

霍夫变换在指数函数型曲线检测中的应用

曾接贤 张桂梅 储 珺 鲁宇明

(南昌航空工业学院计算机视觉研究室, 南昌 330034)

摘 要 利用了霍夫变换抗噪声能力强和能分离出属于不同直线附近点的特性, 研究离散数据点集 M 中 x_i, y_i 满足指数函数关系时的曲线检测问题。首先, 对离散数据点集 M 中的数据 x_i, y_i 做半对数变换, 得到新的数据点集 $M^*(x_i^*, y_i^*)$, 此时, x_i^*, y_i^* 具有线性关系; 其次, 用霍夫变换检测 M^* 中的直线, 可得直线参数; 然后, 利用霍夫变换所得的直线参数, 计算图像中的点到直线的距离 d_{ki} , 并与给定阈值 d_k 比较, 从而将分布在不同直线附近的点分离出来, 同时剔除数据点集 M^* 中的干扰点或噪声; 最后, 用最小二乘法拟合直线, 再经过反变换, 得到剔除干扰点或噪声后的拟合曲线方程参数 a 和 b 。该方法能够很好地检测出数据集中的数据点按指数关系分布时的曲线, 特别是能够检测出数据集中存在多条曲线的情况, 解决了最小二乘法拟合曲线时存在的 3 个问题, 同时又对霍夫变换的精度要求不高。

关键词 霍夫变换 最小二乘法 指数函数 曲线拟合

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2005)02-0236-05

The Application of Hough Transform in the Detection of Exponent Function Curve

ZENG Jie-xian, ZHANG Gui-mei, CHU Jun, LU YU-ming

(Laboratory of computer vision Nanchang Institute of Aeronautical Engineering, Nanchang 330034)

Abstract This paper, by using the strong resistance of Hough transform to noise and its characteristics of extracting points in the vicinity of different lines, studies the curve detection when x_i, y_i of the discrete data point set M satisfy the exponential function relation. Firstly, the new data points $M^*(x_i^*, y_i^*)$ are obtained by logarithmically transforming the discrete data points, and the relation between x_i^* and y_i^* becomes linear. Secondly, Hough transform is used to detect the line of M^* so that the parameters of lines are obtained. Thirdly, the parameters of lines obtained by Hough transform are used to calculate the distances d_{ki} from the points to the line, and compared d_{ki} with the given threshold d_k , so the points in the vicinity of the different lines are extracted and the interferences or noise of data point set M^* are deleted. At last, by using the fit line of the least square method and through inverse transform, parameters a and b of the fit curve equation after interferences or noise being deleted are obtained. This paper proposes a new method of detecting the exponential functional curves, which overcomes the three problems existed in the use of the fit curve of the least square method and does not need high accuracy of Hough transform.

Keywords Hough transform, least square, exponential function, fit curve

1 引言

工程上经常要进行曲线检测或拟合, 如实验数据分析、统计数据分析、计算机视觉中将离散形式的

二值边缘轮廓拟合成连续的曲线、CAD 系统中获取 3 维物体图像的线图、遥感图像中曲线的提取等。曲线拟合在计算数学中有多种方法, 最常用的是平方逼近, 即最小二乘法。

最小二乘法考虑的是已知数据点到拟合函数的

基金项目: 国家自然科学基金项目(60275037); 江西省自然科学基金项目(0311019); 江西省测试技术与控制工程研究中心开放基金项目(2002.007)

收稿日期: 2004-04-07; **改回日期:** 2004-07-14

第一作者简介: 曾接贤(1958 ~), 男, 教授。1997 年于西北工业大学获工程图学专业硕士学位。主要从事工程图学、计算机图形学和计算机视觉等方面的研究。近几年发表学术论文 20 余篇。E-mail: zengjx58@163.com

距离平方和为最小。这里存在3个问题,一是已知数据点集中若存在干扰点或噪声时,拟合函数并不通过最多的数据点,拟合误差较大;二是最小二乘法拟合函数为多项式,拟合时,需要给定多项式的形式;三是已知数据点集中的数据满足于多条曲线关系时,需事先对已知数据进行分离预处理,否则拟合结果没有意义。对数据点集进行分离预处理是一项既难又费时的的工作,有时甚至不可能实现。

霍夫变换(Hough transform)是模式识别领域中对二值图像进行直线检测的有效方法^[1],它检测已知点的共线性,是一种全局性的检测方法。当已知数据点集中存在干扰点或噪声时,它可以很好地抑制干扰或噪声,同时它还可以提取数据点集中的多条直线。但是,霍夫变换的精度却不容易控制,当实际问题对检测直线的精度要求较高时,其所需的计算时间和存储空间也随之增大^[2,3]。霍夫变换的传统应用是检测直线,也有不少文献介绍用霍夫变换检测圆^[4,5]和椭圆^[6,7],对于其他形式的曲线检测问题则很少有文献介绍。

本文利用霍夫变换的直线检测特性和最小二乘法拟合精度高的特点,研究离散数据点集 M 中 x_i, y_i 满足 $y_i = ab^{x_i}$ 指数函数关系时的曲线检测问题。

2 霍夫变换原理及其实现方法

2.1 霍夫变换原理

1962年,Hough根据数学对偶性原理提出了检测图像直线的方法^[8],此后,该方法被不断地研究和发展的,主要应用于模式识别领域中对二值图像进行直线检测。其基本原理是将图像空间中的共线点变换到参数空间中为一族相交于某点(ρ)的直线(或曲线)。若能在参数空间中检测出该交点 ρ (局部最大值),并确定其参数,就能在图像空间中找出共线点的直线方程,从而实现直线检测。

2.2 霍夫变换实现方法

根据霍夫变换原理和离散数据特点,可按下列步骤实现霍夫变换。

(1) 将参数空间等分成 $m \times n$ (m 为 θ 的等份数, n 为 ρ 的等份数)个单元,并设置累加器矩阵 $Q_{m \times n}$;

(2) 给参数空间中的每个单元分配一个累加器 $Q(i, j)$,并把累加器的初始值置为零;

(3) 取出图像坐标系中的点 (x_i, y_i) 做霍夫变

换,在参数空间中,找到 θ 和 ρ 所对应的单元,并将该单元的累加器加1,即 $Q(i, j) = Q(i, j) + 1$;

(4) 当直角坐标系中的点都经过第3步遍历后,检测参数空间中每个累加器的值,累加器值最大的单元所对应的 θ 和 ρ 即为图像坐标系中共线点的直线方程参数。

由上述霍夫变换过程可知,如果参数空间中的 θ 和 ρ 等分过粗,则参数空间中的凝聚效果较差,找不出直线的准确参数 θ 和 ρ ;反之, θ 和 ρ 等分过细,那么计算量将增大。

另外,当图像坐标系中的点分布在 R 条直线附近时,可在第4步检测累加器时,取出累加器中前 R 个值最大的单元所对应的 θ_k 和 ρ_k ($k=1, 2, \dots, R$),以 θ_k 和 ρ_k 为图像坐标系中直线方程参数,即可同时实现多条直线的检测。

3 指数函数型曲线的检测方法

假设采集到的数据集为 $M = (x_i^T, y_i^T | i=1, 2, \dots, s, s$ 为数据集中的数据点数), M 中的数据点 x_i, y_i 满足指数函数关系, R 表示指数函数关系式方程个数(曲线条数),根据曲线检测的目的要求给定阈值 d_k ,则可检测指数函数型曲线。

3.1 数据预处理

若数据集 M 中的数据 x_i, y_i 满足关系式

$$y_i = ab^{x_i}, (i=1, 2, \dots, s) \quad (1)$$

对式(1)两边求对数,得

$$y_i^* = x_i^* b^* + a^* \quad (2)$$

$$(i=1, 2, \dots, s^*; s^* \leq s)$$

其中, $y_i^* = \pm \ln |y_i|, b^* = \pm \ln |b|, a^* = \pm \ln |a|, x_i^* = x_i, y_i^*, b^*, a^*$ 与 y_i, b, a 同号。并将 x_i^*, y_i^* 构成的数据集记作 M^* 。

经过对数变换后,将原数据集中满足曲线方程式(1)的数据集 M 变换成满足直线方程式(2)的数据集 M^* 。在 M^* 中,就可利用霍夫变换检测出式(1)的参数 a 和 b 。

若数据集 M 中的数据 x_i, y_i 满足关系式

$$y_i + d = a(b)^{(x_i+f)} \quad (3)$$

则可通过作平移变换

$$\bar{y}_i = y_i + d \quad \bar{x}_i = x_i + f \quad (4)$$

使式(3)变换成式(1)。

3.2 霍夫变换

为便于霍夫变换,将式(2)改写成

$$\rho_k^* = x_i^* \cos \theta_k^* + y_i^* \sin \theta_k^* \quad (5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s^*; k = 1, 2, \dots, R)$$

其中, $\theta_k^* = \frac{\pi}{2} - \arctan(-a_k^*)$, $\rho_k^* = -\frac{b_k^*}{a_k^*} \cos \theta_k^*$ 。

根据式(5),对 M^* 做霍夫变换,可得直线的参数 (ρ_k^*, θ_k^*) ,也即 (a_k^*, b_k^*) 。

3.3 去除数据噪声点,精确估计曲线参数

计算 M^* 中的点到由参数 (a_k^*, b_k^*) 所确定的直线的距离

$$d_{ki} = \frac{|a_k^* x_i^* + b_k^* - y_i^*|}{\sqrt{1 + (a_k^*)^2}} \quad (6)$$

$(x_i^*, y_i^*) \in M^*, (i = 1, 2, \dots, s^*, k = 1, 2, \dots, R)$
如果

$$d_{ki} < d_k \quad (7)$$

则

$$(x_i^*, y_i^*) \Rightarrow M_k^* (x_{kj}^*, y_{kj}^*) \quad (8)$$

$$(j = 1, 2, \dots, s_k^*, s_k^* \leq s^*)$$

M_k^* 为符合阈值要求的第 k 条霍夫变换直线附近的点集。

以数据集 M_k^* 为拟合数据,使用最小二乘法分别拟合各直线,可得直线方程的参数 $(\bar{a}_k^*, \bar{b}_k^*)$ 。以 $((x_{kj}^*)_{\min}, y_{kj}^*) \in M_k^*$ 和 $((x_{kj}^*)_{\max}, y_{kj}^*) \in M_k^*$ 为端点,可确定各直线段的区间,即

$$y_{kj}^* = \bar{a}_k^* x_{kj}^* + \bar{b}_k^* \quad (9)$$

$$(x_{kj}^*)_{\min} \leq x_{kj}^* \leq (x_{kj}^*)_{\max}$$

由数据预处理可知

$$a_k = e^{\bar{a}_k^*}, (k = 1, 2, \dots, R) \quad (10)$$

$$b_k = e^{\bar{b}_k^*}, (k = 1, 2, \dots, R) \quad (11)$$

若数据预处理时做过平移变换,则再做平移反变换

$$y_i = \bar{y}_i - d \quad x_i = \bar{x}_i - f \quad (12)$$

4 实验

4.1 实验数据满足 $y_i = ab^{x_i}$ 时的曲线检测

(1) 已知某次实验所得数据如图 1(a) 所示(具体数据略)。实验数据分布在一条曲线附近,且垂直方向具有对称特性。

(2) 对 y_i 求对数得 y_i^* , 其显示结果如图 1(b) 所示。

(3) 根据式(5),对 x_i^*, y_i^* 做霍夫变换。霍夫变换时,参数空间的量化值为 $0 \leq \theta_k^* \leq 360$, 等分成 180 份; $0 \leq \rho_k^* \leq 15$, 等分成 500 份。由检测到的 ρ_k^* 和 θ_k^* , 反求得 $a_1^* = 0, b_1^* = -0.4050, a_2^* = 0, b_2^* = 0.4050$ 。

(4) 利用第 3 步霍夫变换结果,设阈值 $d_1 = 0.05$, 剔除干扰点后,得到新的数据集 $M_1^* (x_{1j}^*, y_{1j}^*)$, 将 M_1^* 用最小二乘法拟合,得直线的斜率 $\bar{b}_1^* = -0.4050, \bar{b}_2^* = 0.4050$, 截距 $\bar{a}_1^* = 0, \bar{a}_2^* = 0$ 。其结果如图 1(c) 所示。

(5) 根据第 4 步所得结果和原始数据的对称特性,显然 $\bar{b}^* = 0.4050, \bar{a}^* = 0$, 根据式(10)和式(11)反求得 $a = 1, b = 1.4993$, 可得曲线方程

$$y = 1.4993^{|x|}$$

如图 1(d) 所示。连续线是采用上述方法所检测到的曲线结果,点线是原始数据用 5 次最小二乘法直接拟合的结果。

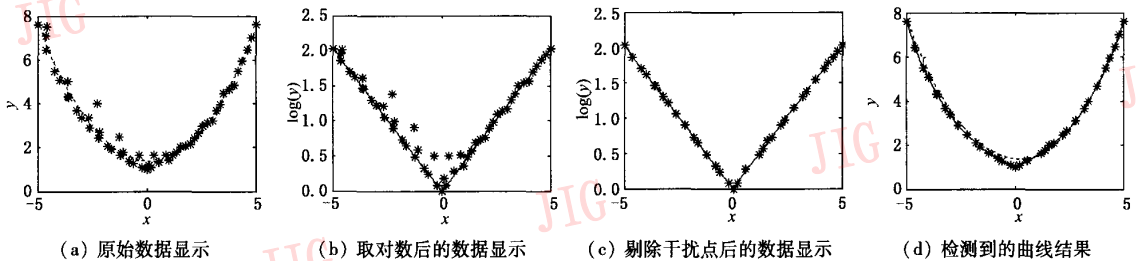


图 1 单条曲线检测结果

Fig. 1 The result of detection of single curve

4.2 实验数据满足 $y_i + d = a(b)^{(x_i+f)}$ 关系时的曲线检测

(1) 已知某次实验所得数据如图 2(a) 所示(具体数据略)。实验数据分布在一条曲线附近。经观

察和测试可知 y 坐标的平移量为 20, x 坐标的平移量为 2。

(2) 对原始数据做平移变换

$$y_i = y_i - 20 \quad \bar{x}_i = x_i \quad (13)$$

因为 x 坐标的平移对后面的变换没有影响,所以 x 坐标不做平移变换。

(3) 对 \bar{y}_i 取对数,其显示结果如图 2(b)所示。

(4) 对取对数后的数据做霍夫变换,得直线参数 $a^*=0.405, b^*=0.693$,霍夫变换检测到的直线如图 2(b)中的连续线所示。

(5) 利用第 4 步霍夫变换结果,设阈值 $d_1 = 0.01$,剔除干扰点后,得到新的数据集 $M^*(x_j^*, y_j^*)$,将 M^* 用最小二乘法拟合,得直线的截距 $\bar{a}^* =$

0.4055,斜率 $\bar{b}^* = 0.6931$ 。其结果如图 2(c)所示。

(6) 根据第 5 步所得结果,求得 $a = 1.5001, b = 1.9999$ 。

(7) 做平移反变换,得曲线方程为

$$y = 1.5001(1.9999)^x + 20$$

检测结果如图 2(d)所示,连续线是采用上述方法所检测到的曲线,点线是原始数据用 5 次最小二乘法直接拟合的结果。

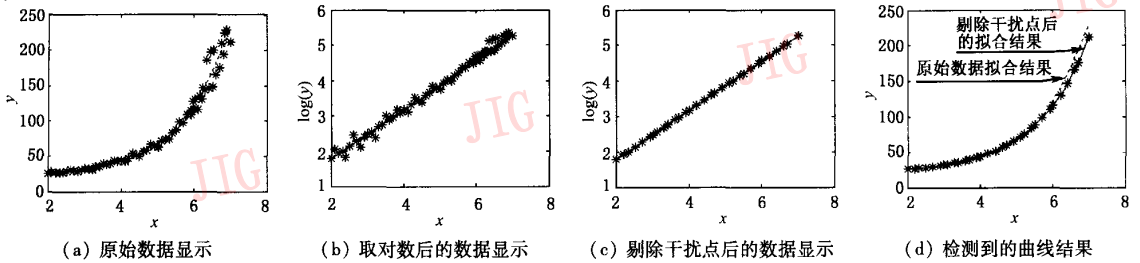


图 2 具有平移量的单条曲线检测结果

Fig. 2 The result of detection of single curve with shifting amount

4.3 实验数据分布在多条曲线附近时的 \bar{a}_k^* 曲线检测

(1) 已知某次实验所得数据如图 3(a)所示(具体数据略)。由图可知,数据点分布在 3 条曲线附近。

(2) 由图 3(a)可知,当 $x=0$ 时,曲线 1 的 y 值接近 0,曲线 2 的 y 值接近 -100,曲线 3 的 y 值接近

-50。因此,对原始数据分别做以下 3 种形式的对数变换:①直接对 y 坐标取对数,其结果如图 3(b)所示;②先对 y 做 $y^* = y + 50$ 的平移变换,然后对 y 坐标取对数,其结果如图 3(c)所示;③先对 y 做 $y^* = y + 100$ 的平移变换,然后对 y 坐标取对数,其结果如图 3(d)所示。

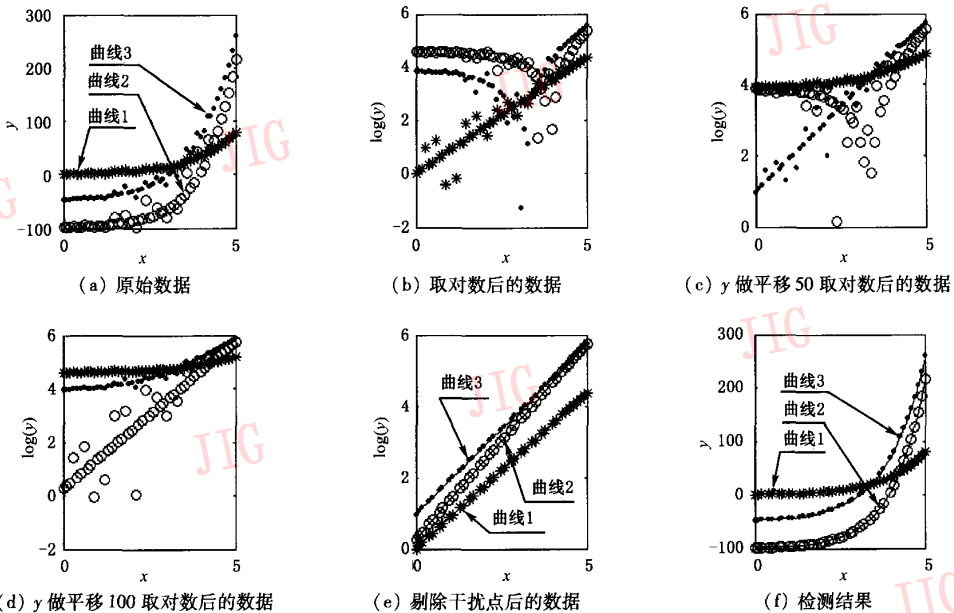


图 3 多曲线检测结果

Fig. 3 The result detection of many curves

(3) 分别对图 3(b)、(c)、(d) 中的数据做霍夫变换, 得到 3 条直线参数 a_k^* 和 b_k^* , 其结果如表 1 所示。

表 1 直线和曲线的参数
Table 1 Parameters of the line and cure

线号	a_k^*	b_k^*	\bar{a}_k^*	\bar{b}_k^*	a_k	b_k
1	0.01	0.88	0	0.875 5	1	2.400 1
2	0.26	1.10	0.260 4	1.098 6	1.300 0	3.000 0
3	0.94	0.96	0.955 5	0.955 5	2.600 0	2.600 0

(4) 取阈值 $d_1 = 0.025$, $d_2 = 0.012$, $d_3 = 0.010$ 剔除干扰点, 结果如图 3(e) 所示。

(5) 采用最小二乘法拟合得到 3 条直线的参数 \bar{a}_k^* 和 \bar{b}_k^* , 其结果如表 1 所示。

(6) 求出曲线参数 a_k 和 b_k , 如表 1 所示。

(7) 曲线检测结果如图 3(f) 所示。

第 1 条曲线方程

$$y = 2.4001x$$

第 2 条曲线方程

$$y = 1.3 \times 3^x - 100$$

第 3 条曲线方程

$$y = 2.6 \times 2.6^x - 50$$

5 结 论

指数函数型曲线检测方法, 充分利用了霍夫变换抗噪声能力强和能分离出属于不同直线附近点的特性, 能够很好地检测出数据集中的数据点按指数关系分布时的曲线, 特别是能够检测出数据集中存在多条曲线的情况, 解决了最小二乘法拟合曲线时

存在的 3 个问题, 同时又对霍夫变换的精度要求不高。在对原始数据做对数变换时, 需对原始数据取绝对值, 然后对取对数后的值加正负号, 即原始数据是正值时取正, 原始数据是负值时取负。霍夫变换后, 进行剔除干扰点操作和做最小二乘法拟合, 其目的是为了提提高检测精度。

参考文献 (Reference)

- 1 Sun Feng-rong, Liu Ji-ren. Fast Hough transform algorithm [J]. Journal of Computer, 2001, 24(10): 1102 ~ 1109. [孙丰荣, 刘积仁. 快速霍夫变换算法 [J]. 计算机学报, 2001, 24(10): 1102 ~ 1109.]
- 2 Ji Q, Xie Y. Randomized Hough transform with error propagation for line and circle detection [J]. Pattern Analysis and Applications, 2003, 6(1): 55 ~ 64.
- 3 Yang Jar-ferr, Hao Shu-sheng. Modified Hough transforms for object feature extraction [J]. Journal of Information Science and Engineering, 2001, 17(1): 133 ~ 145.
- 4 Atherton T J, Kerbyson D J. Size invariant circle detection [J]. Image and Vision Computation, 1999, 17(11): 795 ~ 803.
- 5 Chen Teh-chuan, Chung Kuo-liang. An efficient randomized algorithm for detecting circles [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2001, 83(2): 172 ~ 191.
- 6 Guil N, Zapata E L. Laver order circle and ellipse Hough transform [J]. Pattern Recognition, 1997, 30(10): 1729 ~ 1744.
- 7 Song Zhen, Chen Yang-quan, Ma Lili, et al. Some sensing and perception techniques for an omnidirectional ground vehicle with a laser scanner [J]. In: Proceedings of the 2002 IEEE. International Symposium on Intelligent Control [C], Vancouver, Canada, 2002: 27 ~ 30.
- 8 Hough P V C. Method and Means of Recognizing Complex Patterns [P]. U. S. Patent 3069654, 1962-12.