

# 有关正六边形点阵结构数字图像的研究

陆系群 陈 纯

(浙江大学玉泉校区计算机学院, 杭州 310027)

**摘 要** 传统连续图像信号的采样过程采用的是矩形点阵结构。当连续图像信号的频带处于一个圆形区域之内时,正六边形点阵结构的采样密度比矩形点阵结构的采样密度要降低 13.4%。但目前图像输入输出设备只支持矩形点阵结构的数字图像,所以首先讨论了满足 Nyquist 采样定理的正六边形点阵结构的采样矩阵(空间采样间隔),及矩形点阵结构数字图像和正六边形点阵结构数字图像之间的转换。另一方面由于正六边形点阵结构的数字图像是不可分离信号,这给图像处理造成许多的不便。为此提出了一种基于可分离滤波器阵列的图像分解方法,降低了计算复杂度,得到类似矩形图像小波变换所得的多尺度分解结构,并给出重构图像的实验结果。

**关键词** 正六边形点阵结构 矩形点阵结构 可分离滤波器阵列 多分辨率分解

中图分类号:TN919.8 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2004)06-0722-07

## Research on Hexagonal Sampled Digital Images

LU Xi-qun, CHEN Chun

(School of Computer Science, Yu Quan Campus, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** Traditionally, the most commonly used sampling lattice in image processing systems is the rectangular sampling lattice. However, when the signal is a circularly band-limited, the minimum sampling density for a hexagonal sampling lattice is 13.4% less than that for a rectangular sampling lattice. This result is one of the most attractive reasons for considering the hexagonal sampling lattice as an alternative to the rectangular lattice. Almost all the input/output devices only support the rectangular sampled digital images, so the transformation between the hexagonal sampling lattice and the rectangular sampling lattice is discussed in this paper, and the hexagonal sampling matrix satisfied Nyquist Sampling Theorem is given. Moreover hexagonal sampled digital images are non-separable signals. It is difficult to process a non-separable signal directly. In this paper, a multiresolution decomposition of hexagonal sampled images based on a separable filter bank is proposed. A multi-scale decomposition structure is obtained with low computation complexity, and the reconstructed image is presented.

**Keywords** hexagonal sampling lattice, rectangular sampling lattice, separable filter banks, multiresolution decomposition

## 1 引 言

在图像采样过程中有许多周期采样方式,而最常见的采样网格是矩形点阵结构。矩形点阵结构的两大优点是简单和可分离性即可以将一维信号处理技术直接推广到二维图像信号处理过程中;图像的行和列可以作为一维信号分别处理,降低图像处理

的计算复杂度。但是这种采样方式并不一定能精确刻画图像的内部结构和人眼视觉系统的特征。

生物医学的研究<sup>[1]</sup>表明在人眼视觉神经系统中的杆状视觉神经细胞和锥状视觉神经细胞在视网膜上的排列是成正六边形结构,而不是矩形点阵结构。而当图像信号的频带处于一个圆形区域之内时,正六边形点阵结构是最有效的采样网格。在这种情况下,文献<sup>[2]</sup>证明了正六边形点阵结构的最小采样密

度比矩形点阵结构的最小采样密度要少 13.4%。与矩形点阵结构相比,正六边形点阵结构有其他一些优点,如各个像素点之间的连通性比矩形点阵结构要好,在正六边形点阵结构中有 12 个对称轴,而矩形点阵结构中只有 4 个方向的对称性,如果是方形点阵结构则有 8 个对称轴。

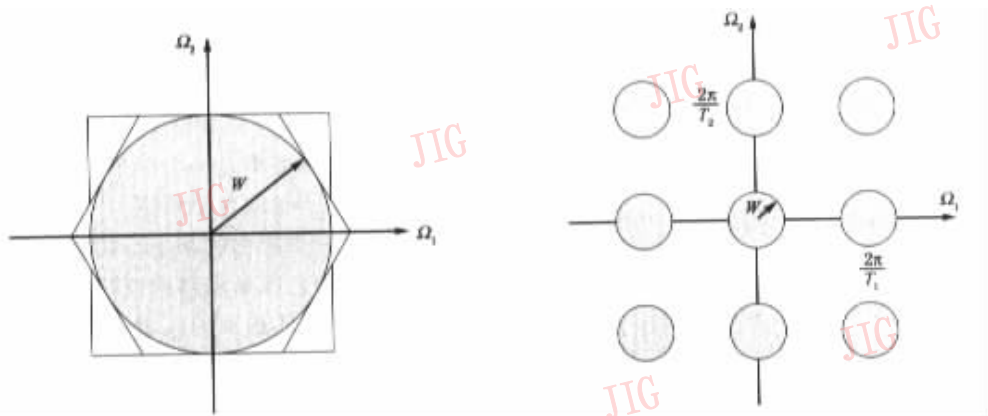
对于矩形点阵结构的数字图像,其采样矩阵是对角矩阵。许多一维信号处理算法可以直接对图像的行和列分别进行处理。然而正六边形点阵结构的数字图像是不可分离信号,有 3 个主要方向,所以不能简单地将一维信号处理算法直接推广到正六边形点阵结构的数字图像上。

由于目前所有的图像输入输出设备只支持矩形点阵结构的数字图像,因此针对正六边形点阵结构数字图像的特点,首先论述了二维信号空间采样的基本特点和性质,给出了正六边形点阵结构的采样矩阵(也就是广义的采样间隔),并讨论矩形点阵结构数字图像和正六边形点阵结构数字图像之间的转换;其次针对正六边形点阵结构数字图像是不可分

离的二维信号,提出了一种新的广义可分离概念,和由一维原型滤波器来设计多维不可分离滤波器的理念;运用上述方法,针对基于正六边形点阵结构数字图像有 3 个主要方向,设计了 4 个可分离的二维滤波器,分别作用于正六边形点阵结构数字图像上,得到类似矩形点阵结构数字图像的多尺度分解结果和重构图像。

## 2 正六边形采样点阵结构

假设二维连续图像信号傅里叶变换的结果如图 1(a)中阴影部分所示,即信号的频带处于频域中一个半径为  $W$  的圆形区域内。这幅连续带限图像经过一个矩形点阵采样网格后信号的频谱如图 1(b)所示,水平方向的采样间隔为  $T_1$ ,垂直方向的采样间隔为  $T_2$ 。这里的采样间隔满足 Nyquist 采样定理,即  $T_1 \leq \frac{2\pi}{2W}, T_2 \leq \frac{2\pi}{2W}$ ,因为图像在水平方向和垂直方向的最大截止频率为  $W$ 。



(a) 原连续信号的频谱

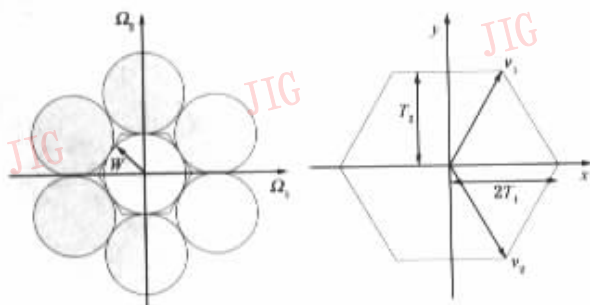
(b) 采样后信号的频谱

图 1 连续带限信号经过矩形点阵采样网格后的频谱

采样后信号的频谱在频域空间的排列方式由采样矩阵决定,而矩形网格的采样矩阵为对角矩阵

$$V = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{W} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{W} \end{bmatrix} \quad (1)$$

从图 1(a)中可以看出圆外接的正六边形所占的空间面积比圆外接的正方形所占的空间面积要小,而上述连续图像信号经过一个满足 Nyquist 采样定理的正六边形点阵采样网格后信号的频谱如图 2(a)所示,可以看到采样后信号的频谱在频域空间的排



(a) 采样后信号的频谱

(b) 空间采样 2 个方向向量

图 2 连续信号经过正六边形采样网格后的频谱及空间采样方向矢量示意图

列方式比经过矩形点阵采样网格的信号频谱在频域上排列方式要紧密得多。这时空间采样间隔由 2 个方向矢量  $v_1, v_2$  决定,如图 2(b)所示。这时采样矩阵  $V$  由 2 个方向矢量  $v_1, v_2$  组成

$$V = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} T_1 & T_1 \\ T_2 & -T_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

图 2 中由于采样网格的点阵成正六边形,所以存在关系  $T_2 = \sqrt{3} T_1$ 。由于连续信号的频谱处于一个半径为  $W$  的圆形区域内,为了满足 Nyquist 采样定理,即  $T_2 \leq \frac{\pi}{W}$ ,正六边形点阵的采样矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{W\sqrt{3}} & \frac{\pi}{W\sqrt{3}} \\ \frac{\pi}{W} & -\frac{\pi}{W} \end{bmatrix} \quad (3)$$

采样密度为采样矩阵行列式的倒数,所以比较式(1)、(3)就可以证明采用正六边形点阵结构的最小采样密度比矩形点阵结构的最小采样密度要降低 13.4%。

文献[2]中指出,任意一种二维采样网格,其采样矩阵并不是唯一的。这里采用的正六边形点阵结构的采样矩阵,其一般形式如下:

$$V = \alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}p \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $\alpha$  是任意的尺度参数,与采样密度有关;  $\theta$  是空间旋转角度,  $p = \pm 1$ 。  $p = 1$  时, 2 个采样方向之间成钝角;而  $p = -1$  时, 2 个采样方向之间成锐角。

因为目前图像的输入/输出设备只支持矩形点阵结构的数字图像,为了研究方便,通过对一幅标准数字图像进行重采样得到所需的正六边形点阵结构的数字图像,而不改变原有图像的采样密度。根据式(4),得到正六边形点阵结构的采样密度为

$$\sigma(V) = \frac{1}{|\det V|} = \frac{2}{\alpha^2 \sqrt{3}} \quad (5)$$

为了使正六边形点阵结构的采样密度与矩形点阵结构的采样密度保持一致,而只是像素点的空间排列方式发生变化,式(5)中  $\alpha$  必须等于  $(\frac{2}{\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}}$ ,这样

正六边形点阵结构的采样密度  $\sigma(V)$  等于 1,也就是说变换前后的采样密度保持不变,而只是像素点的空间排列方式发生变化,这样的采样网格被称为归一化网格。标准数字图像 Lena 经过正六边形点阵网格重新采样后的结果如图 3 所示。Lena 帽子边缘的局部放大区域如图 4 所示,从图 4 中可以看出像素点的空间排列方式呈正六边形,每个像素都有 6 个离它距离一样的相邻像素点。当数字图像在 2 种采样网格之间转化时会出现图像边缘信息丢失的现象,这一点在重构图像中会较明显看出。

一幅矩形点阵结构的图像可以用二维数组来存储,但怎样有效存储如图 3 所示的正六边形点阵结构的数字图像并不是一个简单的问题。文献[3]中提出了一些基于行的存储策略。

文献[3]中提出的基于行的移位存储策略,如图 5 所示。将白色像素点移到该行相应的位置上,从而形成一个平行四边形的区域。考虑一个  $N_1 \times N_1$  阵列,假设  $(r_1, r_2)$  是基于行存储阵列中像素点的索引,  $(n_1, n_2)$  是矩形图像二维空间的索引,这 2 个坐标系

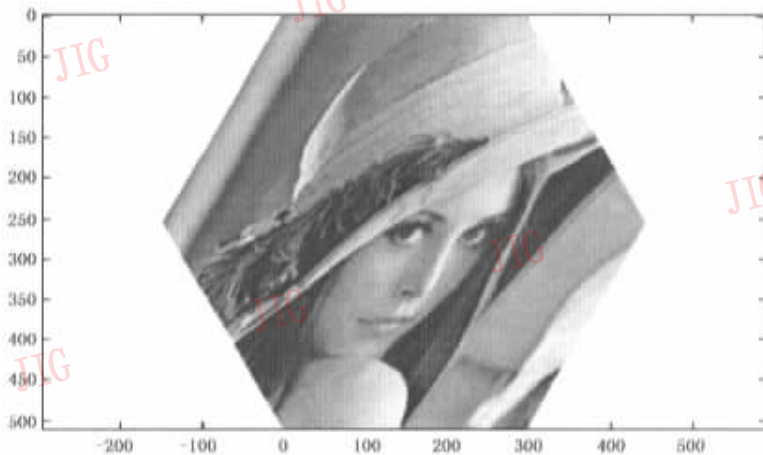


图 3 正六边形点阵结构的数字图像 Lena

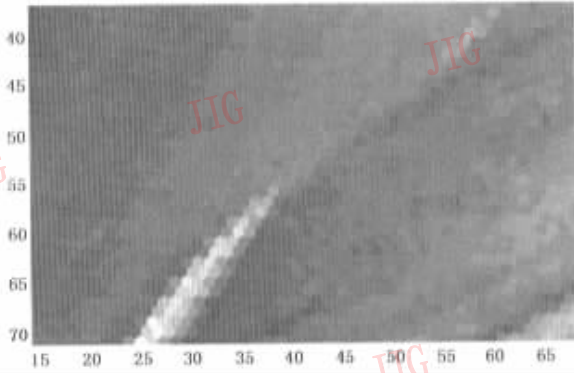


图 4 正六边形点阵结构数字图像 Lena 局部放大图

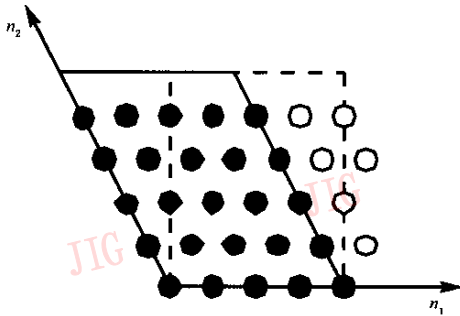


图 5 基于行位移的存储策略

之间的转化由下式表示:

$$\begin{cases} n_1 = ((r_1 + p \lfloor \frac{r_2 + \frac{p+s}{2}}{2} \rfloor))_{N_1} \\ n_2 = r_2 \\ r_1 = ((n_1 - p \lfloor \frac{n_2 + \frac{p+s}{2}}{2} \rfloor))_{N_1} \\ r_2 = n_2 \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $p=1$  和  $p=-1$  分别表示 2 个采样方向是成钝角或锐角; 变量  $s$  表示图像中第 2 行的空间移位方向,  $s=1$ , 表示向右移位, 而  $s=-1$ , 表示向左移位。这种存储方式的优点是可以将一维滤波过程直接作用于正六边形点阵结构的图像上。可以将图 5 中所示的平行四边形区域看成是矩形点阵结构图像另一种特殊的区域表示方式。

### 3 广义可分离滤波器

由于设计不可分离滤波器阵列比设计可分离滤波器阵列要复杂很多, 一些学者提出首先设计一个一维原型滤波器, 然后通过特殊调制方式得到不可

分离的滤波器或滤波器阵列。文献[4]中提出的方法和文献[5]、[6]、[7]中提出的方法, 其不同之处在于: 一个具有任意平行六面体带通区域的多维滤波器的设计可以由一个一维原型滤波器开始, 然后通过一个简单的调制变换得到。因此设计多维滤波器的计算复杂度与滤波器的维数呈线性关系, 同时有关滤波器的一些重要性质, 如 Nyquist 限制条件、零相位、稳定条件等通过这种设计方法就可以简单实现, 具体证明请参见文献[4]。一个通带区域为任意平行四边形的多维滤波器具体设计如下:

(1) 给定一个采样矩阵  $M$ , 首先设计截止频率为  $\pi/|\det M|$  的一维低通原型滤波器  $p[n]$ ;

(2) 定义一个多维可分离滤波器  $h_s[n]$ , 它的冲激响应为  $h_s[n] = p[n_0]p[n_1] \cdots p[n_{D-1}]$ , 其中  $D$  为滤波器的维数。

(3)  $h[n] = c_0 h_s[\hat{M}n]$ , 其中,  $\hat{M} = |\det M| \cdot M^{-1}$ ,  $c_0$  是一个尺度参数。得到的滤波器  $h[n]$  是一个低通滤波器, 带通范围为:  $\omega = \pi M^{-T}x, x \in [-1 \ 1]^D$ 。

文献[3]中提出了一个广义可分离概念, 即一个多维滤波器的冲激响应为

$$h_{gs}[n] = \sum_k r_s[k] \delta[n - Sk] \quad (7)$$

其中,  $r_s[n] = p_1[n_1]p_2[n_2] \cdots p_m[n_m]$ ,  $\delta[\cdot]$  是多维信号空间的 Dirac 函数, 方向矢量  $s_1, s_2, \cdots, s_m$  组成一个方向矩阵  $S = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_m]$ , 方向矩阵  $S$  的维数为  $D \times m$ ,  $m$  是  $r_s[n]$  中可分离一维滤波器的个数; 所有索引组成矢量  $k = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_m]^T$ 。通过这种方法设计的滤波器具有广义可分离性, 因为  $r_s[n]$  是由一些可分离的一维滤波器  $p_i[n_i] (1 \leq i \leq m)$  乘积得到。

该滤波器的频域响应(即傅里叶变换)为

$$H_{gs}(\omega) = \sum_n \left[ \sum_k r_s[k] \delta[n - Sk] \right] e^{-j\omega^T n} \quad (8)$$

$$= \sum_k r_s[k] e^{-j\omega^T Sk} \quad (9)$$

$$= P_1(s_1^T \omega) P_2(s_2^T \omega) \cdots P_m(s_m^T \omega) \quad (10)$$

其中,  $P_i(\omega)$  是一维原型滤波器  $p_i[n]$  的频域响应。

当一个一维滤波器  $p[n]$  分别作用于正六边形点阵数字图像的 3 个主要方向(如图 6 所示), 该系统的频域响应为

$$\begin{aligned} H_s(\omega) &= P(s_1 \omega) P(s_2 \omega) P(s_3 \omega) \\ &= P(\omega_1) P(\omega_2) P(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, 方向矩阵为  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。其中  $P(\omega)$  是滤波

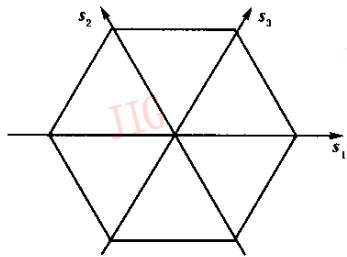


图 6 正六边形点阵结构图像中的 3 个主要方向

器  $p[n]$  的频域响应。

如果每个一维滤波器  $p_i[n_i]$  具有零相位, 即  $p_i[n_i] = p_i^*[-n_i]$ , 则可分离滤波器也具有零相位特性, 即  $r_s[n] = r_s^*[-n]$ , 同理多维滤波器  $h_{gs}[n]$  也具有零相位特征。

如果每个一维滤波器  $p_i[n_i]$  具有 Nyquist 性质, 即对所有  $n_i \neq 0$ ,  $p_i[|\det M|n_i] = 0$ , 这里  $|\det M|$  为一维情况下的采样间隔, 则对所有  $n \neq 0$ ,  $r_s[|\det M|n] = 0$ , 这里  $M$  为多维采样矩阵, 所以可分离滤波器  $r_s[n]$  也具有 Nyquist 性质。从式 (7) 可以简单推出  $h_{gs}[Mn]$  也满足 Nyquist 性质。

在实验中根据式 (4) 采样矩阵, 首先设计一个一维低通滤波器  $l(n)$  满足上述条件, 然后通过调制低通滤波器, 得到相应的高通滤波器  $h(n) = (-1)^n l(n)$ 。将这种传统两通道线性相位完全重构滤波器阵列分别作用于正六边形的图像 3 个方向, 得到一个低频子带和 3 个不同方向的高频子带。

## 4 正六边形点阵结构数字图像的多尺度分解

图像多尺度分解是图像处理技术中一种重要手段。常用的正交变换——正交镜像滤波器阵列由 Croisier 等人提出<sup>[8]</sup>。高通滤波器由低通滤波器调制得到, 这种滤波器阵列具有完全重构的性质。Woods 和 Neil 首次将可分离滤波器阵列用于图像压缩中<sup>[9]</sup>。在矩形点阵结构的数字图像中, 分析滤波器可以分别对图像的行和列分别进行滤波, 输入图像的频谱被分割成低通频谱部分、水平方向高频成份、垂直方向高频成份和对角线高频成份。

由于正六边形点阵结构的图像有 3 个方向, 且这 3 个方向之间存在相关性。图像的频谱可一次被分割成如图 7 所示的 4 个频带, 即一个低通频带、3 个具有不同方向的高通频带。低通频带还可以进一

步被分割成一个低通频带和 3 个高通频带, 形成一个类似树形结构多尺度表示方式。

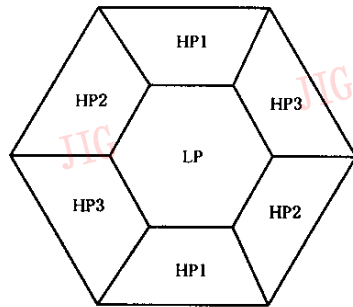


图 7 正六边形点阵结构的图像频谱一级分割结果

假设图像的频谱处于一个正六边形外接的圆形区域内, 因为正六边形点阵结构的数字图像可以用平行四边形的区域来存储(见图 5), 是广义可分离信号的一种特殊方式, 所以可以考虑用完全重构的两通道可分离滤波器阵列作用于该图像平行四边形区域。

虽然正六边形点阵结构的图像中有 3 个主要方向, 但它们之间存在相关性。当低通滤波器同时作用于 3 个方向时, 可以得到如图 7 所示的低频成份; 而当低通滤波器作用于其中一个方向, 而高通滤波器作用于另外 2 个方向时, 得到图 7 所示 3 个具有不同方向的高频成份。如果对中间低频成份进一步分解, 则可以得到类似矩形点阵数字图像小波变换的多尺度分解结果。如果直接采用正六边形的点阵结构, 显示会有一些困难, 所以采用基于行的存储方式, 来显示正六边形点阵结构数字图像 3 级多尺度分解的结果, 如图 8 所示。而第 1 级分解所得的 4 个频带如图 9 所示。

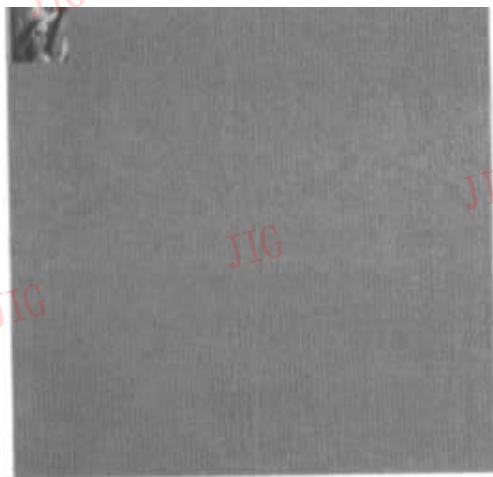
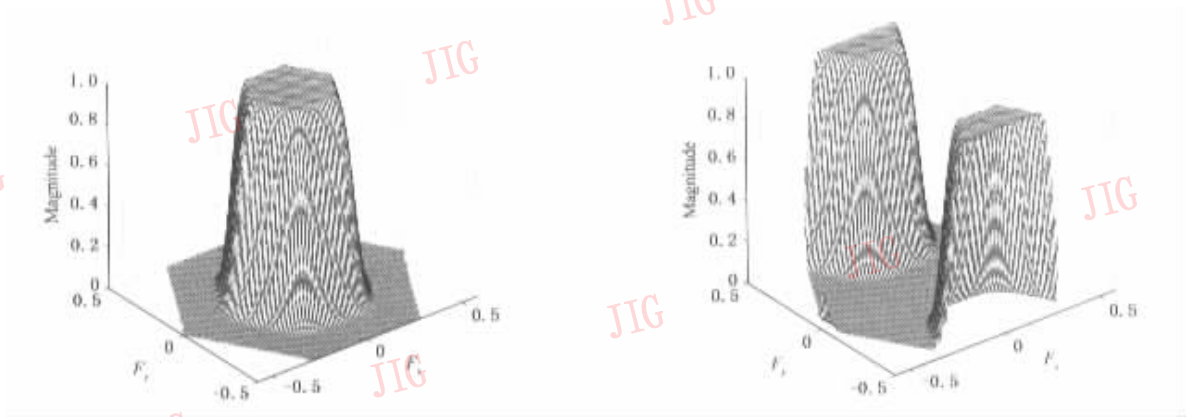
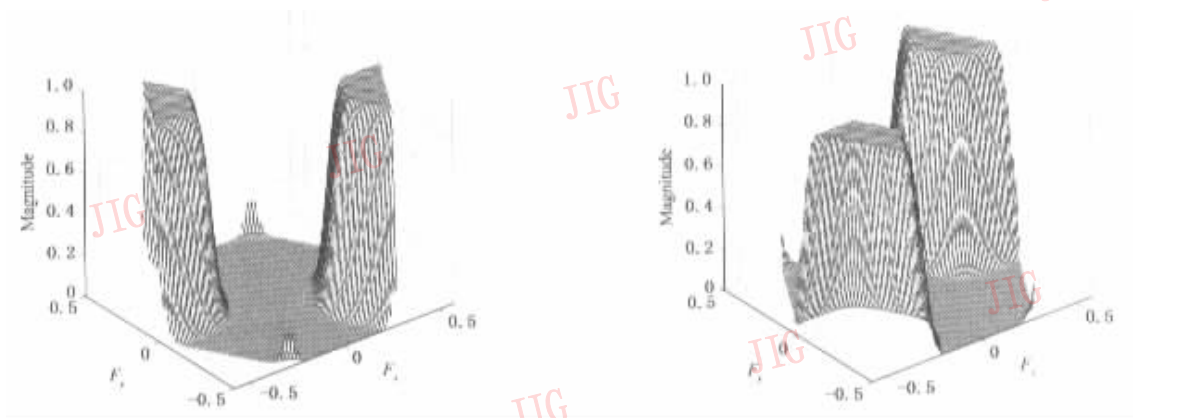


图 8 可分离滤波器阵列对正六边形点阵结构数字图像 Lena 进行多尺度分解的结果



(a) 低频通带

(b) HP1 高频通带



(c) HP2 高频通带

(d) HP3 高频通带

图 9 一级分解得到的 4 个频带

最后通过上述两通道可分离滤波器阵列中的综合滤波器作用于图 8 所示的多尺度分解结果,再转换到矩形点阵结构,得到重构图像,如图 10 所示。可

以看到由于图像在 2 种采样网格之间的转换会出现图像边缘信息丢失的现象,其实这一点在图 3 中也可以看出,图像的一些边缘信息已丢失,因此完全重构原始图像是不可能的,重构图像的尺寸会比原始尺寸小。

### 5 结 论

由于基于正六边形点阵结构的数字图像比一般矩形点阵结构的数字图像的采样率要节省 13.4%<sup>[2]</sup>,因此本文讨论矩形点阵结构的数字图像和正六边形点阵结构的数字图像之间的转换关系。另一方面由于正六边形点阵结构的数字图像是不可分离信号,这给图像处理造成许多的不便。因此采用文献[7]中提出的基于行移位的存储方式来存储正六边形点阵结构的数字图像,这种存储格式可以看



图 10 重构的矩形点阵结构图像

成是矩形点阵结构数字图像的一种特殊表现形式。这种存储方式可以简化图像处理过程,用可分离的滤波器阵列可以得到类似于矩形点阵图像小波变换的多尺度分解结果。

本文只是对正六边形点阵结构的数字图像做了一个粗浅的研究,还有许多问题有待深入研究,如针对正六边形点阵结构数字图像的特点,设计完全重构造的不可分离的滤波器或滤波器阵列;利用正六边形点阵结构数字图像的优点来改进现有图像的压缩技术等。当然这些研究是否能实际应用还有待于图像输入输出硬件设备的改进和提高。

**致谢** 本论文中的主要内容是作者在美国佐治亚理工学院信号与图像研究中心做访问学者的研究成果。在此对在研究过程提供有益指导和相关资料的 Jordan 博士和 Mersereau 教授表示感谢。

### 参 考 文 献

- Hubel D H. Eye, Brain and Vision[M]. New York: Scientific American Books, 1988.
- Dudgeon D E, Mersereau R M. Multidimensional Digital Signal Processing[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, New Jersey, USA, 1984.
- Rosenthal J. Filters and Filter Banks for Hexagonal Sampled Signals[D]. USA: Georgia Institute of Technology, 2001.
- Chen T, Vaidyanathan P P. Multidimensional multirate filters and filter banks derived from one-dimensional filters [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(5): 1749~1765.

- Bamberger R H, Smith M J T. A filter bank for the directional decomposition of images: theory and design [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(4): 882~893.
- Shah I A, Kalker A A C. Theory and design of multidimensional QMF sub-band filters from 1-D filters and polynomials using transforms [J]. IEE Proceedings on Communications, Speech and Vision, 1993, 140(1): 67~71.
- Shapiro J M. Adaptive McClellan transformations for quincunx filter banks [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 42(3): 642~648.
- Croisier A, Esteban D, Galand C. Perfect channel splitting by use of interpolation/decimation/tree decomposition techniques [A]. International Conference on Information Sciences and Systems[C], Patras, Greece, 1976: 443~446.
- Woods J W, O'Neil S D. Subband coding of images [J]. IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, 1986, 34(5): 1278~1288.



**陆系群** 1969年生,副教授。1997年毕业于华南理工大学无线电研究所毕业,获工学博士学位。主要研究方向是图像子带编码和滤波器阵列设计等。目前正从事图像信号处理、数字艺术技术、多媒体信息安全传输等研究和开发工作。



**陈纯** 1955年生,教授,博士生导师。1990年获浙江大学计算机应用专业博士学位。长期从事计算机图形图像处理、协同设计和移动数据库等领域的教学和科研工作。近年来,承担了国家自然科学基金、国家和省部委攻关等科研项目20余项,发表学术论文100多篇。