

相关视觉中基于位置相似性特征的 点匹配问题研究

潘俊君 张艳宁 周洪 侯玉霞 龙丽华 姚兰

(西北工业大学 计算机学院, 西安 710072)

摘要 在研究相关视觉中的X光图像点匹配问题时,依据相关视觉中两幅图像的点具有位置相似性的特征,提出了基于“最小欧氏距离和约束”的匹配准则。该准则不同于一般点匹配问题中的基于灰度信息和基于区域特征的方法,它是利用顺序匹配算法原型,并依据两幅图像中标志点满足局部范围内对应点的相对位置不变这个条件,采用进化规划搜索算法不断调整标志点序列的顺序,通过使其对应点欧氏距离和最小来逼近最佳结果,从而在较低时间内取得了绝大部分点正确匹配的效果。经过实例测试和比较,验证了算法的有效性。最后总结了该算法的思想,并推广了它的应用。

关键词 相关视觉 位置相似性特征 对应点匹配 最小欧氏距离和约束 进化规划

中图法分类号: TP391.41 R445-39 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2005)01-0081-06

Corresponding Points Matching Based on Position Similarity

PAN Jun-jun, ZHANG Yan-ning, ZHOU Hong, HOU Yu-xia, LONG Li-hua, YAO Lan

(Computer School, Northwest Poly-technology University, Xi'an 710072)

Abstract According to the position similarity of corresponding points in multi-images of correlation based on computer vision, a corresponding point matching rule based on “the regulation of the minimum summation of euclid distance” is presented when studying the problem of corresponding points matching from X-ray images. This rule is different from the conventional corresponding points matching methods based on gray level and based on regional geometric feature. It employs the model of sequence matching algorithm. According to the condition that the relative position of corresponding points in two images are almost unchanged in adjacent area, this rule minimizes the summation of corresponding points distance to match the corresponding points by adjusting the sequence of feature points array with evolutionary programming searching algorithm. By the experiment on PC, the result demonstrates that this algorithm can match the most of corresponding points correctly in a low time cost just based on the position similarity of corresponding points. The idea of this rule is summarized and its application is generalized in the end.

Keywords multi-view, position similarity, corresponding points matching, the regulation of the minimum summation of euclid distance, evolutionary programming

1 引言

从一幅或多幅2维投影图像中提取出物体的3维信息,并进行图像3维重建是计算机视觉研究的基本内容。其中最一般的方法是使用两个(或多

个)摄像机同时在不同方位拍摄同一场景,而后利用视差来计算物体的深度。当这两个方位角之差小于 90° 时,则该方法称为“相关视觉法”。与该方法等价的另一种思路是用一个摄像机从不同方位依次获得同一场景的两幅或多幅图像,然后计算深度。由于后一种方法配置简单、成本低、自由度大,所以

基金项目:陕西省科技计划项目(JHJYB20046)

收稿日期:2004-03-26; 改回日期:2004-09-02

第一作者简介:潘俊君(1981~),男,2003年毕业于西北工业大学计算机学院,现为该学院计算机信息处理专业硕士研究生。研究方向为医学图像处理、计算机视觉、虚拟现实等。已在国内外重要期刊及学术会议上发表论文十余篇。E-mail: pan_junjun@263.sina.com

实际中多采用这种方法。

相关视觉中最富挑战性的问题莫过于多幅图像中对应点的匹配问题。目前已提出一些算法来解决这方面的问题,它们大致分为两类,其中一类是基于灰度的匹配,比如最早由 Ackermann 提出的最小二乘影像匹配(least squares image matching),由于它充分利用了影像窗口内的信息来进行平差计算,因此能使匹配精度达到 1/10,甚至 1/100 的像素级^[1,2],最近研究较热的 Graph Cut 匹配方法,则是通过找到一种能量形式上最小的对应关系来进行匹配,其特点是具有较高的鲁棒性和正确率,即使图像的信噪比(signal noise ratio, SNR)降到较低的程度,也具有一定的效果^[3,4];另一类是基于区域特征的匹配,比如对于人工建筑物,由于影像的不连续、阴影与被遮挡等原因,致使基于灰度的匹配方法往往难以实现,而通过匹配建筑物上一些具有几何特征的区域,如角点、平行线,则能达到较好的效果。这个方面应用较为成功的例子是医学图像处理中的 DSA(digital subtract angiogram)血管的 3 维重建。Coatrieux 和 Collorec 等人通过自动搜索多幅图像中血管的分叉、拐角等几何特征点实现了多幅血管造影图像的匹配^[5,6]。同时,为了减低匹配问题的搜索空间和进一步减少点的误匹配,人们还提出了各种约束准则,例如,外极线约束、一致性约束、唯一性约束、连续性约束等^[7]。虽然在匹配问题方面已经有了不少好的算法,然而就目前而言,还没有一种方法具有较强的通用性。实际问题中,由于成像原理的差异、拍照环境的改变以及摄像机测量误差等因素的存在,常常会使上述算法的成立条件得不到满足,或者约束性失效,本文以本研究课题涉及的“基于多幅 X 光图像的 3 维重建”问题为例来进行说明,由于 X 光图像属于光透射投影成像,与一般光反射成像原理的不同在于,它是一个积分成像过程,即图像中各个像素的灰度是相应视线上所有体素投影叠加而形成的,因此图像中的每个像素都不存在 3 维表面^[8],这使得基于灰度和基于区域特征的标志点匹配算法都无法实现。在这种情况下,本文依据相关视觉中两幅图像的对应点具有空间位置相似性的这一特征,提出了基于位置相似性特征的点匹配算法。该算法最终写成了“最小欧氏距离和约束”准则的形式,并用进化规划实现了该算法。

目前该算法已成功应用到本研究课题的多个实验中。值得强调的是,虽然“最小欧氏距离和约束”准则是在研究 X 光图像点匹配问题时提出的,但是

它所成立的条件是绝大多数相关视觉法获取的图像都能满足的。该算法所基于的对应点位置相似性特征,使人们能够从另一个角度去思考点的匹配,并可以推广到图像配准、图像融合等各类问题中。

2 基于位置相似性特征的点匹配算法

2.1 对应点顺序匹配算法

在讨论本文算法之前,首先引出相关视觉中一种基于位置相似性特征的对应点顺序匹配算法,该算法是后面将要提出的“最小欧氏距离和约束”准则的约束原型。

以双目视觉为例,假设立体图像对中的每幅图像各有 n 个标志点。如果对这两幅图像按照相同顺序(从上到下,从左到右)依次进行扫描,且每识别到一个标志点就记录下它的 2 维坐标,并顺序存储到一个结构体数组中,则最后就能得到两组记录有这 n 个点坐标的如下有向序列:

设第 1 幅图像的序列为

$$\mathbf{L} = \{l_1(x, y), l_2(x, y), l_3(x, y), \dots, l_{n-1}(x, y), l_n(x, y)\} \quad (1)$$

第 2 幅图像的序列为

$$\mathbf{R} = \{r_1(x, y), r_2(x, y), r_3(x, y), \dots, r_{n-1}(x, y), r_n(x, y)\} \quad (2)$$

如果这两幅图像的对应点满足全局相对位置不变这个条件,即第 1 幅图像中任意两点的相对位置,在与之对应的第 2 幅图像中,没有发生几何关系上的颠倒与错位,则由唯一性约束,这两组有向序列按序号顺序生成如下匹配点对:

$$\{l_1(x, y), r_1(x, y)\}, \{r_2(x, y), r_2(x, y)\}, \{l_3(x, y), r_3(x, y)\}, \dots, \{l_n(x, y), r_n(x, y)\} \quad (3)$$

其中,“对应点全局相对位置不变”的几何意义是指:第 1 幅图像的标志点有向序列 \mathbf{L} 中任意两点 $l_i(x_i, y_i)$ 和 $l_j(x_j, y_j)$ 的空间位置满足一定的顺序关系,假设为 $x_i \leq x_j, y_i \leq y_j$,则第 2 幅图像的标志点有向序列 \mathbf{R} 中与之对应的两点 $r_i(x_i, y_i)$ 和 $r_j(x_j, y_j)$ 的空间位置依然满足这种顺序关系,即有 $x_i \leq x_j, y_i \leq y_j$ 成立。

相关视觉中,当摄像机旋转角度不大时,由于点之间在水平方向及垂直方向上的位置关系不会发生大的变化,因此能用这种方法进行匹配。对应点顺序匹配算法是一种基于全局点的空间位置关系的匹

配方法,当标志点灰度及特征信息不明显时,人眼也往往依据这个思路进行匹配,然而该算法最大的缺陷在于它的适用条件太苛刻。实际情况中,由于受相机旋转角度、几何畸变以及标志点检测算法等因素的影响,图像中标志点满足的是对应点局部相对位置不变的条件,即邻近的点两两之间虽不会存在位置上的颠倒与错位,但相隔较远的点则可能在空间位置的几何关系上发生改变。为了将上述匹配算法推广,弱化它的适用条件,本文将匹配问题抽象化,并依据相关视觉中对应点位置的相似性特征,提出了“最小欧氏距离和约束”准则。

2.2 “最小欧氏距离和约束”准则

利用上述对应点顺序匹配算法,当得到第1幅图像 n 个标志点的有向序列 L 后,根据唯一性约束,在第2幅图像的 n 个标志点中,不管点的分布及检测时的扫描顺序怎样,则有且仅有一个点与第1幅图像中的对应点进行匹配,即它们满足一一映射关系。显然该问题是一个排列问题,所有匹配情况共有 n 的全排列,即 $n!$ 种,而每个点都匹配正确仅是这 $n!$ 种情况中的一种。如果这种全都正确匹配的情况,在满足对应点局部相对位置不变的前提下,能够表现出一定的约束关系,则可以通过不断调整式(3)中各点的配对关系来逼近这种约束,以达到对各个标志点全部正确匹配的目的。在这样的思路下,考虑到相关视觉中对应点具有位置相似性特征,本文提出了“最小欧氏距离和约束”准则(也称为“最小范式约束”准则):相关视觉中的两幅图像,当满足对应点局部相对位置不变的条件时,如果把两幅图像中所有标志点的重心对齐,并放到同一坐标系中,则所有点匹配正确时就可满足各对应点之间移动距离的和最小。这里的移动距离就是两个点的间距,可用欧氏距离来计算,其数学表达式如下:

$$\min \sum_{i,j=1}^n d_{i,j} p_{i,j} \quad (4)$$

s. t.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1, i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_{i,j} = 1, j = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

$$p_{i,j} \in \{0, 1\}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

$$d_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

以上是基于图论的数学模型,并用邻接矩阵来表示两组标志点有向序列(式(1)和式(2))的匹配关

系。其中式(7)中的决策变量 $p_{i,j} = 1$ 表示第1幅图像标志点序列 L 中的第 i 个点与第2幅图像标志点序列 R 中的第 j 个点进行匹配。式(8)中的 $d_{i,j}$ 表示的是 L 中的第 i 个点与 R 中的第 j 个点在同一平面坐标系中的欧氏距离。目标函数(式(4))要求所有点对的欧氏距离之和最小;式(5)要求第1幅图像中的每个点都必须参与匹配,且只能匹配一次;而式(6)则要求第2幅图像中的每个点都必须被匹配到,且只能被匹配一次。其中“对应点局部相对位置不变”的几何意义是指:第1幅图像的标志点有向序列 L 中任意一点 $l_i(x_i, y_i)$ 与其邻域内任意一点 $l_j(x_j, y_j)$, 在空间位置上满足一定的顺序关系,假设为 $x_i \leq x_j, y_i \leq y_j$, 则第2幅图像的标志点有向序列 R 中与之对应的两点 $r_i(x_{r_i}, y_{r_i})$ 和 $r_j(x_{r_j}, y_{r_j})$ 在空间位置上仍然邻近,并且依然满足这种顺序关系,即有 $x_{r_i} \leq x_{r_j}, y_{r_i} \leq y_{r_j}$ 成立。

从上述模型描述可知,相关视觉中的点匹配问题在这里演变成了一个组合优化问题,其可行解的集合是有限的,为 $n!$ 种情况,在问题规模较小时,虽然可以通过枚举法得到最优解,但是当 n 较大时,将得不到可行解,因为它是一个典型的 NP-hard 问题^[9],故比较好的方法是通过优化算法在一定时间内找到比较满意的次优解或最优解。由于模拟退火算法在实现时,对“温度”的下降速度有一定要求,而且实际问题中图像数据都很大,这将使算法达到最优解的时间很长^[10],因此本文考虑采用进化算法。

虽然在一般情况下,顺序匹配算法得到的点对序列(式(3)),不一定对每个点都能正确生成匹配点对,但由于它们在全局上是大致正确的,而只在局部表现出误匹配,因此对该问题而言,进化算法中的交叉算子作用不大,有时还是负面的,而变异算子则能进行局部顺序交换。由于其具有很强的局部寻优能力,因此,本文采用进化算法中的进化规划来实现。

2.3 基于进化规划的算法实现

本文用顺序匹配算法来得到两组标志点的有向序列 L 和 R , 并固定 L 中的 n 个点的顺序,而每代变异改变的是 R 中两个相邻点的顺序,其位置由程序随机决定,而且变异后再计算每个个体在新的匹配关系下的适应度,并淘汰适应度小的个体。下面分别对各个操作进行说明。

2.3.1 适应度函数

适应度函数用 $\min \sum_{i,j=1}^n d_{i,j} p_{i,j}$ 的倒数来计算。假

设在父代中有 g 个个体, 即有 g 个 R 这样的序列, 则它们的适应度函数都用 $\frac{1}{n} \min \sum_{i,j=1}^n d_{i,j} p_{i,j}$ 来计算, 且

$$\frac{1}{n} \min \sum_{i,j=1}^n d_{i,j} p_{i,j}$$

最终得到的最优匹配关系就是最后一代 g 个个体中适应度函数值最大的那一个。

2.3.2 变异操作

进化规划里面变异算子有很多种, 本算法选用的是通过交换 R 中两个相邻点的顺序来进行变异操作, 假设父代中的一个个体为 $9\ 8\ 2\ 1\ 7\ 4\ 5\ 0\ 6\ 3$ 。如果随机产生的邻域序号数为 2, 则对第 2 个点进行变异; 如果算法选择的是和后一个点的交换顺序, 则子代中这个个体就变为 $9\ 2\ 8\ 1\ 7\ 4\ 5\ 0\ 6\ 3$ 。

2.3.3 选择操作

采用“对半选择算法”来选择下一代群体, 即先在 g 个父代个体中变异产生 g 个子代个体, 再对每个个体 $a_i \in P_t \cup \hat{P}_t$ (其中 P_t 是第 t 次迭代之前的群体, \hat{P}_t 是第 t 次迭代之后的群体) 进行适应度计算; 然后对这 $2g$ 个个体按适应度从大到小排序; 最后选择前 g 个得分最高的个体作为下一代群体。

2.3.4 繁殖代数的确定

以上的变异操作与选择操作都以概率 1 来进行, 以提高进化速率。当两幅图像中对应点满足全局相对位置不变的条件时, 则匹配结果无须任何顺序调整, 其结果直接就是式(3), 此时时间复杂度为 0, 为最好情况; 如果反序扫描, 假如两幅图仍然满足对应点全局相对位置不变, 则所有点匹配正确时, 至少要繁殖 $\frac{n(n-1)}{2}$ 代, 即要交换 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次相邻点的顺序, 这时时间复杂度最大, 为最坏情况。综合以上两种情况, 对于标志点数目为 n 的点匹配问题, 其平均繁殖代数取这两种极端情况的算术平均值, 即 $\frac{n(n-1)}{4}$ 为宜。

3 实验及结果分析

为验证本文算法的效果, 用该算法对资助课题中“多幅 X 光图像中特征点的匹配”问题进行了实验, 并和基于外极线约束的搜索算法进行了比较。

图 1 是在一位受试者的右下颞面贴上含有 130 个金属点的标志点带后, 通过头颅定位仪拍得的 X 光图像。贴金属点带的作用是人为生成标志点, 以用于匹配。其中左图的投影体位是 90° (侧位), 右图

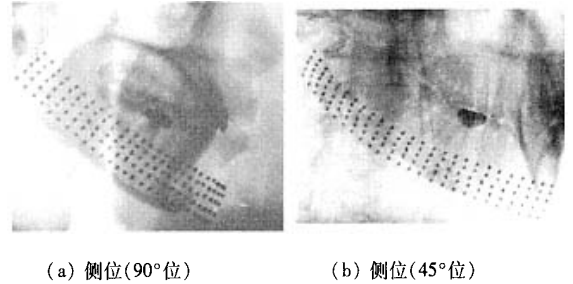


图 1 X 光原始图像

Fig. 1 Original X-ray image pair

是 45° 位。这里头颅定位仪的使用是为了保证病人头部最大程度的固定, 使之满足相关视觉的要求。这种拍照方法就是引言中所谈到的后一种思路。

对原始图像进行裁剪、预处理以及标志点的分割与检测后得到的二值图像如图 2 所示。

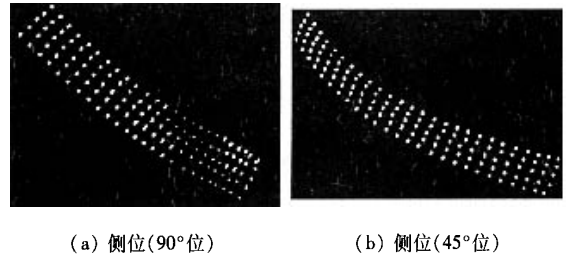


图 2 提取标志点后的二值图像

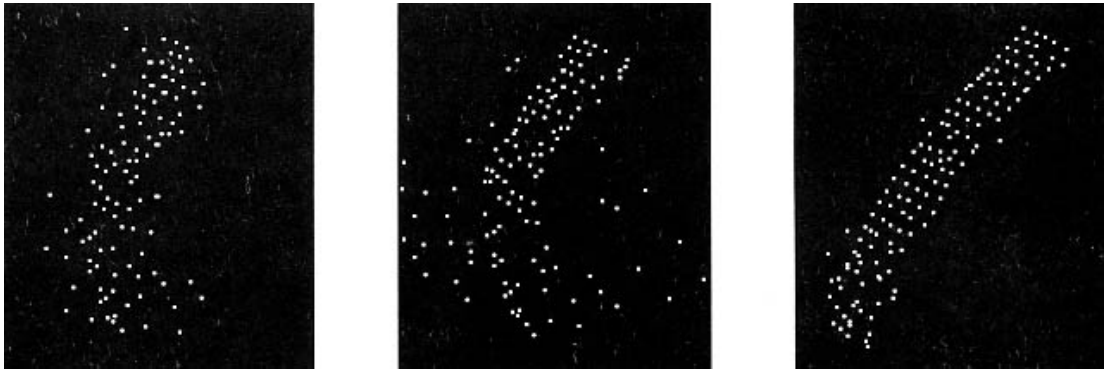
Fig. 2 Binary image pair after feature points detection

实验时, 对只含有标志点的二值图像进行识别与匹配。匹配方法依次采用双目视觉中基于外极线约束的搜索算法、顺序匹配算法和基于“最小欧氏距离和约束”的进化规划搜索算法。3 种算法匹配后的 3 维标志点图像用 OpenGL 显示, 其结果如图 3 所示。

其中基于外极线约束的搜索算法是采用搜索同一高度处, 上、下各 3 个像素范围内, 离该极线最近的点进行匹配。实验结果及分析如下:

(1) 图 3(a) 中的 3 维标志点没有呈现明显的带状, 误匹配率较高。基于外极线的约束在处理该问题时效果并不好, 究其原因在于: 由于人体面部并不是刚性的, 人在旋转及呼吸时面部软组织会不可避免地发生微小形变, 加之 X 光拍照及标志点检测时产生的误差, 因此一旦标志点较密, 点间的上下行距小于搜索时所考虑的误差范围时, 基于外极线的约束准则将失效。

(2) 图 3(b) 中的标志点在某些区域匹配较好, 呈现明显的带状, 而在某些区域则效果很差, 甚至分



(a) 外极线约束匹配的结果 (b) 顺序匹配算法实现的结果 (c) “最小欧氏距离和约束”准则匹配的结果

图 3 匹配后标志点的 3 维图像

Fig. 3 Results of 3D corresponding points based on different algorithms

散成为“野点”。由此可说明顺序匹配算法的适用程度有限,当某些区域的标志点满足全局相对位置不变的条件时,则能达到比较好的匹配效果;否则,误匹配率很高,而且是连锁错误。

(3)图 3(c)的匹配结果是以上最好的。算法实现时是用进化规划进行寻优,整个过程耗时 2.7 s,正确率为 93.8%,繁殖 $\frac{130(130-1)}{4} \approx 5000$ 代。虽然在图中还存在没有正确匹配的点,但只要增加繁殖代数,它就能收敛到最优解,而一般情况下,只需要一个适当的次优解就足够了。

上述实验是本研究课题中的一个简单例子,目前“最小欧氏距离和约束”准则已经成功应用到大量 X 光图像,甚至大样本特征点集的匹配问题上,并取得了较好效果。其中有以下两个问题值得注意:一个是准则成立的条件之一是必须满足“唯一性约束”,但某些情况下,因为遮挡或者标志点检测效果的原因,会使待匹配图像上的标志点数目不完全相同,从而使“唯一性约束”不成立,但由于该研究课题涉及的都是 X 光图像的点匹配,X 光图像属于透射投影成像,所以不存在遮挡问题,只要检测算法好,总能满足标志点数目相同的条件,而且对大多数医学图像而言,不论是透射投影成像还是表面反射成像,由于多采用主动方式,因此通过调整成像设备的角度及位置,使之获得一个较好的投影体位就能解决遮挡问题。解决遮挡问题的另一种方法是在不影响绝大多数点正确匹配的情况下,通过人工干预的方法在图像中删去或增加一些合适的标志点来强制性使其满足“唯一性约束”。

另一个问题是如何确定摄像机的旋转角度,如果摄像机的旋转角度取得太小,虽然“对应点局部相对位置不变”这个条件能得到较好的满足,但是其会在 3 维坐标位置计算中产生较大的误差;如果摄像机的旋转角度取得太大,则会影响“对应点局部相对位置不变”条件的满足,因此摄像机旋转角度一般有一个范围。另外,在这个可行的角度范围内,由于受标志点疏密程度、物体表面曲率变化和投影位置等因素的影响,因此摄像机的最佳旋转角度一般也是根据情况的不同而有不同的值,且通常是依据医学经验来确定的。本实验中,旋转角度范围的确定是基于如下的经验方法:在某一个投影角度及旋转角度下,首先得到两幅 X 光原始图像;然后在经过处理后得到的标志点二值图像对中,任意取 3 个至少包含 4 个以上标志点的区域,且每个区域的面积约为原始图像的 $\frac{1}{16}$ 。如果这 3 个区域的标志点对都能满足“对应点相对位置不变”的条件,则认为这两幅图像满足“对应点局部相对位移量不变”的条件,这样的旋转角度就是可行的,且大于零、小于等于该旋转角度的任意一个角度都可行。否则要减小成像时的旋转角度,再进行上述试验,直到条件满足为止。通过这样的方法,本实验的旋转角度范围为 $[0^\circ, 60^\circ]$ 。考虑到仪器的成像条件和病人的常用体位,课题实验最终选择了 90° (侧位)和 45° 位进行 X 光投影,摄像机最佳旋转角度为 45° 。

4 算法思想与应用推广

如果把相关视觉中两幅图像对应点的位置变化

看成是点的运动,则“最小欧氏距离和约束”准则的思想就是这种运动所表现出来的相关性,即这种运动具有使所有点的运动位移和保持最小的趋势,而绝不会使位移和增大。其中最特殊的情况就是当这两幅图相同时,所有点的运动位移和为 0,而绝不会还发生位置上的交换,若用数学公式来表示上述思想就是目标函数 $\min \sum_{i,j=1}^n d_{i,j} p_{i,j}$ 。另外,由于“最小欧氏距离和约束”所要求的条件只是局部范围内对应点相对位置不变,所以不但相关视觉中的点匹配问题可以用它来解决,而且对于非线性变换下图像的配准问题,只要图像满足这个条件也可以使用该方法。最后,对于这种组合优化问题还可以通过改进搜索算法,比如用“模拟退火算法”加“TABU 算法”加“进化算法”这样的混合寻优算法^[10]来进一步提高搜索效率和降低搜索时间。

5 结 论

本文在研究相关视觉中 X 光图像的点匹配问题时,依据相关视觉中两幅图像的标志点具有位置相似性的特征,提出了基于“最小欧氏距离和约束”的匹配准则。该准则不同于一般点匹配问题中基于灰度信息和基于区域特征的方法,它是利用顺序匹配算法模型,并依据两幅图像中标志点满足局部范围内对应点相对位置不变的这个条件,采用进化规划算法不断调整标志点序列的顺序,并通过使其对应点的距离和最小来逼近正确结果,从而取得了较低时间内绝大部分点匹配正确的效果,并在 PC 机上通过实例进行了验证。最后本文总结了该算法的思想,并推广了它的应用。虽然基于“最小欧氏距离和约束”准则的匹配算法还缺乏理论上的推导(希望在今后的研究中能够继续证明并最终写成定

理),但是它所基于的对应点位置的相似性特征,使人们能够从另一个角度去思考点的匹配问题,并可以推广到图像配准、图像融合等各类问题中。

参 考 文 献

- 1 Bethe J. Least square image matching for CE604 [A]. In: Proceedings of International Symposium of Remote Sensing [C], Ottawa, Canada, 14 June, 1997; 457 ~ 467.
- 2 Gruen W. Adaptive least squares correlation: a powerful image matching technique [A]. In: International Conference of Remote Sensing [C], Phoenix, Arizona, USA, 2001; 65 ~ 71.
- 3 Vladimir Kolmogorov. Multi-camera scene reconstruction via graph cuts [D]. Computer Science Department, Cornell University, Ithaca, New York, USA, 2003; 1 ~ 5.
- 4 Sylvain Paris, Francois X. A surface reconstruction method using global graphic cut optimization [A]. In: European Conference in Computer Vision [C], Rhodes, Greece, 2003; 1 ~ 7.
- 5 Canero M, Radeva P, Toledo R, et al. 3D curve reconstruction by biplane snakes [J]. Pattern Recognition, 2001, 33(13): 90 ~ 96.
- 6 Bjbm Wolters, Slager C, Fjm Gijzen. On the numerical analysis of coronary artery wall shear stress [J]. Medical Physics, 2002, 20(13): 894 ~ 904.
- 7 Jia Yun-de. Machine vision [M]. Beijing: Science Press, 2000: 163 ~ 164. [贾云得. 机器视觉 [M]. 北京: 科学出版社, 2000: 163 ~ 164.]
- 8 Luo Su-qian, Zhou Guo-hong. Medical image processing and analysis [M]. Beijing: Science Press, 2003: 1 ~ 2. [罗述谦, 周果宏. 医学图像处理与分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 1 ~ 2.]
- 9 Sun Shu-ling, Xu Yin-long. The introduction of combinatorics [M]. Hefei: Chinese Science and Technology University Press, 2002: 484. [孙淑玲, 许胤龙. 组合数学引论 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2002: 484.]
- 10 Xing Wen-xun, Xie Jin-xing. Modern optimize algorithms [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999: 114 ~ 128. [邢文训, 谢金星. 现代优化计算方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 114 ~ 128.]