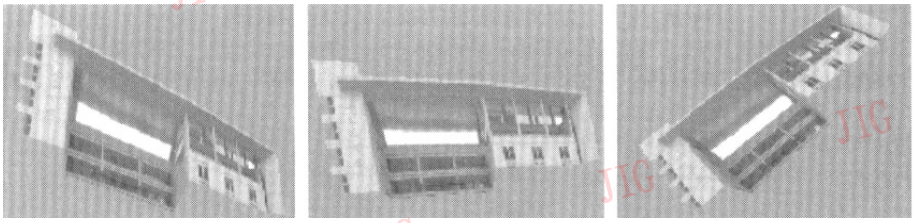
图 3　从不同角度拍摄的原始图像

## 6 结　论

由多幅图像进行 3 维重构是计算机视觉领域的一个基本问题，研究者们对此进行了大量的研究，并提出了多种重构方法，其中基于平面单应的 3 维重构是一种非常重要的方法，因为它可以解决图像遮挡或数据丢失等问题。但已有的方法都需要有空间中某一平面上的 4 个点在所有图像上均可见，这在一定程度上限制了其应用范围，因为若没有先验知识，判断空间中的 4 个点是否共面本身就是一个很棘手的问题。针对以上不足，本文做了一些改进，提出一种新的基于无穷远平面诱导的单应进行射影重构的算法。模拟与真实实验结果表明，所给算法是正确有效的。



(a) 3 维空间点在不同视点下的结果



(b) 贴上纹理后的结果

图 4　重构结果

该算法先利用一个简单的公式估计出第一幅图像与其他各幅图像之间的无穷单应,接着只需要一个线性求解过程就可以同时获得摄像机矩阵和空间点的结构,因此运算简单快速,易于实现。同时,该算法不要求所有的点在所有视图上均可见,也不要求场景中真正存在有平面结构,而仅要求有不在同一直线上的三组对应点在每幅图像上可见即可,因此扩大了应用范围。

## 参 考 文 献


1 Hartley R, Zisserman A. 计算机视觉中的多视图几何[M]. 韦穗等译,合肥:安徽大学出版社,2002.

2 Heyden A, Kahl F, Direct affine reconstruction [A]. In: Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition[C], Barcelona, Spain, 2000;885～888.

3 Schallaffalitzky F, Zisserman A, Hartley R, *et al*. A six point solution for structure and motion [A]. In: Proceedings of European Conference on Computer Vision[C], Dublin, Ireland, 2000, 632～648.

4 Triggs B. Plane+Parallax, Tensors and Factorization[A]. In: Proceedings of European Conference on Computer Vision[C], Dublin, Ireland, 2000: 522～538.

5 Tomasi C, Kanada T. Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method [J]. International Journal of Computer Vision, 1992, **9**(2): 137～154.

6 Sturm P, Triggs B. A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion[A]. In: Proceedings of European Conference on Computer Vision [C], Cambridge, U.K., 1996: 709～719.

7 Hartley R, Dano N, Kaucic R. Plane-based projective reconstruction[A]. In: International Conference on Computer Vision[C], Vancouver, Canada, 2001: 420～427.

8 Rother C, Carlesson S. Linear multi-view reconstruction and camera recovery[A]. In: Proceedings of International Conference on Computer Vision[C], Vanconver, Canada, 2001: 42～51.

9 Hartley R. Plane-based methods for 3D reconstruction and video enhancement[A]. In: Proceedings of International Conference on Image and Graphics[C], 合肥, 2002;31～38.

**章权兵**　1977 年生,1998 年毕业于安徽大学数学系,获理学学士学位,2001 年毕业于安徽大学数学系,获理学硕士学位,2004 年于安徽大学计算机科学与信息工程学院获工学博士学位。主要研究计算机视觉、图像处理等。E-mail:qbzhang@ahu.edu.cn

**王海贤**　1977 年生,1999 年毕业于安徽大学数学系,获理学学士学位,2002 年毕业于安徽大学数学系,获理学硕士学位,现为安徽大学计算机科学与信息工程学院博士研究生。主要研究计算机视觉、模式识别等。

**韦　穗**　1946 年生,教授、博士生导师。1969 年毕业于南京工学院电子工程系。长期从事计算机视觉、图像处理方面的研究,多次主持过国家 75、85 攻关,“863”计划和国家自然科学基金项目。曾获中国科学院科技进步二等奖。