

# 一种基于4对图像对应点的欧氏重建方法

祝海江 吴福朝 胡占义

(中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室,北京 100080)

**摘要** 摄像机自标定算法通常是非线性的,为了得到线性的方法,提出了一种在RANSAC框架下由4对图像对应点线性标定摄像机并对场景进行鲁棒性欧氏重建的方法。当摄像机作两组平移运动时,若在两组平移运动之间摄像机具有不同的姿态,则从4对图像对应点可以线性地重建场景的欧氏几何。模拟实验和真实图像实验均证明了本文方法的可行性。

**关键词** 仿射重建 欧氏重建 摄像机内参数

**中图分类号:** TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)12-1421-09

## A Euclidean Reconstruction Method Based on Four Point Correspondences

ZHU Hai-jiang, WU Fu-chao, HU Zhan-yi

(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** Usually, camera self-calibration is nonlinear. A linear camera calibration technique based on four point correspondences is proposed in this paper in order to obtain a linear method, and a robust Euclidean reconstruction under the random sample consensus (RANSAC) algorithms is computed from the images. The main results are: Assuming the camera undergoes two sets of translations, of which the corresponding rotation axes of camera are not parallel, then Euclidean geometry of a scene can be reconstructed linearly from four point correspondences. Experimental results on synthetic and real images have validated the proposed linear technique.

**Keywords** affine reconstruction, Euclidean reconstruction, camera intrinsic parameters

## 1 引言

由2维图像进行物体表面的3维重建是计算机视觉领域重要的研究课题之一。在3维重建的研究过程中,初期的研究工作<sup>[1,2]</sup>主要是针对由已经标定的摄像机获得的2维图像进行3维重建,在这种情况下,由一个场景的两幅图像可以得到场景的一个欧氏重建。由未标定的摄像机获得的图像进行3维重建的思想被提出<sup>[3,4]</sup>以来,许多研究人员在这方面做了大量的工作。Hartley<sup>[5]</sup>首先提出了分层重建的理论,即先由未标定的图像得到射影重建,然后根据场景或摄像机的有关信息上升到仿射重建,最后得到欧氏重建。在这个理论框架下,射影重建是整个重建的基础,从射影重建上升到仿射重建是整个重建

的关键步骤。因此,有许多文献对射影重建算法进行了研究,例如基于两幅图像的7点算法<sup>[6]</sup>,基于3幅图像的6点算法<sup>[7]</sup>等。基于模约束的方法<sup>[8]</sup>,据此由射影重建上升到仿射重建。基于绝对二次曲面的方法<sup>[9]</sup>,一般至少需要3幅以上的图像才能得到欧氏重建等等。但是,在这些方法中都要求解一个非线性方程组或非线性方程组,因而这些方法都是非线性的。本文给出了一种基于4对图像对应点的欧氏重建算法,并且这个方法是线性的。

针对摄像机在纯平移下的标定及相关的欧氏重建问题,有许多学者进行了研究。基于摄像机平移运动的仿射重建方法<sup>[10]</sup>,提出在由摄像机平移运动得到的两幅图像中,至少需要已知5对对应点才可以恢复场景的3维仿射结构。而由空间同一场景的多幅图像进行摄像机标定和欧氏重建方法<sup>[11]</sup>中,摄像

机要求固定在机器人手上并且经历 3 次纯平移,这 3 次纯平移可以经过机器人坐标系直接测量出来。本文的方法仅要求摄像机做两组平移运动,且要求两组平移运动对应的摄像机的光轴不平行,但是这两组平移运动不需要已知。

## 2 摄像机模型

假设摄像机模型为小孔模型,即空间点与图像点之间满足下述关系:

$$\lambda x = PX$$

其中,  $x = [x, y, 1]^T$  为图像点的齐次坐标,  $X = [X, Y, Z, 1]^T$  为空间点的齐次坐标,  $\lambda$  为非零标量因子,  $P = K[R \ t]$  是摄像机的投影矩阵,  $K$  表示摄像机的内参数矩阵,  $[R \ t]$  表示世界坐标系与摄像机坐标系之间的变换矩阵,  $R$  是一个旋转矩阵, 表示摄像机的姿态,  $t$  是平移向量, 表示摄像机的位置。对于数字摄像机, 畸变因子非常小可以忽略不计。为了简化计算, 使用四参数的小孔模型, 即假定摄像机内参数矩阵具有下述形式

$$K = \begin{bmatrix} f_u & 0 & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若摄像机做纯平移运动, 则摄像机在运动前后的姿态是相同的, 仅位置发生变化。因此, 空间点  $X = [X, Y, Z, 1]^T$  在摄像机平移前、后得到的图像平面上的投影点  $x^{(1)}, x^{(2)}$  分别为

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} x^{(1)} &= K[R \ t_1]X \\ \lambda^{(2)} x^{(2)} &= K[R \ t_2]X \end{aligned}$$

## 3 确定摄像机的仿射投影矩阵

在空间物体上选择不共面的 4 个点, 记作  $\{O, E_1, E_2, E_3\}$ , 由于这 4 个点不共面, 所以可建立空间仿射坐标系如下: 以  $O$  为仿射坐标系的坐标原点, 以  $OE_1, OE_2, OE_3$  所在的直线为仿射坐标系的  $X, Y, Z$  轴; 以  $OE_1, OE_2, OE_3$  作为  $X, Y, Z$  轴上的单位向量, 则空间不共面的 4 个点  $\{O, E_1, E_2, E_3\}$  在空间仿射坐标系下的齐次坐标为

$$O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

设  $\{x_i^{(1)} \leftrightarrow x_i^{(2)}, i=0, 1, 2, 3\}$  是 4 个不共面的空间点  $\{O, E_1, E_2, E_3\}$  在摄像机作平移运动前、后两幅图像平面上相应的投影点, 如图 1 所示。

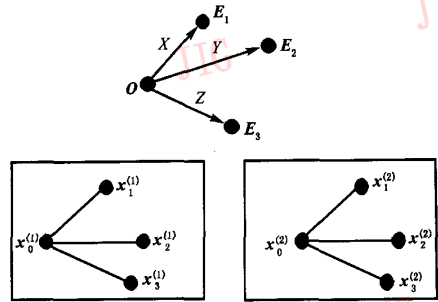


图 1 平移前、后图像示意图

于是, 空间仿射坐标系的 3 个坐标轴在两幅图像上的投影分别为

$$\begin{cases} l_i^{(1)} = x_0^{(1)} \times x_i^{(1)} \\ l_i^{(2)} = x_0^{(2)} \times x_i^{(2)} \end{cases} \quad i=1, 2, 3 \quad (1)$$

其中, 符号“ $\times$ ”表示两个向量的叉积。

因为摄像机作平移运动, 所以空间仿射坐标系的 3 个坐标轴  $X, Y, Z$  轴在运动前后相互平行, 因此, 3 个坐标轴的方向 (即无穷远点) 在两幅图像上的投影 (即平行线的消隐点) 为

$$\begin{cases} p_1 = l_1^{(1)} \times l_1^{(2)} \\ p_2 = l_2^{(1)} \times l_2^{(2)} \\ p_3 = l_3^{(1)} \times l_3^{(2)} \end{cases} \quad (2)$$

显然, 空间仿射坐标系的原点  $O$  在两幅图像上的投影分别为

$$p_0^{(1)} = x_0^{(1)}, p_0^{(2)} = x_0^{(2)} \quad (3)$$

假设摄像机平移前的投影矩阵为  $P_a^{(1)} = [p_{a1} \ p_{a2} \ p_{a3} \ p_0^{(1)}]$ , 其中,  $p_{a1}, p_{a2}, p_{a3}, p_0^{(1)}$  为 3 维向量, 仿射坐标系  $X$  轴方向的坐标可以表示为  $X_\infty = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 于是, 由仿射坐标系  $X$  轴方向在图像上的投影可得  $\lambda_1^{(1)} p_1 = P_a^{(1)} X_\infty$ , 因此  $p_{a1} = \lambda_1^{(1)} p_1$ . 同理由仿射坐标系  $Y, Z$  轴的方向在图像上的投影可得  $p_{a2} = \lambda_2^{(1)} p_2$  和  $p_{a3} = \lambda_3^{(1)} p_3$ . 从而可得摄像机作平移运动前在仿射意义下的投影矩阵为

$$P_a^{(1)} = [\lambda_1^{(1)} p_1 \ \lambda_2^{(1)} p_2 \ \lambda_3^{(1)} p_3 \ p_0^{(1)}] \quad (4)$$

其中,  $\lambda_i^{(1)}, i=1, 2, 3$  为未知的非零常数。

由空间单位点  $E_1, E_2, E_3$  在图像上的投影点  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$  可以求解出非零常数  $\lambda_i^{(1)}$ . 根据空间点的投影方程

$$\alpha_i^{(1)} x_i^{(1)} = P_a^{(1)} E_i \quad i=1, 2, 3 \quad (5)$$

可以得到下述关于未知参数 $(\lambda_i^{(1)}, \alpha_i^{(1)})$ 的方程

$$\lambda_i^{(1)} \mathbf{p}_i - \alpha_i^{(1)} \mathbf{x}_i^{(1)} = -\mathbf{p}_0^{(1)} \quad (6)$$

由于 $\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i^{(1)}$ 表示图像平面上不同的点,所以是两个线性无关的向量,因此式(6)有唯一解

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^{(1)} \\ \alpha_i^{(1)} \end{bmatrix} = -[\mathbf{p}_i \quad \mathbf{x}_i^{(1)}]^+ \mathbf{p}_0^{(1)} \quad (7)$$

其中, $[\mathbf{p}_i \quad \mathbf{x}_i^{(1)}]^+$ 表示矩阵 $[\mathbf{p}_i \quad \mathbf{x}_i^{(1)}]$ 的广义逆。将求解的非零常数 $\lambda_i$ 代入式(4)中,就可以得到平移运动前摄像机在仿射意义下的投影矩阵 $\mathbf{P}_a^{(1)}$ 。

同理,可求得摄像机作平移运动后在仿射意义下的投影矩阵

$$\mathbf{P}_a^{(2)} = [\lambda_1^{(2)} \mathbf{p}_1 \quad \lambda_2^{(2)} \mathbf{p}_2 \quad \lambda_3^{(2)} \mathbf{p}_3 \quad \mathbf{p}_0^{(2)}] \quad (8)$$

## 4 求解摄像机内参数矩阵 $\mathbf{K}$ 和两组平移运动之间的姿态 $\mathbf{R}$

### 4.1 求解摄像机内参数矩阵 $\mathbf{K}$

若将欧氏坐标系的原点选择为仿射坐标系的坐标原点,根据分层重建理论<sup>[5]</sup>,必存在空间仿射变换

$$\mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

使得

$$\begin{cases} \mathbf{P}_a^{(1j)} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \lambda^{(1j)} [\mathbf{K}\mathbf{R}^{(1j)} \quad \mathbf{K}\mathbf{t}^{(1j)}] \\ \mathbf{P}_a^{(2j)} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \lambda^{(2j)} [\mathbf{K}\mathbf{R}^{(2j)} \quad \mathbf{K}\mathbf{t}^{(2j)}] \end{cases} \quad j=1,2 \quad (9)$$

由于两组平移运动之间摄像机具有不同的姿态,因而 $\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{R}^{(2)}$ 是不同的旋转矩阵。可以计算出两组平移运动前、后摄像机在仿射意义下的 4 个投影矩阵,记为

$$\begin{cases} \mathbf{P}_a^{(1j)} = [\mathbf{P}^{(1j)} & \mathbf{p}_0^{(1j)}] \\ \mathbf{P}_a^{(2j)} = [\mathbf{P}^{(2j)} & \mathbf{p}_0^{(2j)}] \end{cases} \quad j=1,2 \quad (10)$$

将它们分别代入到式(9)可得

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{(1j)} \mathbf{A} = \lambda^{(1j)} \mathbf{K}\mathbf{R}^{(1j)} \\ \mathbf{P}^{(2j)} \mathbf{A} = \lambda^{(2j)} \mathbf{K}\mathbf{R}^{(2j)} \end{cases} \quad j=1,2 \quad (11)$$

其中, $\mathbf{P}^{(ij)}$ 是 $\mathbf{P}_a^{(ij)}$ ( $i=1,2$ )的前 3 列所构成的  $3 \times 3$  矩阵。由式(11)消去 $\mathbf{A}$ ,有

$$\lambda^{(1j)} (\mathbf{P}^{(1j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{R}^{(1j)} = \lambda^{(2j)} (\mathbf{P}^{(2j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{R}^{(2j)} \quad (12)$$

将式(12)两边同时转置可得到

$$\lambda^{(1j)} (\mathbf{R}^{(1j)})^T \mathbf{K}^T (\mathbf{P}^{(1j)})^{-T} = \lambda^{(2j)} (\mathbf{R}^{(2j)})^T \mathbf{K}^T (\mathbf{P}^{(2j)})^{-T} \quad (13)$$

再将式(13)两边分别右乘式(12)的两边,有

$$(\lambda^{(1j)})^2 (\mathbf{P}^{(1j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{K}^T (\mathbf{P}^{(1j)})^{-T}$$

$$= (\lambda^{(2j)})^2 (\mathbf{P}^{(2j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{K}^T (\mathbf{P}^{(2j)})^{-T} \quad (14)$$

再对上式求逆,其结果为

$$(\mathbf{P}^{(1j)})^T \boldsymbol{\omega} (\mathbf{P}^{(1j)}) = \alpha^{(j)} (\mathbf{P}^{(2j)})^T \boldsymbol{\omega} (\mathbf{P}^{(2j)}) \quad (15)$$

其中, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ c & d & e \end{bmatrix}$ 具有 4 个独立参数,

$\alpha^{(j)} = (\lambda^{(1j)} / \lambda^{(2j)})^2$ 是未知常数。对式(15)两边同时取行列式,可以确定未知常数

$$\alpha^{(j)} = \sqrt[3]{\left( \frac{\text{Det}(\mathbf{P}^{(1j)})}{\text{Det}(\mathbf{P}^{(2j)})} \right)^2} \quad j=1,2 \quad (16)$$

因而,可以得到关于矩阵 $\boldsymbol{\omega}$ 未知元素的线性方程

$$\mathbf{H}^{(j)T} \boldsymbol{\omega} \mathbf{H}^{(j)} = \alpha^{(j)} \boldsymbol{\omega} \quad j=1,2 \quad (17)$$

其中, $\mathbf{H}^{(j)} = (\mathbf{P}^{(1j)}) (\mathbf{P}^{(2j)})^{-1}$ 。

由文献[5]可知方程(17)在相差一个常数因子的意义下有唯一解。这样,通过线性方程组(17)可以在相差一个常数因子的意义下唯一确定 $\boldsymbol{\omega}$ ,然后对 $\boldsymbol{\omega}^{-1}$ 进行Cholesky分解并将最后一个元素归一化可唯一确定内参数矩阵 $\mathbf{K}$ 。

### 4.2 求解两组平移运动之间的相关姿态 $\mathbf{R}$

在确定了内参数矩阵 $\mathbf{K}$ 后,可以估计旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 。由式(11)可得

$$\mathbf{R}^{(1j)} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^{(j)}}} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{P}^{(1j)}) (\mathbf{P}^{(2j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{R}^{(2j)} = \mathbf{R}\mathbf{R}^{(2j)} \quad (18)$$

其中, $\mathbf{R} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^{(j)}}} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{P}^{(1j)}) (\mathbf{P}^{(2j)})^{-1} \mathbf{K}$ ,它的符号根据 $\mathbf{R}$ 为旋转矩阵能被唯一确定,即取使 $\text{Det}(\mathbf{R})=1$ 成立的符号。不难看出, $\mathbf{R}$ 就是两组平移运动之间的相关姿态。因此,由式(11)可得:

$$\mathbf{A} \approx (\mathbf{P}^{(1j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{R}^{(2j)} \approx (\mathbf{P}^{(2j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{R}^{(2j)} \quad (19)$$

符号“ $\approx$ ”表示在相差一个非零常数因子的意义下的相等,所以矩阵 $\mathbf{A}$ 在相差一个旋转矩阵 $\mathbf{R}^{(2j)}$ 的意义下有唯一的解

$$\mathbf{A} \approx (\mathbf{P}^{(1j)})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{R} \approx (\mathbf{P}^{(2j)})^{-1} \mathbf{K} \quad (20)$$

因此,摄像机在欧氏意义下的 4 个投影矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e^{(1j)} &= \mathbf{P}_a^{(1j)} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\ &\approx \mathbf{K}(\mathbf{R} \quad \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{p}_0^{(1j)}) \quad j=1,2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e^{(2j)} &= \mathbf{P}_a^{(2j)} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\ &\approx \mathbf{K}(\mathbf{I} \quad \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{p}_0^{(2j)}) \quad j=1,2 \end{aligned} \quad (22)$$

从上式可以看出,在欧氏重建中所选择的欧氏坐标系的原点与仿射坐标系的原点重合,坐标轴与第 2 组平移运动中的摄像机坐标系的坐标轴平行。

## 5 欧氏重建算法

### 5.1 算法概述

综上所述, 可得由4对图像对应点进行欧氏重建的算法如下:

(1) 计算摄像机作两组平移运动前、后在仿射意义下的投影矩阵  $(P_a^{(11)}, P_a^{(12)})$  和  $(P_a^{(21)}, P_a^{(22)})$ ;

(2) 由式(16)计算常数因子, 然后根据式(17)建立关于矩阵  $\omega$  的约束方程并求解;

(3) 对  $\omega^{-1}$  进行 Cholesky 分解可以得到摄像机内参数矩阵  $K$ ;

(4) 将  $K$  代入到式(18)中可以求得摄像机两组平移运动之间的相关姿态  $R$ ;

(5) 通过式(21)和式(22)确定摄像机在欧氏意义下的投影矩阵。

### 5.2 鲁棒重建算法

在上节的算法中, 需要已知4对空间非共面点的图像对应点。在实际重建中, 一般情况下从图像中可以提取出多组可能的对应点, 但是这些对应点既可能存在错误的对应点, 也很难保证所选出的4对图像对应点所对应的空间点一定是非共面的, 另外, 即使两组4对图像对应点均为正确的对应点, 并且来自非共面的空间点, 但由于图像对应点均含有离散误差, 重建结果一般也是不同的, 因此, 在实际重建中需要使用鲁棒性方法, 即如何在含有误匹配及离散误差的情况下, 使用上述4对图像对应点的方法来鲁棒地进行3维重建。RANSAC 是计算机视觉界一种广泛使用的鲁棒性方法<sup>[5]</sup>, 下面将介绍一种在 RANSAC 框架下的基于4对图像对应点的鲁棒性重建算法。

RANSAC 的基本思想是从所有可能的图像匹配对中反复随机选取4对图像对应点, 并进行相应的3维重建, 然后计算重建反投影误差, 最后选择误差最小的重建结果为最终结果。由于该方法反复多次抽取4对图像对应点并进行重建, 即使在有误匹配的情况下, 能抽取到一次4对正确对应点的概率一般来说也很大, 所以说 RANSAC 框架下的基于4对图像对应点的方法是鲁棒的。RANSAC 框架下基于4对图像对应点算法的主要步骤如下:

(1) 利用某种匹配方法, 例如文献[12]中所介绍的方法, 对摄像机在每组平移运动中获得的 two 幅图像进行匹配, 获得初始的匹配点对。

(2) 启动 RANSAC 优化程序, 执行  $N$  次最小

点集采样。这里, 每4对图像对应点构成一个最小点集, 在每次采样中, 重复执行如下步骤:

① 随机地选出4幅图像之间的4对匹配点, 并利用4点算法确定4幅图像所对应的仿射投影矩阵;

② 根据上一步所确定的仿射投影矩阵, 计算摄像机的内参数矩阵  $K$ , 如果因数据误差得不到矩阵  $K$ , 则返回到步骤①, 重新选择4对匹配点; 否则, 计算摄像机的欧氏投影矩阵;

③ 由所得到的欧氏投影矩阵计算重建的空间点在各图像中的反投影误差, 小于指定阈值的点被视为内点(Inlier), 统计所有内点的个数; 这里, 选择距离阈值为  $t=1.25$ , 误匹配率为30%, 在  $N$  次采样之后, 统计出每一组欧氏投影矩阵对应的内点个数, 找出含内点数目最多的一个点集。

(3) 利用上面得到的含内点数目最多的点集重新估计欧氏投影矩阵, 该矩阵即为最终所求的欧氏投影矩阵。

由上面的算法可以看出, 在应用 RANSAC 方法进行参数估计时, 首先要随机抽取一个最小点集, 所谓的最小点集是指为确定一个模型所需要的最小数据点的个数。例如, 当利用7点算法来估计基本矩阵时, 其相应的最小点集为7对匹配点。在本文中, 估计欧氏投影矩阵的最小点集为4对匹配点。使用最小点集作为搜索引擎可以很好地处理输入数据中含有较大比例的外点的情况, 如果所需采样的最小点集的维数越小, 则在指定可信度(通常为95%)下找到一个“完全好的”最小点集(即最小点集中的所有元素均为内点)所需的采样次数越少。

## 6 误差分析

在理想情况下, 摄像机做平移运动前后具有相同的姿态, 只是位置发生变化。然而在实际情况下, 摄像机做平移运动时一般均伴随微小的旋转, 则它会影响对摄像机内参数的估计。

假设第1组平移的两个摄像机投影矩阵为  $P_1=K[I|0]$ ,  $P_2=K[I|t_2]$ , 第2组平移的两个摄像机投影矩阵为  $P_3=K[R|t_3]$ ,  $P_4=K[R|t_4]$ , 其中,  $R$  是指两组平移运动之间的旋转矩阵, 则两次平移之间由无穷远平面诱导的无穷远单应性矩阵为  $H_\infty=KRK^{-1}$ , 其中,  $K$  为摄像机的内参数。令

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}$$

$$H_{\infty} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}$$

假设只是在摄像机作第 1 次平移运动前后存在一个旋转矩阵  $\Delta R$ , 则两个摄像机的投影矩阵分别为

$$P_1 = K[I|0]$$

$$P_2 = K[\Delta R|t_2]$$

令这个旋转矩阵  $\Delta R$  为

$$\Delta R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

其中,  $\alpha$  角是表示绕  $X$  轴的旋转角度。

于是, 由第 2 个摄像机的投影矩阵和第 3 个摄像机的投影矩阵可得无穷远单应性矩阵的理论值为  $H_{\infty} = KR(\Delta R)^{-1}K^{-1}$ , 而实际上在实验中所利用的无穷远单应性矩阵为

$$H_{\infty} = K_{\text{est}}(R')K_{\text{est}}^{-1}$$

即估计的摄像机内参数  $K_{\text{est}}$  与理论值  $K$  之间存在误差。

首先, 从摄像机内参数最简单的模型来考虑摄像机作平移运动时存在微小旋转误差对估计内参数的影响。

摄像机为 1 参数模型 在这种情况下, 摄像机的内参数矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此, 理想情况下的无穷远单应性矩阵为

$$H_{\infty} = KRK^{-1} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & fr_3 \\ r_4 & r_5 & fr_6 \\ r_7/f & r_8/f & r_9 \end{bmatrix}$$

此时

$$R = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3/f \\ h_4 & h_5 & h_6/f \\ fh_7 & fh_8 & h_9 \end{bmatrix}$$

若不存在误差时, 根据两组平移运动之间的旋转矩阵的正交性质可得

$$h_1h_4 + h_2h_5 + \frac{h_3h_6}{f^2} = 0$$

所以内参数  $f$  可以由下式估计出来

$$f_{\text{est}} = \sqrt{-\frac{h_3h_6}{h_1h_4 + h_2h_5}} \quad (23)$$

若摄像机做第 1 次平移存在微小旋转误差时, 则无穷远单应性矩阵为

$$H'_{\infty} = KR(\Delta R)^{-1}K^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 & r_2\cos(\alpha) - r_3\sin(\alpha) & f(r_2\sin(\alpha) - r_3\cos(\alpha)) \\ r_4 & r_5\cos(\alpha) - r_6\sin(\alpha) & f(r_5\sin(\alpha) - r_6\cos(\alpha)) \\ r_7/f & \frac{r_8\cos(\alpha) - r_9\sin(\alpha)}{f} & r_8\sin(\alpha) + r_9\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

因为

$$\begin{aligned} h_1h_4 + h_2h_5 &= r_1r_4 + r_2r_5(\cos(\alpha))^2 - \\ & r_2r_6\cos(\alpha)\sin(\alpha) - r_3r_5\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \\ & r_3r_6 - r_3r_6\cos(\alpha)^2 \\ h_3h_6 &= (r_2r_5 - r_2r_5(\cos(\alpha))^2 + \\ & r_2r_6\cos(\alpha)\sin(\alpha) + r_3r_5\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \\ & r_3r_6(\cos(\alpha))^2)f^2 \end{aligned}$$

若将上式中的三角函数作一阶近似, 则有

$$h_1h_4 + h_2h_5 = r_1r_4 + r_2r_5 - (r_2r_6 + r_3r_5) \cdot \alpha$$

$$h_3h_6 = (r_2r_6 + (r_2r_6 + r_3r_5)\alpha)f^2$$

所以, 由式(23)可以估计摄像机的焦距  $f$  为

$$\begin{aligned} f_{\text{est}} &= \sqrt{-\frac{h_3h_6}{h_1h_4 + h_2h_5}} \\ &= \sqrt{\frac{r_3r_6 \left( 1 + \frac{r_2r_6 + r_3r_5}{r_3r_6} \alpha \right) f^2}{(r_2r_5 + r_1r_4) \left( 1 - \frac{r_2r_6 + r_3r_5}{r_2r_5 + r_1r_4} \cdot \alpha \right)}} \end{aligned}$$

根据旋转矩阵的正交性质有  $r_1r_4 + r_2r_5 + r_3r_6 = 0$ , 因此

$$f_{\text{est}} = f \sqrt{\frac{1 + \frac{r_2r_6 + r_3r_5}{r_3r_6} \cdot \alpha}{1 - \frac{r_2r_6 + r_3r_5}{r_2r_5 + r_1r_4} \cdot \alpha}} \quad (24)$$

将上式在  $\alpha=0$  点做泰勒级数展开, 并忽略高次项可得

$$f_{\text{est}} \approx f \left[ 1 + \left( \frac{r_2r_6 + r_3r_5}{r_3r_6} - \frac{r_2r_6 + r_3r_5}{r_2r_5 + r_1r_4} \right) \alpha \right] \quad (25)$$

由上式可知, 当  $\alpha=0^\circ$  时, 即平移不存在旋转误差时, 内参数的估计值等于理论值。随着旋转角  $\alpha$  的增大, 内参数的估计值偏离理论值就越大, 即误差越大。

当摄像机为 4 参数模型时, 可以按类似的方法进行分析, 但是由于对 4 参数模型的分析远比对 1 参数模型要复杂, 因此只是应用模拟实验来说明摄像机做平移运动时均伴随微小的旋转会影响对摄像机内参数的估计。

## 7 实验

### 7.1 模拟实验

在这个模拟实验中, 主要的目的是估计噪声和

误匹配对摄像机内参数的影响。在实验中生成了 4 幅模拟图像,图像大小为  $1000 \times 800$  像素,摄像机内参数的理论值为  $f_u=1000, f_v=1000, u_0=500, v_0=400$ 。对图像点均加入了均匀分布的随机噪声,噪声大小为  $0 \sim 1.5$  个像素,每种噪声水平下均独立进行 100 次实验。同时,为了模拟误匹配对算法的影响,在模拟实验中加入了误匹配点,本实验中的误匹配就是将图像中原本正确的对应点  $(x_i \ y_i \ 1)^T \leftrightarrow (x'_i \ y'_i \ 1)^T$  人为地打乱变为  $(x_i \ y_i \ 1)^T \leftrightarrow (x'_j \ y'_j \ 1)^T (i \neq j)$ ,这样的一对点称为误匹配点。表 1 是噪声为零时,在不同误匹配率下计算出的摄像机内参数的均值。表 2 为模拟实验中误匹配率为 30% 时,在不同噪声水平下摄像机内参数的均值。图 2 是误匹配率为 30% 时,内参数估计值的均方差随噪声变化的曲线。可以看出随着噪声的增大,所估计的摄像机内参数均方差的值也基本上是线性增大的。上述模拟实验结果表明,在存在噪声和误匹配率的情况下,本文的方法是可行的、有效的。

表 1 噪声为零时不同误匹配率下内参数的平均值

| 误匹配率 | $f_u$   | $f_v$   | $u_0$  | $v_0$  |
|------|---------|---------|--------|--------|
| 0.10 | 1000.00 | 1000.00 | 499.99 | 400.00 |
| 0.15 | 999.99  | 999.99  | 500.00 | 399.99 |
| 0.20 | 999.99  | 999.99  | 499.99 | 399.99 |
| 0.25 | 999.99  | 999.99  | 500.00 | 399.99 |
| 0.30 | 994.18  | 1002.57 | 495.75 | 400.27 |
| 0.35 | 990.49  | 992.02  | 500.12 | 404.62 |
| 0.40 | 992.14  | 993.31  | 508.90 | 402.13 |
| 0.45 | 990.44  | 990.76  | 498.29 | 403.83 |
| 0.50 | 989.73  | 991.0   | 508.40 | 415.69 |

表 2 误匹配率为 0.3 时不同噪声水平下内参数平均值

| 噪声  | $f_u$   | $f_v$   | $u_0$  | $v_0$  |
|-----|---------|---------|--------|--------|
| 0.1 | 813.85  | 821.33  | 547.03 | 340.77 |
| 0.2 | 892.58  | 916.33  | 456.19 | 437.63 |
| 0.3 | 914.16  | 888.88  | 407.33 | 365.40 |
| 0.4 | 978.19  | 1010.34 | 651.84 | 458.65 |
| 0.5 | 1051.74 | 1057.59 | 414.87 | 344.62 |
| 0.6 | 945.34  | 937.65  | 591.64 | 579.05 |
| 0.8 | 998.36  | 980.72  | 659.14 | 515.67 |
| 1.0 | 930.82  | 923.70  | 561.09 | 399.33 |
| 1.2 | 720.13  | 741.55  | 483.66 | 321.80 |
| 1.5 | 755.64  | 751.98  | 471.03 | 329.40 |

如上所述,本文方法要求每组摄像机运动为纯平移运动。但是,在理想情况下,摄像机作平移运动前后具有相同的姿态,只是位置发生变化。然而在实际情况,摄像机作平移运动时一般均伴随微小的旋转,则它会影响对摄像机内参数的估计。在这个模拟实验中,验证了摄像机平移运动中存在微小旋转时对内参数估计的影响,实验条件与前面的相同。在模拟实验中假设平移前后的摄像机的光轴是平行

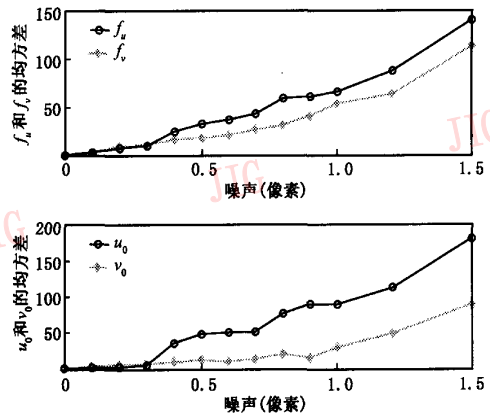


图 2 内参数的均方差在不同噪声水平下的变化曲线

的,旋转角可能的范围为  $0.1^\circ \sim 2.0^\circ$ 。在噪声为零且不存在误匹配的情况下,对每一个旋转角度进行 100 次独立实验并计算摄像机内参数的均值。图 3 为摄像机内参数的相对误差随旋转角度变化的曲线。从图中可以看出,随着旋转角度的增加,摄像机的内参数估计值的相对误差基本上是线性增大的。模拟实验结果表明,在摄像机平移运动中存在微小旋转时,应用本文的方法也可以比较好地估计出摄像机的内参数值。

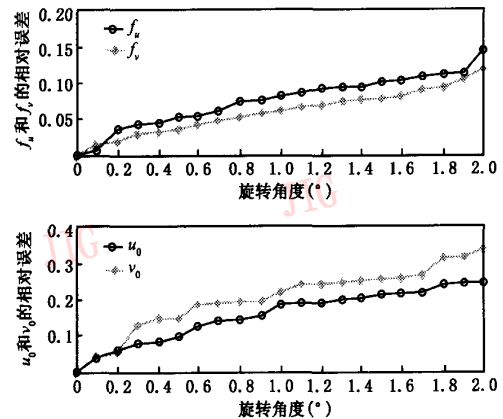


图 3 内参数相对误差随旋转角度的变化曲线

### 7.2 真实图像实验

在真实实验中,使用的数码相机型号为 Nikon 990,在桌子上画一条直线,使得摄像机沿着这条直线作平移运动,平移前后分别对标定块进行摄像。为了保证两组平移运动中摄像机的光轴不平行,在摄像机做第 2 次平移运动时将桌子一边垫高。其中,图 4 表示摄像机第 1 次平移后得到的两幅图像,图 5 表示摄像机第 2 次平移前后得到的两幅图

像,图像大小均为  $1024 \times 768$  像素。首先利用自行开发的图像匹配程序 NLPRCorrespond 分别得到两组图像的对应点,再根据本文算法计算出摄像机的内参数,定标结果如表 3 所示,最后重建出标定块的两个平面的 3 维结构。同时,在图 4 和图 5 中显示了 3 组随机抽取的 4 对图像对应点(图中白点),每一种灰度的点表示对应于同一组空间点,可以看出它们对应的空间点是不共面的。图 6 是欧氏重建出的 3 维点和贴纹理后在不同视角下观察到的结果,从图中可以看出重建出的每个面上的 3 维点基本上是共面的。

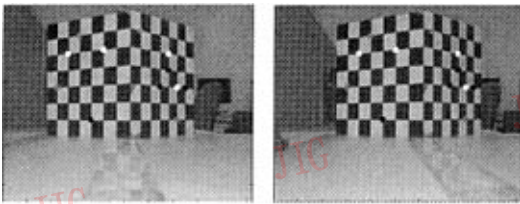


图 4 第 1 次平移前、后的图像

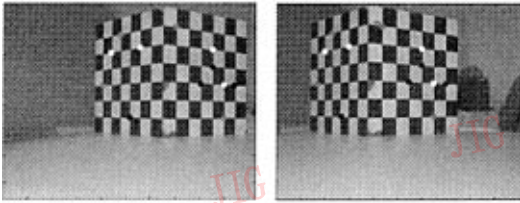


图 5 第 2 次平移前、后的图像

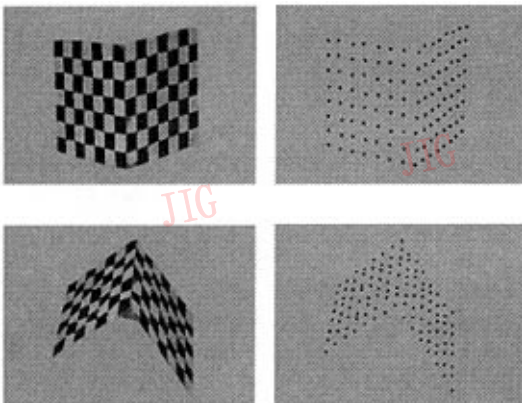


图 6 重建的 3 维点和贴纹理后不同视角下观察到的结果

表 3 两种方法的摄像机内参数定标结果

|          | $f_u$    | $f_v$    | $u_0$  | $v_0$  |
|----------|----------|----------|--------|--------|
| 本文方法     | 1 638.24 | 1 510.87 | 573.58 | 329.51 |
| 文献[13]方法 | 1 800.18 | 1 792.35 | 646.20 | 398.83 |

为了进一步验证本文的定标方法,采用第 1 次平移中的第 1 幅图像和第 2 次平移中的第 1 幅图像,用文献[13]的平面定标方法重新进行定标,文献[13]指出当畸变因子为零时由两幅图像就可以标定出摄像机的 4 个参数(注:张正友方法是文献中广泛使用的一种方法)。程序源代码采用张正友提供的 EasyCalibration。定标时应用手工取点的方法,在图中所示标定块的左平面上取了 64 对匹配点,定标结果如表 3 所示。

利用根据本文方法的定标结果重建出的 3 维空间点的坐标可以求出定标块两个平面的夹角为  $88.76^\circ$ ,这和定标块的两个平面相互垂直的实际情况基本吻合;而利用张正友方法的定标结果重建出的 3 维点求出的定标块两个平面的夹角为  $91.09^\circ$ ,从以上结果可以看出本文方法和张正友方法具有相当的精度。

此外,为了进一步验证本文方法的可行性,对一个足球进行了重建。在这个实验中,使用了电动位移台,首先将摄像机固定在电动位移台上,然后通过控制电动位移台的平移可以获得摄像机在平移前后拍摄的图像,图像大小为  $640 \times 480$  像素,图 7 为摄像机第 1 次平移前后得到的两幅图像,图 8 为摄像机第 2 次平移前后得到的两幅图像,并且在两组平移运动中摄像机的光轴不平行。根据本文算法计算出摄像机的内参数为  $f_u=1\ 039.17, f_v=946.08, u_0=250.69, v_0=399.32$ 。图 9 是欧氏重建的结果。在实验过程中剔除了足球周围的杂点,由实验结果可以看出本文的方法是可行的。

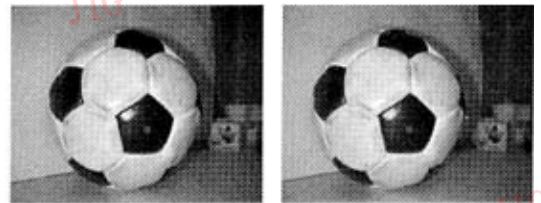


图 7 第 1 次平移前、后的图像

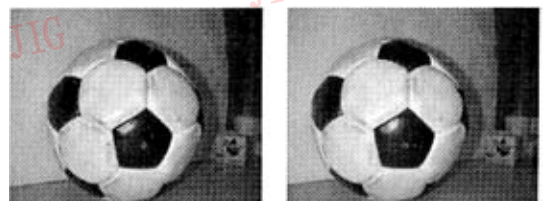


图 8 第 2 次平移前、后的图像

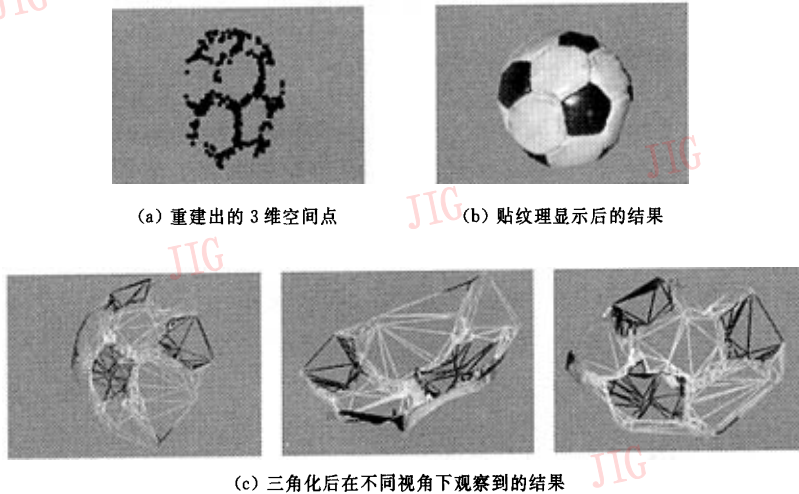


图9 重建出的 3 维点,贴纹理和在不同视角下三角化显示的结果

## 8 结 论

本文研究了一种基于四对图像对应点的线性欧氏重建方法,从理论上证明了当摄像机为 4 参数(畸变因子  $s=0$ )的小孔模型时,如果摄像机做两组平移运动,且在两组平移运动之间摄像机具有不同的姿态,则由 4 对不共面的空间点对应的图像点可以线性地标定摄像机的内参数,并能够计算两组平移运动之间的旋转矩阵,从而重建空间场景的欧氏几何。通过模拟实验,表明本文的方法具有较强的鲁棒性。两组真实图像实验也表明文中提出的方法是正确的,可行的。

本文方法的不足是要求摄像机作平移运动,这是换取“线性”标定的代价。但正如前面的模拟实验所示,当摄像机作平移运动伴随有微小旋转时,这种方法仍有意义。事实上,正如在第一个真实实验中所描述那样,这种方法对设备的限制也不大。

### 参 考 文 献

- 1 Longuet-Higgins H C. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections[J]. *Nature*, 1981, **293**:133~135.
- 2 Horn B K P. Relative orientation[J]. *International Journal of Computer Vision*, 1990, **4**:59~78.
- 3 Hartley R I. Euclidean reconstruction from uncalibrated views [A]. In: Proceedings of 2nd Europe-US Workshop on Invariance [C], Azores, Portugal, 1993:237~256.
- 4 Faugeras O. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig? [A]. In: Proceedings of the European Conference on Computer Vision[C], Santa Margherita Ligure, Italy, 1992:563~578.
- 5 Hartley R I, Zisserman A. Multiple view geometry in computer vision [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 250~258.
- 6 Torr P H S, Murray D W. The development and comparison of robust methods for estimating the fundamental matrix [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1997, **24**(3): 271~300.
- 7 Schaffalitzky F, Zisserman A, Hartley R I, et al. A six point solution for structure and motion[A]. In: Proceedings of the European Conference on Computer Vision[C], Dublin, Ireland, 2000:632~648.
- 8 Pollefeys M, Gool L V, Oosterlinck A. The modulus constraint: a new constraint for self-calibration [A]. In: Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition[C], Vienna, Austria, 1996:349~353.
- 9 Triggs B. Autocalibration and the absolute quadric[A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C], San Juan, Puerto Rico, 1997:609~614.
- 10 Moons T, Gool L V, Van Diest M, et al. Affine reconstruction from perspective image pairs [A]. In: Proceeding of the DARPA-ESPRIT Workshop on Applications of Invariants in Computer Vision[C], Azores, Portugal, 1994: 249~266.
- 11 Pajdla T, Hlavac V. Camera calibration and euclidean reconstruction from known observer translations [A]. In: Proceeding of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C], Santa Barbara, California, USA, 1998:421~426.
- 12 Zhang Z, Deriche R, Faugeras O, et al. A robust technique for matching two uncalibrated images through the recovery of the unknown epipolar geometry[J]. *Artificial Intelligence*, 1995,

75(12):87~120.

- 13 Zhang Z. A flexible new technique for camera calibration[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(11):1330~1334.



祝海江 1971 年生。现为中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室博士研究生。主要研究方向为计算机视觉、3 维重建等。

E-mail: hjzhu@nlpr.ia.ac.cn



吴福朝 1957 年生。研究员、博士生导师。主要研究领域为计算机视觉、人工智能、模式识别等。



胡占义 1961 年生。研究员、博士生导师。主要研究领域为计算机视觉、特征提取、模式识别等。