第 9 卷　第 9 期
2004 年 9 月
中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics
Vol. 9, No. 9
Sep. 2004

基于平均偏差排序的快速分形图像编码

何传江　　蒋海军　黄席樾
（重庆大学数理学院，重庆　400044）　（重庆大学自动化学院，重庆　400044）

摘　要　分形图像编码是一种很有前途的压缩技术，但由于其编码时间长、计算复杂性高，因而阻碍了它的广泛应用，针对此问题，提出了一种快速的分形编码算法。这种算法是首先将码本按照平均偏差大小进行排序，然后使用二分搜索法寻找给定 Range 块在平均偏差意义下的最好匹配码块，进而利用一个联系均方根和平均偏差的不等式来在这个最好匹配码块的邻域中搜索 Range 块在均方根意义下的最佳匹配码块。实验结果显示，在主观质量略有下降的条件下，该算法编码过程显著快于基本分形算法。

关键词　分形　分形图像编码　图像压缩　平均偏差
中图法分类号：TN919.81　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-8961(2004)09-1130-05

Fast Fractal Image Encoding Based on Mean Deviation-ordered

HE Chuan-jiang
(*College of Mathematics and Science, Chongqing University, Chongqing* 400044)
JIANG Hai-jun, HUANG Xi-yue
(*College of Automation, Chongqing University, Chongqing* 400044)

Abstract　Fractal image coding is a very promising compression technique, in which an image is encoded by a contractive transformation whose fixed point is close to the original image, and then is decoded by using the iteration procedure stemmed from Banach fixed-point theorem. However, it has not been widely used because of its long encoding time and high computational complexity. A fast fractal encoding algorithm is thus proposed in this paper. The proposed algorithm uses an inequality linking the root-mean-square (RMS) and mean intensity deviation to convert the range-domain block matching problem to the nearest neighbors search problem in the sense of mean deviations. In detail, after the codebook blocks are sorted according to their mean deviations of intensities, the encoder uses the bisection search method to find out the best matched codebook block regarding to mean deviations of a given range block. Because the closeness of mean intensity deviations of two blocks cannot ensure their good approximations in the RMS sense, the encoder utilizes the inequality to again search for the best-matched block (in the RMS sense) in the nearest k-neighbor of the best-matched block (in the sense of mean deviations) to a given range block in order to further improve the image quality. The experimental results demonstrate that the encoding procedure is much faster than that of the baseline fractal algorithm, while it gives an insignificant degradation in the subjective quality.

Keywords　fractal, fractal image coding, image compression, mean deviation

1　引　言

分形理论是非线性科学研究中十分活跃的分支，并已广泛应用于自然科学和社会科学的众多领域。特别是近二十年来，分形在计算机图形学、计算机视觉以及图像处理和分析中显示出越来越重要的作用，如自然景物的模拟、模式识别、图像压缩、图像分割、数字水印技术等领域的大量学术论文都可见分形的身影。

现实图像是自然界某一部分的真实再现，通常具有一定的分形特征，特别是不同尺度下的局部自

收稿日期：2003-06-03；改回日期：2004-04-23

相似性。分形编码就是利用图像的局部相似性来消除图像数据中存在的跨尺度冗余的新颖压缩技术，它是 Barnsley 及其研究小组在迭代函数系统(iterated function systems)研究的基础上发展起来的[1]。分形编码技术的思想十分新颖，图像不仅可由使其近似不变的压缩仿射变换来表示(编码)，并且可由压缩变换迭代作用于任意初始图像来重构(解码)。其中，压缩变换由一组作用于图像局部区域的、揭示图像局部自相似性的仿射映射构成。十余年来，分形编码以其新颖思想、高压缩比、分辨率无关性、解码快等优点而受到人们广泛关注[2]。

然而，如何寻求这样的压缩变换?这是分形编码最基本的问题。Barnsley 提出了第 1 个方法(美国专利)，但它不仅需要很长的编码时间，而且需要人机交互，对操作者也有较高要求。后来，Jacquin 提出了一个相对实用的方法，即分形块编码(fractal block coding[3])。按照分形块编码方法，图像分割以后，首先要将每个 Range 块 R 与所有码块 D(源于图像本身)的对比度和亮度调整版本($s\cdot D+o\cdot\mathbf{1}$)进行比较，并要从预先设定的数值码本中搜索最佳对比度因子和确定最佳亮度因子，然后选出 R 的最佳匹配块才能得到分形码。不难看出，Jacquin 算法的计算复杂性仍然很高。

目前，人们已提出了许多加快编码的方法[2]，而且新的方案仍在不断出现[4,5]。总的来说，可以把这些编码方法分成“无损”加快与有损加快两类，其中“无损”加快是相对于基本分形算法而言，是一种保持图像质量不变的加快编码方法，其缺点是加快的倍数不高(通常 2 倍左右[6,7])；有损加快是一种以牺牲图像质量来换取编码时间减少的编码方法。因为分形编码是一种基于拼贴定理的编码方法，这种方法本身就是有损的，所以，有损加快方法得到了人们更多的关注，已成为快速分形编码研究的主流。

本文提出一种有损快速编码方法，它是利用子块的亮度平均偏差和一个简单不等式来减少需要搜索的码块数目，从而可减少编码时间。实验结果显示，在主观质量略有下降的条件下，其编码过程显著快于基本分形算法。

2　基本分形算法

本文首先讨论基本分形编码，并从矢量量化(VQ)编码的观点叙述其算法。该算法是首先将图像分割成大小两类子块：Range 块和 Domain 块，其中 Range 块互不重叠，且覆盖整幅图像，Domain 块可以重叠，且边长为 Range 块的两倍，Domain 块经像素值平均收缩为 Range 块的大小，这种子块的全体就构成码本(记为 Ω)；然后每个 Range 块 R 由其最佳匹配块 $D\in\Omega$ 的亮度变换(对比度和亮度调整)来近似，即 $R\approx s\cdot D+o\cdot\mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 是亮度值均为 1 的常值块，s、o 分别是对比度和亮度调整因子，起调整 D 的对比度和亮度的作用。此外，为了改进图像质量，一般还要对 Domain 块进行 8 个等距变换(4 个旋转和 4 个反射)。

编码阶段，对于每个 Range 块 R，为了寻求其最佳匹配块 $D_m\in\Omega$，还需要求解下面的极小化问题：

$$\|R-(s\cdot D_m+o\cdot\mathbf{1})\|=\min_{\substack{s,o\in\mathbf{R};|s|<1\\ D\in\Omega}}\|R-(s\cdot D+o\cdot\mathbf{1})\| \tag{1}$$

其中，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\|\cdot\|$是向量 2-范数(即分量绝对值平方之和的平方根)，m、s 和 o 分别表示 R 的最佳匹配块的序号、该匹配块对比度和亮度的最优调整因子。此外，对比度因子要求满足约束 $|s|<1$ 是为了保证解码迭代序列收敛。三元组($m,\hat{s},\hat{o}$)称为 R 的分形码，其中 $\hat{s}$、$\hat{o}$ 是 s、o 的量化值。此外，如果考虑 8 个等距变换，则分形码中还应包括等距变换序号。这样全体 R 的分形码就组成原始图像的分形码，它描述了一个使图像近似不变的压缩仿射变换。

解码是相对简单的迭代过程，可按下面的方式进行(未考虑等距变换)：

$$R_i^{(k)}=s_i\cdot D_{m(i)}^{(k-1)}+o_i\cdot\mathbf{1},A^{(k)}=\bigcup_i R_i^{(k)} \tag{2}$$

其中，$R_i^{(k)}$ 是第 k 次迭代图像 $A^{(k)}$ 的第 i 个 Range 块，$D_{m(i)}^{(k-1)}$ 是源于第 $k-1$ 次迭代图像 $A^{(k-1)}$ 的码块($m(i)$是 $R_i^{(k)}$ 的最佳匹配码块的序号)。不难看出，分形解码中每次迭代图像所需要的码本都是由上一次迭代图像提供的，而第 1 次迭代图像所需要的码本则由初始图像提供。这是分形编码不同于 VQ 编码的地方。此外，迭代解码方式也是分形编码的新颖之处。

3　快速算法

在上面介绍的基本分形编码算法中，编码阶段的一个重要步骤是，对于每个 Range 块，必须求解极小化问题(式(1))。这是一个非常难于求解的问题，只能寻求次优解[2]。一般是把极小化问题(式

(1))分成如下两步进行：

(1) 固定 $D\in\Omega$，求最优参数 s 和 o：

$$\|R-(s\cdot D+o\cdot 1)\|=\min_{s,o,|s|<1}\|R-(s\cdot D+o\cdot 1)\| \tag{3}$$

(2) 设 s 和 o 是式(3)的解，求最佳匹配块的序号 m：

$$\|R-(s\cdot D_m+o\cdot 1)\|=\min_{D\in\Omega}\|R-(s\cdot D+o\cdot 1)\| \tag{4}$$

一种方法是忽略对 s 的约束 $|s|<1$，采用最小二乘法求解式(3)，然后把得到的两个参数 s、o 代入式(4)，用全搜索方法求解之。但是，用最小二乘法得到的参数 s 未必满足约束 $|s|<1$。一般对不满足约束的 s 采用截断方案。

另一种方法[3]是预设

$$s\in\{s_0,s_1,\cdots,s_{q-1}\},s_i\in[0,1],0\leqslant i\leqslant q-1 \tag{5}$$

并按下式计算参数 o：

$$o=\overline{R}-s\cdot\overline{D} \tag{6}$$

其中，$\overline{R}$、$\overline{D}$ 分别表示 R、D 的均值，接着用全搜索方法求解式(4)。顺便指出，Jacquin 考虑了码本 Ω 的分类，并对不同类的码块取不同的 s_i 和 q。

本文采用上述第2种方法。对这种方法的一些分析如下：首先，预设参数 s 满足式(5)是合理的，因为参数 s 必须要满足约束 $|s|<1$，才能保证变换的压缩性，同时为了提高压缩比，参数 s 必须量化(通常5比特)，此外，实验结果证明，把比特全部分配给正的 s 是合理的，这样做比把比特平均分配给正负 s 的质量要好(在相同比特下)；其次，尽管 Jacquin 没有说明为什么要按式(6)计算参数 o，但是，这样做是有理论根据的，因为预设参数 s 的取值范围(式(5))后，式(3)可以化为

$$\|R-(s_i\cdot D+o\cdot 1)\|=\min_{0\leqslant j\leqslant q-1}\left(\min_{o\in\mathbf{R}}\|R-(s_j\cdot D+o\cdot 1)\|\right) \tag{7}$$

注意到 $\|R-(s_j\cdot D+o\cdot 1)\|^2$ 是变量 o 的二次多项式(抛物线)，其最小值点可由式(6)求得。

式(4)的求解是许多快速算法关注的焦点，也是本文的论题。全搜索固然能够得到最好的编码质量，但需要较长的编码时间。为了满足实时性，必须缩短编码时间。一个减少编码时间的重要途径，就是在保持编码质量基本不变的前提下，尽量减少搜索量。多数快速分形编码文献都在这个方面做文章，本文也不例外。

先给出以下一个简单的不等式：

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|X-Y\|\geqslant\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|\right|,X,Y\in\mathbf{R}^n \tag{8}$$

其中，x_i 和 y_i 分别表示向量 X 和 Y 的第 i 个分量。

上述不等式的证明很简单，可由绝对值三角不等式和 Cauchy 不等式得到。下面是它的推导过程：

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}(|x_i|-|y_i|)\right| &\leqslant\sum_{i=1}^{n}\big||x_i|-|y_i|\big| \\ &\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \\ &\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}\times \\ &\quad\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right)^{1/2} \\ &=\sqrt{n}\|X-Y\|\end{aligned}$$

由此即可得到式(8)。

下面说明本文的快速算法是如何与这个不等式联系的。

对于 $s\in\{s_0,s_1,\cdots,s_{q-1}\}\subset[0,1]$ 参数 o 由式(6)计算，R 是图像分割后的 Range 块(设尺寸为 $B\times B$)，$D\in\Omega$，根据式(8)(记 $n=B\times B$)，则其均方根误差

$$\begin{aligned}E(R,D)&=\frac{1}{\sqrt{n}}\|R-(s\cdot D+o\cdot 1)\| \\ &=\frac{1}{\sqrt{n}}\|R-(s\cdot D+(\overline{R}-s\cdot\overline{D})\cdot 1)\| \\ &=\frac{1}{\sqrt{n}}\|(R-\overline{R}\cdot 1)-s\cdot(D-\overline{D}\cdot 1)\| \\ &\geqslant\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|r_i-\overline{R}|-s\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|d_i-\overline{D}|\right|\end{aligned}$$

其中，$\overline{R}$、$\overline{D}$ 分别表示 R、D 的均值。

本文记 $\bar{e}_X=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{X}|/n,X\in\mathbf{R}^n$ ($\overline{X}$ 表示 X 的均值)，并把 $\bar{e}_X$ 称为 X 的平均偏差，于是上式变成

$$E(R,D)\geqslant|\bar{e}_R-s\cdot\bar{e}_D| \tag{9}$$

式(9)表明，如果 D 是 R 的最佳匹配块，即均方根 $E(R,D)$ 小，那么式(9)表明，$\bar{e}_R$ 和 $s\cdot\bar{e}_D$ 接近。这说明图像块平均偏差接近是图像块在均方根意义接近的一个必要条件。然而反过来，$\bar{e}_R$ 和 $s\cdot\bar{e}_D$ 接近并不能得出均方根 $E(R,D)$ 小(当然，如果两者差别很大，则 $E(R,D)$ 绝对不会小)。由此可见，如果把匹配度量从均方根转化为平均偏差，那么从理论上说，对于每个 R，尽管这种方法得到的 D 块并不能保证是均方根意义下的最佳匹配块，但是这样的最佳匹配

块距离 D 块也不能太远(平均偏差意义下)，因此，为了提高编码质量，本文把码本 Ω 按平均偏差大小赋予序结构(升序)，然后在赋序码本 Ω 中，对 D 的 k 邻域进行搜索。此外，由于对图像块的 8 种等距变换不过是把图像块的像素进行重排，即只是改变其像素之间的相对位置，因此变换前后图像块的平均偏差保持不变。由这个事实可知，在赋序码本 Ω 中，每个码块与其等距变换版本是近邻。最后，编码器进行 8 个等距变换，以进一步改进图像质量。

基于上述分析，本文算法的具体步骤如下：

(1) 把待编码图像分割为 $B \times B$ 固定块，记为 $\boldsymbol{R}$。

(2) 以 τ 为步长，在待编码图像中从左到右、自上而下滑动一个 $2B \times 2B$ 窗口，以生成 Domain 块池。对于每个 Domain 块，可采用 4-邻域像素值平均来得到 $B \times B$ 块，这样的子块集合构成码本 Ω。

(3) 计算每个 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{D} \in \Omega$ 的平均偏差 $\bar{e}_{R}$ 和 $\bar{e}_{D}$，并按平均偏差 $\bar{e}_{D}$ 大小对码本 Ω 进行升序排列，设为 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \cdots, \boldsymbol{D}_N$，即 $\bar{e}_{D_i} \leq \bar{e}_{D_{i+1}}$，$N$ 是 Ω 中码块的数目。

(4) 对于每个 $\boldsymbol{R}$，按下面的步骤搜索最好逼近 $s \cdot \boldsymbol{D} + o \cdot \boldsymbol{1} \approx \boldsymbol{R}(\boldsymbol{D} \in \Omega, s \in \{s_0, s_1, \cdots, s_{q-1}\}$，其中，$o$ 由式(6)计算：

① 取不同的 s，按二分搜索法，在赋序码本 Ω 中寻找平均偏差意义下的最佳匹配块 $\boldsymbol{D}_l$(即 $|\bar{e}_{R} - s \cdot \bar{e}_{D_l}|$ 最小)。

② 在赋序码本 Ω 中，定义以 $\boldsymbol{D}_l$ 为中心的 k-邻域，在这个邻域中，并考虑每块的 8 种等距变换，选择与 $\boldsymbol{R}$ 有最小 $E(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{D})$ 的块 $\boldsymbol{D}_m$ 和等距变换序号 M。序号 m、M、参数 s 和 o 就组成 $\boldsymbol{R}$ 的分形码(m, M, $\hat{s}$, $\hat{o}$。其中，$\hat{s}$, $\hat{o}$ 是量化值。

(5) 对于其余 Range 块 $\boldsymbol{R}$，重复以上步骤直至所有 $\boldsymbol{R}$ 被编码完为止。

算法说明：为了独立显示本方案的效果，本文没有采用已提出的大量加快编码策略。当然，在本文算法的基础上，融入这些加快方案将可获得更快的编码速度。

4　实验结果

为了验证本文算法的编码效果，选择了 2 幅复杂性不同的测试图像(8 比特量化)，并用本文算法与对应的基本算法对它们进行测试。在实验中，本文选取 Range 块大小为 4×4，生成 Domain 块池的滑窗步长 τ 选取为 8，参数 o 按 7 比特量化。计算在赛扬 1G CPU、运行 Windows 98 的微机上进行。程序用 C++ 编写。测试编解码性能的参数是编码时间(源于系统时钟，单位：s)和峰值信噪比(PSNR，单位 dB)。

表 1、表 2 给出了基本算法与本文算法对所选测试图像进行测试的对比结果。从表中可以看出，如果邻域大小取 300，则本文算法快 2.06 倍(Lena)或 2.56 倍(cat)，峰值信噪比下降 0.13dB(Lena)或不变(cat)。本文还引述文献[6,7]算法的实验结果与其进行比较，以说明本文算法的效果：对于 Lena 图像，在峰值信噪比不变(仍然相对于基本分形算法)的情况下，按 4×4 方块分割，文献[6]算法加快 2.32 倍，文献[7]算法加快 0.56 倍。文献[6,7]算法对于其他图像亦有类似加快倍数。此外，本文算法理论分析简单，且实现容易，而文献[6,7]算法都需要复杂的理论分析，实现也很复杂。

表 1　256×256 Lena 测试图像的实验数据

	邻域大小 k			基本算法
	100	200	300	
PSNR (dB)	26.2	28.7	29.37	29.5
PSNR 下降(dB)	3.3	0.8	0.13	—
编码时间(s)	18.4	35.4	52.2	107.64
加快倍数	5.85	3.04	2.06	—

表 2　290×260 cat 测试图像的实验数据

	邻域大小 k				基本算法
	100	150	200	300	
PSNR (dB)	21.28	21.34	21.38	21.38	21.38
PSNR 下降(dB)	0.10	0.04	0	0	—
编码时间(s)	20.6	30.3	39.7	58.2	148.9
加快倍数	7.23	4.91	3.75	2.56	—

图 1、图 2 给出基本算法和本文算法($k=100$)的解码图对比，此时 Lena 图像的编码速度提升约 6 倍，cat 图像的编码速度提升 7 倍多。由图 1、图 2 可见，Lena 图像的肩膀边缘处虽有少量失真，但其余部分几乎无差别，cat 图像的主观质量几乎无差别(人眼基本无法觉察 0.10dB 的质量降低)。

(a) 基本算法　　(b) 本文算法($k=100$)

图 1　基本算法与本文算法的 Lena 解码图像

（a）基本算法 （b）本文算法(k=100)

图 2 基本算法与本文算法的 cat 解码图像

综上所述，综合考虑主客观质量和编码复杂性，本文的方法的确为加快分形编码提供了一个候选方法。

5 结 论

本文基于一个联系均方根和平均偏差的不等式，提出了一种有损快速分形编码算法，由于该算法把耗时的 Range 块与码本块的匹配问题转化为平均偏差意义下的最近邻问题，因此编码速度加快。实验表明，本文算法的编码速度得到显著提高，但对于某些图像的主观质量稍有下降，其主要原因可能是按照本文快速算法搜索到的平均偏差意义下的最佳码本块有少数不是均方根意义下的最佳匹配。

参 考 文 献

1 Barnsley M F. Fractals everywhere[M]. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1988.

2 Wohlberg B, Jager G. A review of the fractal image coding literature[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, **8**(12):1716～1729.

3 Jacquin A E. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, **1**(1): 18～30.

4 Lai C M, Lam K M, Siu W C. A fast fractal image coding based on kick-out and zero contrast conditions[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, **12**(11): 1398～1403.

5 He C, Yang S X, Huang X. Variance-based accelerating scheme for fractal image encoding[J]. IEE Electronics Letters. 2004, **40**(2): 115～116.

6 Jeng J H, Truong T K, Sheu J R. Fast fractal image compression using the Hadamard transform[J]. IEE Proceedings-Vision Image Signal Processing, 2000, **147**(6): 571～573.

7 Hartenstein H, Saupe D. Lossless acceleration of fractal image encoding via the fast Fourier transform[J]. Signal Processing: Image Communication, 2000, **16**(4): 383～394.

何传江 1964 年生，1985 年、1988 年先后获得四川大学数学专业学士、硕士学位，2004 年获得重庆大学自动化学院控制理论与控制工程专业博士学位。现为重庆大学数理学院副教授。主要从事分形和图像处理等研究。

E-mail:chuanjianghe@sina.com

蒋海军 1975 年生，1998 年获得中国矿业大学工学学士学位。现为重庆大学自动化学院 2001 级硕士研究生。主要从事分形编码和图像处理等研究。

黄席樾 1943 年生，1967 年毕业于四川大学无线电系，1987 年获得日本东北大学博士学位。现为重庆大学自动化学院教授，博士生导师。主要从事为智能控制、机器视觉等研究。