

基于小波域局部高斯模型的图像超分辨率

汪雪林 文伟 彭思龙

(中国科学院自动化研究所集成电路中心, 北京 100080)

摘要 提出了一种基于小波域局部高斯模型的图像超分辨率算法。小波域局部高斯模型采用单一的高斯函数刻画子带系数的局部概率分布, 由于该模型具有很好的局部自适应性, 可以较好地反映图像的局部结构信息, 因此以此作为自然图像的先验模型, 将图像超分辨率问题转化为小波域约束优化问题, 并用共轭梯度法对其进行求解。实验结果表明, 基于小波域局部高斯模型的图像超分辨率算法较好地再现了图像的各种边缘信息, 重构出的高分辨率图像在信噪比和视觉效果方面都有较明显的提高。

关键词 图像超分辨率 小波变换 局部高斯模型 共轭梯度法

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)08-0941-06

Image Super Resolution Based on Wavelet-domain Local Gaussian Model

WANG Xue-lin, WEN Wei, PENG Si-long

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract An image super-resolution algorithm based on wavelet-domain local gaussian model is proposed. Wavelet-domain local gaussian model approximates the local probability distribution of the wavelet coefficients with a single gaussian function. Because the model adaptively characterizes the local statistics of real-world images, the algorithm presented in this paper specifies the prior distribution of the real-world image through it and converts the image super-resolution problem to a constrained optimization one which can be solved with the conjugate gradient method. Experimental results show that the algorithm properly retrieves various kinds of edges and the PNSR and subjective visual effect of the reconstructed images are improved significantly.

Keywords image superresolution, wavelets, local gaussian model, conjugate gradient method

1 引言

由于物理条件的限制, 往往只能得到低分辨率 (low resolution, LR) 图像。而对于高清晰度数字电视、国防军事、太空探索、遥感以及医学影像等多方面的应用, 获得高分辨率 (high resolution, HR) 图像具有重要意义。图像超分辨率就是由一幅或多幅 LR 图像获取一幅 HR 图像的过程, 这是一个典型的病态 (ill-posed) 问题。解决该问题的经典方法是通过适当地引入关于 HR 图像的先验知识将其规整化, 其关键在于有效地保持图像边缘。为解决这一问题, 做了大量的研究工作。以具有一定边缘保持作用的 Huber-Markov 随机场作为 HR 图像的先验模

型, 提出的单幅和多幅图像超分辨率的 Bayesian 框架^[1,2]; 以 Gibbs 分布作为 HR 图像的先验模型^[3], 利用最大后验 (MAP) 方法, 同时进行对准参数和高分辨率图像估计; 在最大似然 (ML), MAP 和凸集投影 (POCS) 等优化方法的基础上提出的一种混合图像超分辨率优化算法^[4]。实际上, 包括线性插值和三次样条插值在内的各种插值算法同样属于规整化方法。例如, 假定 HR 图像具有分片线性结构就得到线性插值算法。最近, Li 等人利用 HR 图像和 LR 图像之间的局部相关性提出了一种新的边缘指导插值算法^[5]; Battiato 等人提出了一种根据 LR 图像的局部边缘结构自适应选择插值格式的空间自适应插值算法^[6]。尽管这些算法都在某种意义上提高了图像的分辨率, 但它们并没有有效解决边缘模糊问题。

Baker 等人分析了超分辨率问题的可能性并提出了一种基于识别的超分辨率算法^[7,8]。赵书斌等人以混合高斯模型逼近小波系数的分布,并引入小波域隐马尔可夫树模型作为自然图像的先验模型对图像超分辨率问题进行规整化,取得了不错的效果^[9],但该方法存在着计算量大的缺点。

本文从图像超分辨率的 Bayesian 方法出发,提出一种基于小波域局部高斯模型的单幅图像超分辨率算法。虽然自然图像小波分解后各子带系数在整体上服从广义高斯分布^[10],但通过实验发现在各子带的局部区域,小波系数的统计特性可以通过高斯函数很好地加以描述,因此本文算法以这种小波域局部高斯模型作为 HR 图像的先验模型并把图像超分辨率问题转化为一个约束优化问题,最后用共轭梯度法对其进行求解。

2 图像超分辨率问题的规整化

对于图像 f , 点 (i, j) ($1 \leq i, j \leq rN$) 处的灰度用 $f(i, j)$ 表示。图像超分辨率的目标是从观测到的 LR 图像 g 中估计原始 HR 图像 f 。 g 和 f 之间的关系用数学模型表述为

$$g = DCf + \eta \quad (1)$$

其中, g, f 和 η 分别表示按行或按列重新排列而成的 LR 图像、HR 图像和噪声。矩阵 C 代表线性模糊算子, D 代表已知的抽样算子。 f, C, D, g, η 的维数分别为 $r^2N^2 \times 1, r^2N^2 \times r^2N^2, N^2 \times r^2N^2, N^2 \times 1, N^2 \times 1, r$ 为采样率。 C 假定已知并且是病态的。通过在式(1)中适当增加关于 f 的先验信息,可以得到关于原始 HR 图像的唯一并且稳定的估计 \hat{f} 。这就是图像超分辨率问题的规整化。

为了下面叙述与推导的方便,将 DC 合写为 $N^2 \times r^2N^2$ 维矩阵 H , 则式(1)改写为

$$g = Hf + \eta \quad (2)$$

在 Bayesian 图像超分辨率方法中,关于 f 的先验知识是通过指定其先验概率来确定的。在这里假定式(2)中的噪声为线性可加的高斯白噪声,则关于 g 的条件概率为

$$p(g|f) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N^2/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \|g - Hf\|_2^2\right\} \quad (3)$$

其中, N^2 是图像 g 的像素数目, σ^2 为噪声方差。如果关于 f 的先验分布有如下形式

$$p(f|\beta, \theta) \propto \exp(-\beta\Phi(f, \theta))$$

其中, 函数 $\Phi(f, \theta)$ 在贝叶斯估计中称为图像 f 的能量函数, θ 是可能的未知参数向量, β 为规整化参数, 是式(4)中两项的权衡因子。则根据贝叶斯公式, 原始 HR 图像 f 的 MAP 估计 \hat{f} 可以通过最小化下式得到^[11]:

$$L(f, \beta, \theta) = \frac{1}{2\sigma^2} \|g - Hf\|_2^2 + \beta\Phi(f, \theta) \quad (4)$$

3 图像超分辨率问题的小波域描述

对式(2)两边进行正交小波变换, 可得超分辨率问题的小波域描述如下:

$$\begin{aligned} W_g g &= (W_g H W_f^T) W_f f + W_g \eta \\ \tilde{g} &= \tilde{H} \tilde{f} + \tilde{\eta} \end{aligned} \quad (5)$$

其中, W_g 和 W_f 分别为 g 和 f 的二维小波变换矩阵, \tilde{g}, \tilde{f} 和 $\tilde{\eta}$ 分别为小波变换后观测图像、原始图像和噪声的尺度和小波系数向量, 且 $\tilde{g} = W_g g, \tilde{f} = W_f f, \tilde{\eta} = W_g \eta$ 。 \tilde{H} 为 H 的小波域表示, 即 $\tilde{H} = W_g H W_f^T$, 这里只考虑正交小波变换, 因而 $W_g^T W_g = I_{N^2 \times N^2}, W_f^T W_f = I_{r^2N^2 \times r^2N^2}$, 并且 $\tilde{\eta}$ 仍为零均值的高斯白噪声, 方差为 σ^2 。

4 小波域局部高斯模型

对于自然图像, 在进行小波分解后, 各子带系数总体上服从广义高斯分布^[10]。Belge 等人以此作为图像的先验概率模型对小波域复原问题进行规整化^[12], 取得了一定的效果。但这是一种全局概率模型, 不具有局部自适应能力。赵书斌等人以混合高斯模型逼近广义高斯分布, 并引入小波域的隐马尔可夫树模型作为自然图像的先验模型对图像超分辨率问题进行规整化^[9], 取得了不错的效果, 但该方法存在着计算量大的缺点。通过实验发现, 对于一般的自然图像, 在局部区域, 小波系数的分布函数可以利用单一的高斯函数很好地逼近, 这可以通过图 1 形象地加以说明。在图 1 所示的分布函数曲线中, 实线为子带局部区域小波系数的统计直方图, 虚线所示为以子带局部区域小波系数的均值和方差为参数的高斯函数曲线。从图中可以看出, 两条曲线吻合得很好。可以将这种单一的局部高斯模型看作混合高斯模型的一种简化。根据混合高斯模型^[13]的定义, 在已知第 i 个小波系数状态概率的情况下, 其值为 w_i 的概率密度为

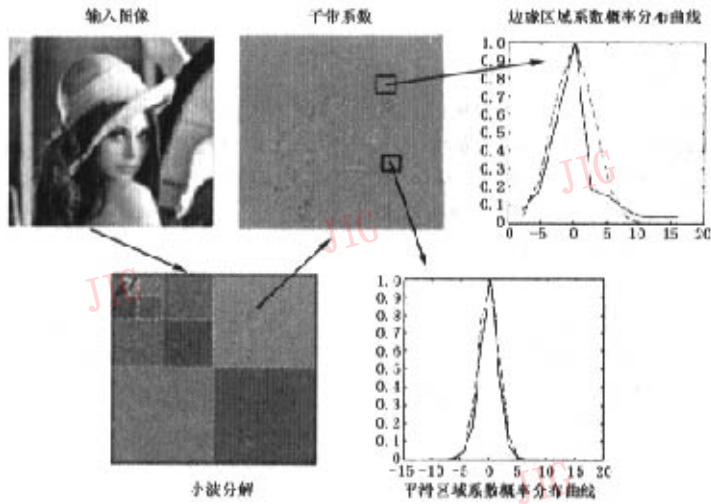


图 1 图像的小波分解及其子带系数的局部统计特性

$$p(w_i) = \sum_{m=1}^M p_{S_i}(m) p_{w_i|S_i}(w_i | S_i = m) \quad (6)$$

其中, $p_{w_i|S_i}(w_i | S_i = m) = g(w_i; \mu_{i,m}, \sigma_{i,m}^2)$ 表示小波系数 i 处于状态 m 时取值为 w_i 的概率, 它服从均值、方差分别为 $\mu_{i,m}$ 和 $\sigma_{i,m}^2$ 的高斯分布; $p_{S_i}(m) = p(S_i = m | \tilde{f})$ 表示小波系数 i 处于状态 m 的概率。

在 $M=2$ 的情况下, 以“1”表示小波系数处于方差小的状态, “2”表示小波系数处于方差大的状态。若在图像的平滑区域, 则近似有 $p_{S_i}(1) = 1, p_{S_i}(2) = 0$, 而在图像的边缘附近, 则近似有 $p_{S_i}(1) = 0, p_{S_i}(2) = 1$, 在这两种情况下, 混合高斯模型都退化为单一的局部高斯模型。在其他局部区域, 则处于一种中间状态, 但同样可以利用单一的高斯分布很好地逼近式(6)所给的混合高斯模型。

根据以上分析, 并将各小波系数视为相互独立的随机变量, 则可得 HR 图像 f 的小波系数的联合分布概率为

$$p(\tilde{f} | \theta) = \prod_{i=1}^{r^2 N^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \exp \left\{ -\frac{(w_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} \quad (7)$$

其中, \tilde{f} 表示小波和尺度系数向量, w_i 为 \tilde{f} 的第 i 个分量, μ_i 和 σ_i^2 分别是以 w_i 为中心的局部邻域的均值和方差, $r^2 N^2$ 为小波和尺度系数个数, 参数向量为 $\theta = \{\mu_i, \sigma_i^2\}$ 。

5 基于小波域局部高斯模型的图像超分辨率

超分辨率算法的核心是利用图像的小波域局部

高斯模型来指定图像在小波域的先验概率 $p(\tilde{f} | \beta, \theta)$, 其形式如式(7)。此时关于 \tilde{f} 的能量函数为

$$\Phi(\tilde{f}, \theta) = \sum_{i=1}^{r^2 N^2} \frac{(w_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{r^2 N^2} \log \sqrt{2\pi\sigma_i} \quad (8)$$

至此可以得到与式(4)对应的小波域表达:

$$L(\tilde{f}, \beta, \theta) = \frac{1}{2\sigma^2} \|\tilde{g} - \tilde{H}\tilde{f}\|_2^2 + \beta \left(\sum_{i=1}^{r^2 N^2} \frac{(w_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{r^2 N^2} \log \sqrt{2\pi\sigma_i} \right) \quad (9)$$

则原始 HR 图像的 MAP 估计对应于最小化式(9), 即

$$\tilde{f}^* = \arg \min_{\tilde{f}} L(\tilde{f}, \beta, \theta) \quad (10)$$

对 \tilde{f}^* 作小波逆变换即得复原图像 f^* 。

令 $P = \text{diag}(1/(2\sigma_i^2))$, $b_0 = \left[\frac{\mu_1}{2\sigma_1^2}, \frac{\mu_2}{2\sigma_2^2}, \dots, \frac{\mu_i}{2\sigma_i^2}, \dots \right]^T, i=1, 2, \dots, r^2 N^2$, 则有

$$L(\tilde{f}, \beta, \theta) = \frac{1}{2\sigma^2} \|\tilde{g} - \tilde{H}\tilde{f}\|_2^2 + \beta(\tilde{f}^T P \tilde{f} - 2b_0^T \tilde{f} + \sum_{i=1}^{r^2 N^2} (\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} - \log \sqrt{2\pi\sigma_i})) \quad (11)$$

上式中, σ^2 为依赖于 g 的常量, 令 $a = 2\sigma^2\beta$, 在估计出图像 f 的模型参数向量 $\theta = \{\mu_i, \sigma_i^2\}$ 的情况下, 最小化式(11)将导致方程

$$(\tilde{H}^T \tilde{H} + aP)\tilde{f} = \tilde{H}^T \tilde{g} + ab_0 \quad (12)$$

将 $\tilde{H} = W_g H W_f^T, \tilde{g} = W_g g, H = DC$ 代入式(12)并化简, 可得

$$(W_f C^T D^T DC W_f^T + aP)\tilde{f} = W_f C^T D^T g + ab_0 = b \quad (13)$$

用共轭梯度法求解上式,迭代中需处理的关键计算是

$$q = Ap := (W_f C^T D^T C W_f^T + \alpha P)p \quad (14)$$

式中, A 是括号中的矩阵, p 是尺寸与 \tilde{f} 相同的任意数值向量。 q 的计算需要 2 次小波变换-反变换, 2 次卷积运算, 1 次矩阵抽取和 1 次插值补零操作, 1 次数组点乘运算和 1 次数组相加运算。在任何情况下无需生成和存储大尺寸矩阵 W_f, C, D 和 P 。

5.1 参数的估计

为了利用以上模型来对 LR 图像进行超分辨率, 需要估计的参数包括规整化参数 β , LR 图像 g 的噪声方差 σ^2 以及未知 HR 图像 f 的局部高斯模型参数 $\theta = \{\mu_i, \sigma_i^2\}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, r^2 N^2$ 。规整化参数可以通过试验加以确定, 本文实验取 $\beta = 0.02 \sim 1$ 。噪声方差 σ^2 可以用观测图像 g 的局部方差最小值来近似^[14]。为了估计 θ , 可以通过对 LR 图像 g 进行样条(如三次样条)插值得到 HR 图像 f 的初始估计 f_0 , 然后对 f_0 进行小波分解得到 \tilde{f}_0 , 从而估计出 f 的参数向量 θ 。一般只需要计算 \tilde{f}_0 的局部方差作为各 σ_i^2 的取值, 各局部均值 μ_i 取零即可。

值得指出的是, 相对于混合高斯模型, 单一的局部高斯模型无需对各小波系数的状态概率进行估计, 因为这部分信息已隐含在小波系数的局部方差之内。这也使得本文方法相比于基于小波域隐马尔可夫树模型的超分辨率算法^[9]具有简单快速的特点, 同时在性能上相差无几。

5.2 算法描述

基于小波域局部高斯模型的图像超分辨率算法描述如下:

- (1) 确定 LR 图像 g 的噪声方差 σ^2 ;

- (2) 对 g 进行样条插值, 得到 f 的初始估计 f_0 , 并由 \tilde{f}_0 计算 $\theta = \{\mu_i, \sigma_i^2\}$ 的相应估计值;

- (3) 用共轭梯度法求解问题式(12), 求得 \tilde{f} 的 MAP 估计 \tilde{f}^* ;

- (4) 对 \tilde{f}^* 做小波逆变换, 得到 HR 图像 f 的 MAP 估计 f^* 。

6 实验结果分析

以 Lena, boat 和 mandrill 3 幅标准测试图像为例来说明本文算法的有效性。实验中生成低分辨率图像的卷积核为

$$h = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

测试图像 x 与 h 做卷积, 经亚采样后作为 LR 图像 y 。由 LR 图像 y 经超分辨率后获得的 HR 图像记为 \tilde{x} 。用峰值信噪比

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{\frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} |x_i - \tilde{x}_i|^2}$$

(K 为测试图像的像素总数)

作为超分辨率图像的质量评价准则。

实验在 Matlab 6.1, P III 800, 256M 内存环境下进行。小波分解和重建采用长度为 8 的 Daubechies 小波(即 db4)。在利用式(12)估计 HR 图像时的小波分解次数为 2, 并对获得的 6 个高频子带进行优化, 求解式(12)的共轭梯度法迭代次数为 45 次左右。

图 2~图 4 为实验结果, 其中图 2(a)~图 4(a)为由上述方法获得的 LR 图像, 图 2(b)~图 4(b)为



(a) LR 图像(256×256)



(b) HR 图像(512×512), PSNR=30.4dB

图 2 Lena 图像

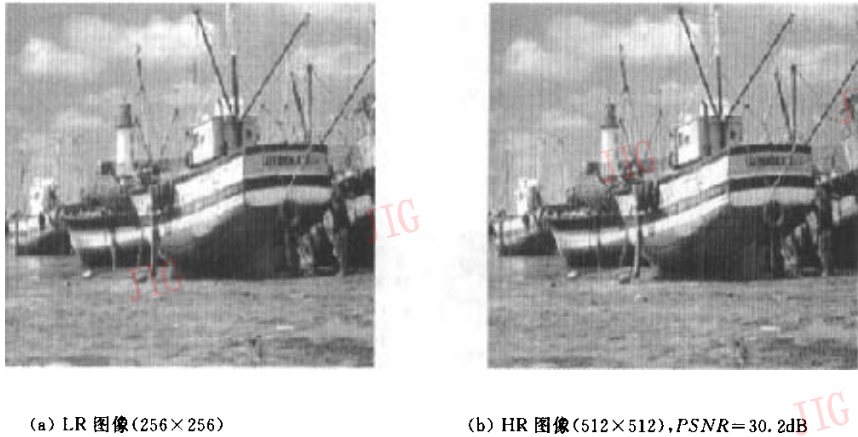


图 3 boat 图像

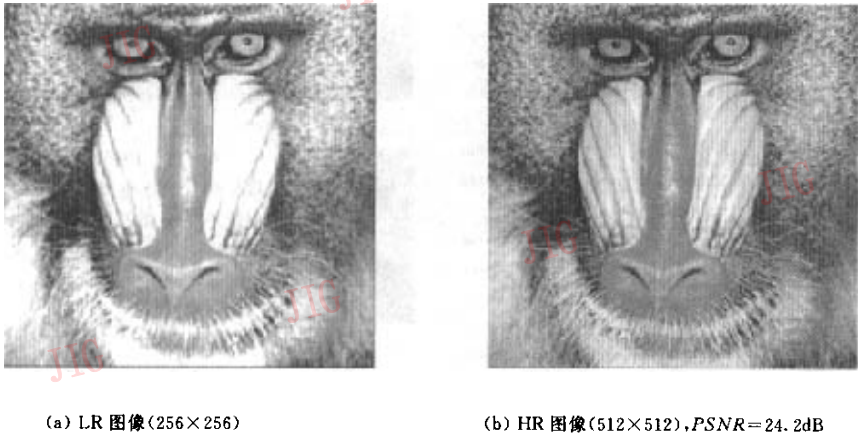


图 4 mandrill 图像

本文算法得到的 HR 图像。为了进行对比,分别用三次样条插值、文献[9]中的算法和本文算法进行实验,并计算所得 HR 图像相对于测试图像的 PSNR 值,结果如表 1 所示。

表 1 实验结果对比

超分辨率方法	Lena	boat	mandrill
三次样条插值	28.77	29.09	23.64
文献[9]中算法	30.5	30.4	24.3
本文算法	30.4	30.2	24.2

从表 1 可以看出,若用三次样条函数对 LR 图像进行插值,虽然可以达到较高的信噪比,但实验表明此时获得的 HR 图像的边缘细节有较严重的模糊,主观视觉效果较差;文献[9]中的方法虽然可以得到略高的信噪比,但视觉效果并无差异,同时由于这一方法需要进行模型参数训练和多次迭代运算,

其时间复杂度太高。对于大小为 256×256 的输入 LR 图像,生成一幅 512×512 的 HR 图像,本文算法运行时间为 8min 左右,而文献[9]中的方法则需要 40min。这说明了本文方法的有效性。

由图 2~图 4 可以看出,随着图像中细节(高频成分)的增多,重构出的 HR 图像的 PSNR 值显著下降,如 Lena 等图像的 PSNR 达到了 30dB 以上而 mandrill 图像的 PSNR 只有 24.2dB。但其视觉效果还是令人满意的。

7 结 论

基于小波域局部高斯模型的图像超分辨率算法,利用图像的小波域局部高斯模型作为未知图像的先验概率模型,从观测到的 LR 图像出发估计未

知 HR 图像的参数向量,并利用共轭梯度法来求解相应的约束优化问题。实验结果表明,该算法重构出的 HR 图像较好地再现了图像的边缘结构,在信噪比和视觉效果方面都有明显的性能提高,是一种简单有效的算法,具有较高的实用价值。

参 考 文 献

- Schultz R R, Stevenson R L. A bayesian approach to image expansion for improved definition [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1994, 3(5): 233~242.
- Schultz R R, Stevenson R L. Extraction of high-resolution frames from video sequences [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(6): 996~1011.
- Hardie R C, Barnard K J, Armstrong E E. Joint MAP registration and high resolution image estimation using a sequence of undersampled images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(12): 1621~1633.
- Elad M, Feuer A. Restoration of a single super-resolution image from several blurred, noisy and under-sampled measured images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(12): 1646~1658.
- Li Xin, Orchard Michael T. New edge-directed interpolation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(10): 1521~1527.
- Battiato S, Gallo G, Stanco F. A locally-adaptive zooming algorithm for digital images [J]. Image Vision and Computing, 2002, 20(11): 805~812.
- Baker S, Kanade T. Limits on super-resolution and how to break them [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 2002, 24(9): 1167~1183.
- Baker S, Kanade T. Hallucinating faces [A]. In: Proceedings of the 4th IEEE International conference on Automatic Face, Gesture Recognition [C], Grenoble, France, 2000: 83~89.
- 赵书斌, 彭思龙. 基于小波域 HMT 的图像超分辨率重构 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(11): 1347~1352.
- Mathieu P, Antonini M, Barlaud M, et al. Image coding using wavelet transform [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(2): 205~220.
- Archer G, Titterton D M. On some Bayesian regularization methods for image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(7): 989~995.
- Belge M, Kilmer M E, Miller E L. Wavelet domain image restoration with adaptive edge-preserving regularization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(4): 597~608.
- Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden markovtree models [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(4): 886~902.
- 邹谋炎. 反卷积和信号复原 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- Coifman R, Donoho D L. Translation-invariant denoising [A]. In: Lecture Notes in Statistics [M], Berlin: Springer-Verlag, 1995, 103: 125~150.



汪雪林 1976年生。1999年毕业于北京理工大学,获学士学位,现为中国科学院自动化研究所博士研究生。研究方向为小波分析与图像处理、模式识别、集成电路反向分析。

E-mail: xuelin.wang@mail.ia.ac.cn



文伟 1975年生。2001年进入中国科学院自动化所国家专用集成电路中心,攻读小波分析与图像处理方向的博士学位。研究兴趣是图像压缩、压缩图像\视频的后处理方法。



彭思龙 1971年生。研究员、博士生导师,1998年于中国科学院数学研究所获博士学位。主要研究方向为小波理论及其应用、模式识别、图像处理、集成电路反向分析等。在国内外刊物发表论文30余篇。