

基于凸四边形曲率的三角剖分优化准则

张永春 达飞鹏 宋文忠

(东南大学自动化研究所, 南京 210096)

摘要 由3D散乱点集构造三角剖分在曲面造型中有着十分重要的作用,而剖分所采用的优化准则决定了最终的剖分结构。从曲率这一曲面内在特性入手,提出了一种空间凸四边形的曲率估计算法,据此还提出了一种新的基于该曲率的优化准则,即一种曲率最小优化准则,并通过一个例子详细地将这一新的优化准则与几种常用的优化准则做了比较,实验结果的分析表明,运用该优化准则得到的三角剖分具有较好的几何特性,在曲面重构和曲面设计等方面有很好的实用价值。

关键词 三角剖分 优化准则 曲率估计

中图分类号: TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2005)02-0245-04

An Optimal Criterion Based-on the Estimation Curvature of a Convex Quadrilateral for Triangulations

ZHANG Yong-chun, DA Fei-peng, SONG Wen-zhong

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract Triangulations from 3D scattered point-sets play an important role in surface modeling. The applied criterion determines the final triangulation. Since curvature is one of the intrinsic properties of a surface, an algorithm for estimating the curvature of a convex quadrilateral is given in this paper. Then a new criterion of minimizing this curvature is proposed. Comparisons between this minimal curvature criterion and other criteria are concisely enunciated through detailed analyses to an example. The results indicate that the triangulations based on the criterion have the tendency to hold better geometric properties. This has practical value for surface reconstructions and surface designs etc.

Keywords triangulations, optimal criterion, curvature estimation

1 引言

在CAD/CAGD中曲面造型常需由曲面上采样得到的散乱点来构造三角剖分,现有的算法主要有平面投影法和直接剖分法。前者将点投影到某一平面,运用平面的三角剖分算法完成剖分,通常采用Lawson边交换准则^[1],得到Delaunay剖分,相关算法也较多,可参见文献[2]、[3],也有采用最小权等其他准则而得到相应的剖分^[4,5],就曲面重构而言已较难应用^[6];后者直接由3维点来构造剖分,较有代表性的算法有Choi算法^[7]等,直接剖分中常用的优化准则有多种^[7~12],关于散乱点集的三角剖分算

法,包括数据结构、现有优化准则及其简单的比较可参见文献[13]。

剖分采用的优化准则最终决定了三角剖分的结果,就现有的曲面剖分优化准则而言,标量积最大^[9]或法矢夹角最小(ABN)准则^[10]使剖分中凸四边形更“平坦”;应用最小绝对高斯曲率准则^[11]产生的剖分并没有预期的效果,其光顺度不如最小绝对平均曲率准则^[11],应用最小绝对平均曲率准则、标量积最大准则或ABN准则、JND准则^[10]产生的剖分结果大致相同^[11];QS准则^[12]由于计算复杂,时间耗费过大而难以应用;空间形状优化准则^[8]主要着眼于保形性,光顺准则^[7]主要着眼于曲面的光顺性,这两种准则对于闭曲面有相当好的效果,而对

收稿日期:2004-03-30;改回日期:2004-07-19

第一作者简介:张永春(1968~),男,2002年于南京工业大学获材料学硕士学位,现为东南大学控制理论与控制工程专业博士研究生。主要研究方向为CAGD/CAD、计算机仿真等。E-mail:yongch-zh@163.com

于开曲面,由于应用空间形状优化准则时,需判断边的凹凸性,应用光滑准则时要计算边左右两个三角形法矢的标量积,而在边界处边界边只属于一个三角形,必须构造“伪边界”这样才能完成计算,而如何建立合理的伪边界有时显得比较困难。

从曲率这一曲面内在特性入手,提出一种空间凸四边形的曲率估计算法,据此还提出了一种新的基于该曲率的优化准则,即曲率最小优化准则,并通过一个例子的详细分析,将之与几种常见的优化准则进行了比较。

2 优化准则

由于 4 个点形成一个凸四边形时将有两种剖分,对剖分进行优化简单地就是判断剖分中凸四边形应该采用哪一种剖分。由于开曲面在实际工程中也是常见的研究对象,因此考虑优化准则时最好只利用凸四边形本身的信息,以免构造伪边界。

因为曲率是曲面不变的内在特性,也是几何光滑性判据之一,因此本文考虑就从曲率入手。

2.1 空间凸四边形的曲率估计

首先考虑如何估计一个空间凸四边形的曲率(假定其有常平均曲率)。考虑一个曲面上的一段短程线,设其弧长参数化曲线为 $r(s)$,根据定义有下面的曲率计算式:

$$\kappa = \ddot{r}(s) = \min_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} \quad (1)$$

式中, t, s 分别为单位切矢和弧长参数。

由于考虑的对象是离散的点,无法直接应用式(1),只能用近似式来表达,如图 1 所示,位于一曲面 Σ 上的凸四边形 Q , 对角线为 V_2V_4 , 三角形 $V_2V_3V_4$ 和 $V_1V_2V_4$ 的重心分别为 C_1, C_2 , 其法矢为 n_1, n_2 , 从 C_1 沿法矢 n_1 的射线交 Σ 于 C'_1 , 类似地有 C'_2 , 对 Σ 上的短程线 $C'_1C'_2$, 设 C'_1, C'_2 处的单位法矢为 n'_1, n'_2 , 单位切矢为 t_1, t_2 , 由短程线的性质有 $\|n'_1 - n'_2\| = \|t_1 - t_2\|$, 则可用下式近似表示曲率:

$$\|\kappa(Q)\| \approx \frac{\|n'_1 - n'_2\|}{\|C'_1 - C'_2\|} \quad (2)$$

以 n_1, n_2 分别作为 C'_1, C'_2 点的单位法矢,并以线段 C_1C_2 近似表示短程线 $C'_1C'_2$, 则式(2)变为下式:

$$\|\kappa(Q)\| \approx \frac{\|n_1 - n_2\|}{\|C_1 - C_2\|} \quad (3)$$

以上式作为一种空间凸四边形曲率 k 的近似估计值。

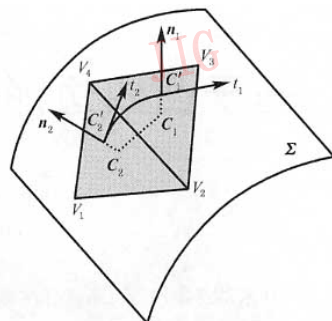


图 1 空间凸四边形的曲率估计

Fig. 1 Curvature estimation of 3D convex quadrilaterals

2.2 曲率最小优化准则

剖分时,当 4 点形成凸四边形时,对应地有两种剖分。

定义 曲率最小优化准则

对剖分中的一个凸四边形,其两种剖分为 T_1, T_2 ,按式(3)计算它们的估计曲率 κ_1, κ_2 ,当 $\|\kappa_i\| = \min_{j=1,2} (\|\kappa_j\|)$ 时,则以 T_i 作为该四边形的最优剖分,并称该准则为曲率最小优化准则。

对某一散乱点集,具体优化方法可以将曲率最小优化准则和 Lawson 边交换准则结合起来:若形成严格凸四边形的两个相邻三角形共面,则按 Lawson 边交换准则优化,即最小内角最大准则;否则按式(3)估计该凸四边形两种剖分的曲率,然后按曲率最小准则优化。

优化时按顺序搜索剖分中的边,若某边左右两个三角形构成严格凸四边形,则按上述方法优化,重复执行,直至剖分中再不需要优化的边,则完成整个剖分的优化,也就得到点集的最终剖分。

3 实验分析

点集剖分过程主要有预处理、初始剖分、优化等几个步骤,剖分时点集的预处理与文献[8]相同,这样剖分从点集中心开始,预处理也可以按点坐标值排序,则剖分从边界开始,这两种处理得到的初始剖分虽不同,但最终剖分几乎是一样的。

接下来看一个例子,该例取自曲面 Σ :

$$f(x, y) = \exp\left(-\frac{81}{4}\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

共 641 点,其中边界 80 点,图 2 示出了 5 种不同优化准则下的结果,其中前 3 个结果取自文献[11]。

从图中可以看出,前 3 个剖分虽然各有区别,但与后两个区别较大。这反映在边界处,该曲面在边界处曲率变化并不十分剧烈,而这三者在这些较平坦的区域出现了过多的细长三角形,在曲率变化剧烈的中心区域情况恰好相反,就这种情况而言,图 2(b)要比图 2(a)和图 2(c)好些。显然,这 3 种剖分并

没有很好地反映出原曲面;与之相反,后两种剖分较好地反映了原曲面,尤其在中心一带区域反映了原曲面曲率的变化,但二者还是稍有差别,图 2 中(d)和(e)已经标出了部分不同之处,从保形角度看图 2(e)要稍稍好于图 2(d)。

为了进一步分析比较,与文献[11]一样,取误

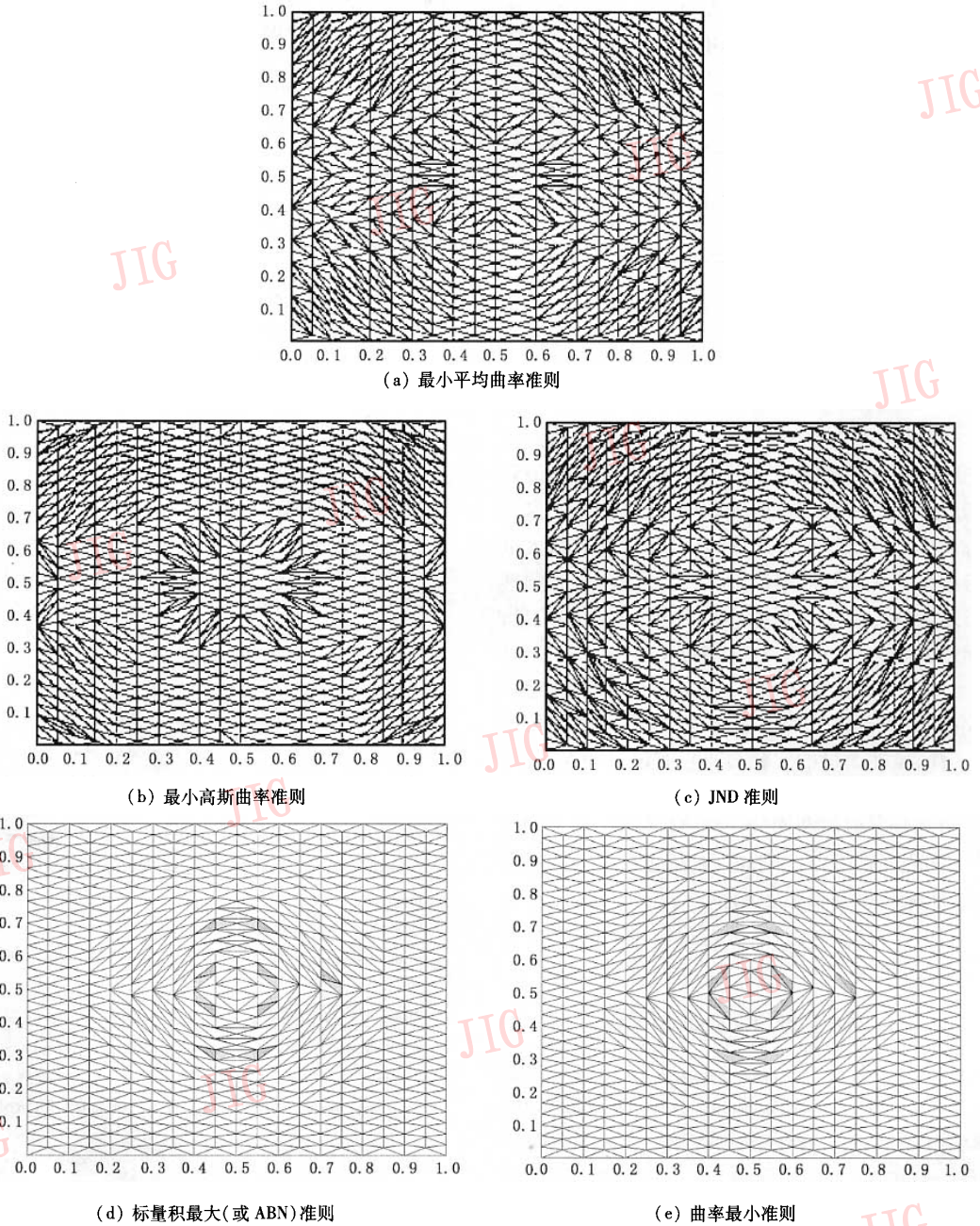


图 2 几种优化准则的比较

Fig. 2 The comparisons of several criteria

差函数 $\varepsilon(T)$ 为最终三角剖分(可以看成点集的线性插值曲面)与原函数曲面间的最大距离,经计算,结果列于表 1,从表 1 中可以看出,最小绝对高斯曲率准则相对较差,最小绝对高斯曲率、JND 与 Delaunay 准则结果差不多一样,而标量积最大(ABN)与曲率最小优化准则的结果要优于其他几种结果,就二者相比,后者稍好些。

表 1 实验结果比较

Table 1 The comparisons of experimental results

优化准则	$\varepsilon(T) (\times 10^3)$
标量积最大	4.76
曲率最小	3.92
最小绝对平均曲率	4.91
最小绝对高斯曲率	5.82
JND	4.91
Delaunay	4.91

注:后 4 项数据选自文献[11]。

4 结 论

详细讨论了一种 3D 散乱点集的曲面三角剖分优化准则,并举例做了分析比较。应用该准则得到的剖分结果较好,有较好的光顺度,具有很好的保形特性;该准则的计算耗费很小,略高于标量积最大准则,与最小绝对平均曲率准则相当,要远小于光顺准则等;这个优化准则只利用了凸四边形本身的信息,剖分时无须构造伪边界,故应用方便。

无论什么样的优化准则,都有其应用范围,运用什么准则取决于剖分的主要要求,曲率最小优化准则也一样,虽然大量的实验表明它有很好的保形性,进一步分析其适用范围或局限性也是有意义的。另外,三角剖分是对原曲面的一种线性插值,若采用曲率最小优化准则时,对一般曲面,满足什么样的采样密度才能保证得到保形三角剖分,与什么样的采样方法结合,才可以避免过密或过疏采样,也是今后进一步研究的内容。

参考文献 (Reference)

- 1 Lawson C L. C^1 surface interpolation for scattered data on a sphere [J]. Rocky Mount Journal of Mathematics, 1984, 14(1): 223 ~ 237.
- 2 Zhou X Y, Zhu X X. Triangulations for scattered data [J]. Journal of Engineering Graphics, 1993, 13(1): 48 ~ 54. [周晓云,朱心雄. 散乱数据点三角剖分综述 [J]. 工程图学学报, 1993, 13(1): 48 ~ 54.]
- 3 Zhou X Y, He D Z, Zhu X X. An algorithm of triangulation for scattered data in convex region [J]. Chian J. CAD & CG, 1994, 6(4): 256 ~ 259. [周晓云,何大曾,朱心雄. 实现平面上散乱数据点三角剖分的算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1994, 6(4): 256 ~ 259.]
- 4 Zhou P D. Computational Geometry—Algorithms analysis and design [M]. Beijing: Tsinghua University Press, Nanning: Guangxi Science & Technology Press, 2000: 101 ~ 103. [周培德. 计算几何——算法分析与设计 [M]. 北京:清华大学出版社, 南宁:广西科学技术出版社, 2000: 101 ~ 103.]
- 5 Zhou P D. The algorithm for triangulation the point-set in the plane [J]. China J. CAD & CG, 1996, 8(4): 259 ~ 264. [周培德. 平面点集三角剖分的算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1996, 8(4): 259 ~ 264.]
- 6 Zhou R R, Zhang L Y, Su X, et al. Algorithmic research on reconstruction from ocean scattered points [J]. Journal of Software, 2001, 12(2): 249 ~ 255. [周儒荣,张丽艳,苏旭等. 海量散乱点的曲面重建算法研究 [J]. 软件学报, 2001, 12(2): 249 ~ 255.]
- 7 Choi B K, Shin H Y, Yoon Y I, et al. Triangulation of scattered data in 3D space [J]. Computer Aided Design, 1988, 20(5): 239 ~ 248.
- 8 Jiang S S, Yang H C, Hou Z X. The triangulation of 3D scattered data with a spatial shape optimal criterion [J]. China J. CAD & CG, 1995, 7(4): 241 ~ 249. [姜寿山,杨海成,候增选. 用空间形状优化准则完成散乱数据的三角剖分 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1995, 7(4): 241 ~ 249.]
- 9 Ke Y L, Zhou R R. A new triangulation algorithm for 3D scattered points [J]. China J. CAD & CG, 1994, 6(4): 241 ~ 248. [柯映林,周儒荣. 实现 3D 离散点优化三角剖分的三维算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1994, 6(4): 241 ~ 248.]
- 10 Dyn N, Levin D, Rippa S. Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation [J]. Journal of Numerical Analysis, 1990, 10(1): 137 ~ 154.
- 11 Alboul L, Kloosterman G, Traas C, et al. Best data-dependent triangulations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 119(1): 1 ~ 12.
- 12 Quak E, Schumaker L L. Cubic spline fitting using data dependent triangulations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(2): 293 ~ 301.
- 13 Zhang Y C, Da F P, Song W Z. Surface triangulation based on 3D arbitrary point-sets [J]. Journal of Image and Graphics, 2003, 8(12): 1379 ~ 1388. [张永春,达飞鹏,宋文忠. 三维散乱点集的曲面三角剖分 [J]. 中国图象图形学报, 2003, 8(12): 1379 ~ 1388.]