

改进的保形二次样条插值

李道伦¹⁾ 卢德唐¹⁾ 董玉德²⁾ 孔祥彦¹⁾

¹⁾(中国科学技术大学工程科学软件研究所,合肥 230027)

²⁾(合肥工业大学数字化设计与制造省重点实验室,合肥 230009)

摘要 Schumaker 给出的保形二次样条插值,对不满足单调性条件的子区间,采用人机交互确定节点斜率的方法,使插值函数具有严格的保单调性。在仔细研究不满足单调性条件原因的基础上,提出了新的无需人机交互的保形样条插值方法。新方法首先找出不满足单调性条件的子区间,然后利用加密点调整相邻节点的斜率值,使之满足单调性条件,最后利用 Schumaker 的方法构造出严格保单调、保凸凹的 C^1 连续的二次样条插值。此样条插值方法在计算机辅助设计等中有实际的应用价值。

关键词 保形多项式样条 保单调性 加密

中图分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)04-0516-05

An Improved Method on Shape Preserving Quadratic Spline Interpolation

LI Dao-lun¹⁾, LU De-tang¹⁾, DONG Yu-de²⁾, KONG Xiang-yan¹⁾

¹⁾(Institute of Engineering and Science Software, University of Science & Technology of China, Hefei 230027)

²⁾(Province Key Laboratory of Digital & Manufacture, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

Abstract The shape-preserving quadratic spline interpolations introduced by Schumaker need users to adjust the slopes to satisfy monotone condition, We study carefully the reasons of requiring users to adjust the slopes and introduce a new method that does not need the users to adjust the slopes. The new method first finds out the intervals that do not satisfy monotone conditions, then chooses additional split points that are given suitable slopes to satisfying monotone conditions, at last constructs shape preserving polynomial interpolation based on the method of Schumaker. Examples are given to illustrate the efficiency of the interpolation.

Keywords shape preserving polynomial spline, monotone preserving, additional split point

1 引言

保持数据的凸凹性与单调性即保持数据的几何形状的插值,称之为保形插值。由于保形插值在数值逼近、计算机辅助设计等领域有重要的应用价值,因而很多文献对此进行了研究,如有理样条插值^[1,2]、多项式样条插值^[3-6]及指数样条插值^[7]等。保形有理样条插值通常设置特定格式,用参数控制曲线形状,如平面与空间上的保形样条曲线^[1,2]。保形多项式样条插值常采用细分子区间的方法,通

过增加一个或多个细分点以构造保形样条插值^[3-5]。文献[3]的方法是在每个子区间上添加两个细分点,构造一个三次 Hermite 插值函数与两个三次样条插值函数,然后对其线性组合便得到 C^2 连续的保形三次样条插值;文献[4]在区间的细分上与文献[3]大致相同;文献[6]则用提高多项式次数的方法,构造具有保单调性的样条插值函数,避免了对区间的细分。

较早给出多项式样条插值的是 Schumaker 在文献[5]里提出的保形样条插值。Schumaker 利用每个子区间上增添的一个细分点,构造 C^1 连续的保形

收稿日期:2003-07-04;改回日期:2004-05-31

第一作者简介:李道伦(1972~),男,1998年获合肥工业大学计算数学专业硕士学位,现为中国科技大学计算机科学与技术系讲师,在职博士生。主要研究方向为计算机辅助设计、图像理解及神经网络等。E-mail: ldaol@ustc.edu.cn

二次样条插值。为使样条函数具有保单调性,文献[5]对不满足单调性条件的子区间,通过人机交互修改这些区间节点斜率值,使它们满足单调性条件。但修改斜率需要一定的专业知识,这不仅影响该方法实际的应用,而且每次人机交互需重新计算样条函数表达式,大大增加了计算量。本文在文献[5]的基础上,提出了严格保单调的样条插值方法,该方法无需人机交互,简单易行。该方法首先找出不满足单调性条件的子区间,然后利用新增的细分点(即加密点),自主地调整节点的斜率值,使之满足单调性条件,最后在文献[5]的基础上构造严格保单调的二次样条插值函数。为了便于区别,把为保单调性而对区间的细分称之为加密,相应的点称之为加密点。在最坏的情况下,区间可能被加密两次。另外,所选择的加密点应保持给定数据的单调性与凸凹性。

2 细分区间上的 C^1 连续的二次样条^[5]

在区间 $I: a = x_0 < x_1 < \dots, x_n = b$ 上给定数据集

$$D_n = \{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

当 D_n 严格凸时, $\Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_n$, 当 D_n 严格凹时, $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots > \Delta_n$, 其中, $\Delta_i = (y_i - y_{i-1})/h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ 。

所构造的 C^1 连续的二次样条函数 $s(x)$ 满足如下插值条件:

$$s(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$$

在 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上增加节点 ξ_i ,

$$\xi_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

其中, $\alpha_i + \beta_i = 1, 0 < \alpha_i, \beta_i < 1$ 。

引入记号: $p_i = s'(x_i)$, $\eta_i = s(\xi_i)$, $\pi_i = s'(\xi_i)$ 。

在区间 I_i 的第一细分区间 $[x_{i-1}, \xi_i]$ 上,二次样条函数表示为

$$s_i(x) = y_{i-1}v_i^2 + \eta_i u_i^2 + a_i u_i v_i \quad (2)$$

其中,

$$u_i = u_i(x) = (x - x_{i-1})/(\beta_i h_i)$$

$$v_i = v_i(x) = (\xi_i - x)/(\beta_i h_i)$$

在区间 I_i 的第二细分区间 $[\xi_i, x_i]$ 上,二次样条函数表示为

$$\bar{s}_i(x) = y_{i-1}\bar{v}_i^2 + \eta_i \bar{u}_i^2 + b_i \bar{u}_i \bar{v}_i \quad (3)$$

其中,

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(x) = (x - \xi_i)/(\alpha_i h_i)$$

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i(x) = (x_i - x)/(\alpha_i h_i)$$

定理 1^[5] 对导数 $p_i, \alpha_i > 0, \beta_i > 0, \alpha_i + \beta_i = 1, i = 1, \dots, n$, 由式(2)、式(3)给出的样条函数 $s(x)$ 是 D_n 上的插值函数。它是 C^1 连续的充要条件是

$$a_i = \beta_i h_i p_{i-1} + 2y_{i-1} \quad (4)$$

$$b_i = -\alpha_i h_i p_i + 2y_i \quad (5)$$

$$\pi_i = 2\Delta_i - (\alpha_i p_i + \beta_i p_{i-1}) \quad (6)$$

$$\eta_i = \frac{1}{2} \alpha_i \beta_i h_i (p_{i-1} - p_i) + \alpha_i y_{i-1} + \beta_i y_i \quad (7)$$

$$p_i = \frac{l_i \Delta_i + l_{i+1} \Delta_{i+1}}{l_i + l_{i+1}} \quad (8)$$

其中, $l_i = [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{\frac{1}{2}}, i = 1, \dots, n$ 。

3 保整体单增、单减插值

首先考虑数据 D_n 严格单增情形, 然后考虑数据 D_n 严格单减情形。

当 D_n 严格增时, 由式(2)、式(3)给出的 C^1 连续函数 $s(x)$ 严格增的充要条件是

$$\pi_i > 0, i = 1, \dots, n$$

由式(6)知, 上式等价于 $2\Delta_i - (\alpha_i p_i + \beta_i p_{i-1}) > 0$ 。

当 $p_i - p_{i-1} > 0$ 时, 解出 β_i , 由 $\beta_i \in (0, 1)$, 得 $\frac{p_i - 2\Delta_i}{p_i - p_{i-1}} < 1$, 从而有 $2\Delta_i > p_{i-1}$; 当 $p_i - p_{i-1} < 0$ 时, 类似可得 $2\Delta_i > p_i$, 从而有定理 2。

定理 2^[5] 插值数据 D_n 严格增时, 由式(2)、式(3)给出的 C^1 连续的二次样条函数 $s_i(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上单增的充要条件是:

$$\text{当 } p_i - p_{i-1} > 0 \text{ 时, } 2\Delta_i > p_{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{当 } p_i - p_{i-1} < 0 \text{ 时, } 2\Delta_i > p_i$$

对给定的单增数据 D_n 及导数值 $p_i (i = 0, \dots, n)$, $s_i(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上可能不满足定理 2。为了便于论述本文的方法, 首先引入以下定义。

定义 1 若 $\Delta_l > \Delta_{l+1} < \dots < \Delta_k < \Delta_{k+1}$, 则称 $\{(x_i, y_i) \mid x_i < x_{i+1}, y_i < y_{i+1}, l \leq i \leq k\}$ 是 D_n 极大大增凸子集。

定义 2 若 $\Delta_r < \Delta_{r+1} > \dots > \Delta_q < \Delta_{q+1}$, 则称 $\{(x_i, y_i) \mid x_i < x_{i+1}, y_i < y_{i+1}, r \leq i \leq q\}$ 是 D_n 极大大增凹子集。

在下面的论述中, 假定每一极大大增凸子集与极大增凹子集至少含 4 个插值节点。

定义 3 若 $j \in \{l+2, \dots, k, k-1\}, l+2 \leq k-1$,

则称点 (x_i, y_i) 在极大增凸子集 $\{(x_i, y_i) | l \leq i \leq k\}$ 的内部。

定义 4 若 $j \in \{r+1, r+2, \dots, q, q-1\}$, 则称点 (x_j, y_j) 在极大增凹子集 $\{(x_i, y_i) | r \leq i \leq q\}$ 的内部。

引理 1 若 $\{(x_i, y_i) | l \leq i \leq k\}$ 是极大增凸子集, 则 $s(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 、 $[x_{l-1}, x_l]$ 上单增; 若点 (x_m, y_m) 在极大增凸子集内部, 则 $s_m(x)$ 在 $[x_{m-1}, x_m]$ 上单增。

证明 仅以 $s(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上单增为例。由极大增凸子集定义知 $\Delta_{k-1} < \Delta_k > \Delta_{k+1}$ 。若 $\Delta_{k-1} < \Delta_{k+1}$ 且注意到式(8), 有 $p_k - p_{k-1} > 0$, 从而 $2\Delta_k > \Delta_k + \Delta_{k-1} \geq p_{k-1}$; 若 $\Delta_{k-1} > \Delta_{k+1}$ 且注意到式(8), 有 $p_k - p_{k-1} < 0$, 从而 $2\Delta_k > \Delta_k + \Delta_{k-1} \geq p_k$ 。综上可得 $s(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上满足定理 2, 证毕。

引理 2 若 $\{(x_i, y_i) | l \leq i \leq k\}$ 是极大增凸子集, $s_{i+1}(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上不恒单增, 则通过一次加密区间 $[x_i, x_{i+1}]$, 可使函数 $s_{i+1}(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上单增。

证明 由极大增凸子集定义知 $\Delta_i > \Delta_{i+1}$ 。若 $\Delta_i < \Delta_{i+2}$, 则 $p_{i+1} - p_i > 0$, 但 $2\Delta_{i+1} > p_i$ 不一定成立, 从而 $s_{i+1}(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上不满足定理 2, 不具有单增性。

注意到式(8), 知 $2\Delta_{i+1} > p_i$ 等价于 $\Delta_i < 2\Delta_{i+1} + \Delta_{i+1} \frac{h_{i+1}}{h_i}$, 当 Δ_{i+1} 与 h_{i+1} 固定时, 把区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 细分为 $[x_i, x']$ 与 $[x', x_{i+1}]$, 其中 (x', y') 为细分点。细分后 h_i 变小, 从而不等式 $\Delta_i < 2\Delta_{i+1} + \Delta_{i+1} \frac{h_{i+1}}{h_i}$ 成立。对 $\Delta_i > \Delta_{i+2}$ 可进行类似证明。证毕。

引理 3 若 $\{(x_i, y_i) | r \leq i \leq q\}$ 是极大增凹子集, 则 $s(x)$ 仅在区间 $[x_{q-1}, x_q]$ 上可能不单增, 通过一次细分加密区间, 可使 $s(x)$ 在其上单增。

证明方法 同引理 1、引理 2 类似。

由上引理易得定理 3。

定理 3 若插值数据 D_n 严格增, 则由式(2)、式(3)给出的 C^1 连续的二次样条插值函数 $s(x)$ 严格增。

在实际计算中, $\beta_i (i=1, \dots, n)$ 由下式给定:

当 $p_i - p_{i-1} > 0$ 时

$$\beta_i = \frac{1}{2} \left(\max \left\{ 0, \frac{p_i - 2\Delta_i}{p_i - p_{i-1}} \right\} + 1 \right) \quad (9)$$

当 $p_i - p_{i-1} < 0$ 时

$$\beta_i = \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{2p_i - 2\Delta_i}{p_i - p_{i-1}} \right\} \quad (10)$$

$$\alpha_i = 1 - \beta_i \quad (11)$$

下面简要给出构造保单调插值的算法步骤。

保单调插值(算法 1)

(1) 输入数据 $D_n = \{(x_i, y_i) | i=0, 1, \dots, n\}$, 计算

$$l_i = [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta_i = (y_i - y_{i-1})/h_i$$

(2) 计算斜率

若 x_i 不是极值点且不是端点, 则 p_i 由式(8)给出。

若 x_i 是极值点, 则 $p_i = 0$ 。

若 x_i 是端点, 则

$$p_i = \frac{3\Delta_i - p_2}{2}, p_n = \frac{3\Delta_n - p_{n-1}}{2}$$

(3) 依定理 2 找出需加密的区间。

(4) 由式(9)~(11)及式(1)计算 β_i, α_i, ξ_i 。

(5) 根据式(4)~(7)计算 a_i, b_i, π_i, η_i 。

对保单调的二次样条插值(算法 2), 类似于单增插值的推导, 可得相关结论。

4 保单调的二次样条插值

4.1 保局部单调的二次样条插值算法

约定: 当 $\Delta_i \Delta_{i+1} < 0$ 时, 则 x_i 是 D_n 中的极值点, 取 $p_i = 0$ 。一般地, D_n 并非整体单调, 而是被极值点分为若干个单调子集。对每单调子集, 分别调用相应算法即可。对多个插值节点共线情形, 处理方法可参见文献[5]。具有严格保局部单调的样条插值, 算法如下。

保单调样条插值(算法 3)

(1) 输入数据 $D_n = \{(x_i, y_i) | i=0, 1, \dots, n\}$ 。

(2) 设标志 $flag$: $flag = 1$ 表示单增, $flag = -1$ 表示单减。

(3) 若 $flag = 1$: 找出单增子集, 调用算法 1, $flag$ 变号。

(4) 若 $flag = -1$: 找出单减子集后, 调用算法 2, $flag$ 变号。

(5) 若数据 $D_n = \{(x_i, y_i) | i=0, 1, \dots, n\}$ 处理完毕, 结束; 否则, 转至步骤 3。

4.2 最大加密次数

显然, 极大增凸子集或极大增凹子集中的点数

至少为3。若某极大增凸子集或极大增凹子集中的点数为3,不妨设为 $A = \{(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})\}$ 。利用定理2找出不满足单调性条件的子区间,对其进行一次加密,加密点的选择不破坏原有的凸凹与单调性。这样,极大增凸子集或极大增凹子集A就含有4个插值节点。由引理2与引理3知,再加密一次就满足单调性条件,故一个区间至多加密2次。另外,当数据 $D_n = \{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \dots, n\}$ 很好反映物体轮廓时,极大增凸子集或极大增凹子集中的点数往往大于3,往往一次加密即可。对单减情形进行类似讨论,可得相应结论。

4.3 加密点的选择

以加密极大增凹子集 $\{(x_i, y_i) | x_i < x_{i+1}, y_i < y_{i+1}, r \leq i \leq q\}$ 中的区间 $[x_{q-1}, x_q]$ 为例,说明加密点选择的方法。当 $\Delta_{q-1} > \Delta_{q+1}, p_q - p_{q-1} < 0$ 时,若 $s(x)$ 在区间 $[x_{q-1}, x_q]$ 上不满足单调性条件,即 $2\Delta_q > p_q$ 不成立,注意到式(8),即为下式不成立:

$$\Delta_{q+1} < 2\Delta_q + \Delta_q \frac{l_{q+1}}{l_q} \quad (12)$$

需加密区间 $[x_{q-1}, x_q]$ 以使 $2\Delta_q > p_q$ 成立,即使式(12)成立。选取的加密点 (x', y') 应能保持数据的凸凹性与单调性,即加密点 (x', y') 应满足下式:

$$\Delta_q < \frac{y' - y_q}{x' - x_q} < \Delta_{q+1} < \frac{y' - y_{q+1}}{x' - x_{q+1}} < \Delta_{q+2} \quad (13)$$

易知直线 l_q, l_{q+1}, l_{q+2} 所围成的三角形内任一点满足式(13)。只需在三角形区域内选取一点满足式(12)即可。当 l_q 与 l_{q+2} 的交点 $x > \frac{1}{2}(x_q + x_{q+1})$ 时,令 $x' = \frac{1}{2}(x_q + x)$; 否则,令 $x' = x_0$ 。设直线 $x = x'$ 与 l_q, l_{q+1} 的两交点的纵坐标分别为 y_q, y_{q+1} , 令 $y' = \frac{1}{2}(y_q + y_{q+1})$, 选取 (x', y') 为加密点,若式(12)在 $[x_{q-1}, x']$ 上成立,停止;否则令 $y' = y_{q+1}$,再令 $y' = \frac{1}{2}(y_q + y_{q+1})$,直至式(12)成立。

5 数值实验

实例1 已知插值数据如表1所示。

表1 插值数据

Tab.1 Interpolation data

x	2	4	6	8	10	12	14	15	16	17
y	14	12	9	4	6	69	10	8	9	7

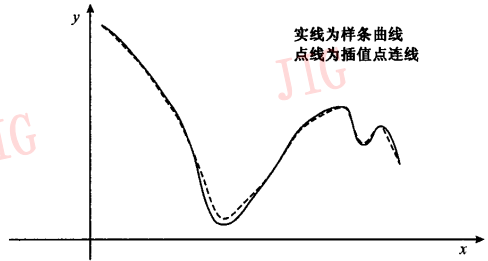


图1 算法3得到的样条曲线

Fig. 1 Spline interpolant according to the arithmetic 3

按算法3所得的样条函数图形如图1所示,其中实线为样条曲线,点线为插值点连线。由图1可看出,样条函数不仅具有好的保单调性,且有很好的保凸凹性。

实例2 在函数 $y = \sin(2x) + 150$ 上取12个点,依算法3所得到的二次样条函数图形如图2所示。不难看出样条函数不仅具有保单调性,且有很好的保凸凹性。事实上,若算法3中的 β_i 满足保凸凹性条件,则所得到的样条函数同时具有保单调性与保凸凹性。

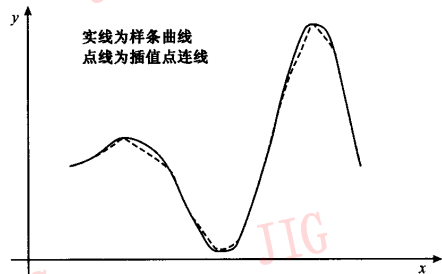


图2 由算法3得到的样条曲线

Fig. 2 Spline interpolant according to the arithmetic 3

6 结论

基于区间加密的 C^1 连续保局部单调的二次样条插值方法,相对于其他方法的优点是算法简单、可自主选择加密点,不需人为控制。另外,本文处理节点斜率的方法可应用到高次保形样条插值与保形曲面样条插值等。

参考文献 (References)

1 Clements J C. Convexity-preserving piecewise rational cubic

- interpolation[J]. The Society for Industrial and Applied Mathematics on Numerical Analysis, 1990, 27(4):1016 ~ 1023.
- 2 Clement J C. A convexity-preserving C^2 parametric rational cubic interpolation [J]. Journal of Numerical Mathematics, 1992, 63: 165 ~ 171.
 - 3 Archer J C, Gruyer E Le. Two shape preserving lagrange C^2 -interpolants[J]. Journal of Numerical Mathematics, 1993, 64:1 ~ 11.
 - 4 Jochen chmidt W S, Walter Heb. An always successful method in univariate convex C^2 Interpolation [J]. Journal of Numerical Mathematics, 1995,71(2):237 ~ 252.
 - 5 Schumaker L L. On shape-preserving quadratic spline interpolations [J]. The Society for Industrial and Applied Mathematics on Numerical Analysis, 1983, 20(4):856 ~ 864.
 - 6 Fang Kui, Tan Jianrong, Zhu Guoqing. An algorithm for constructing C^2 shape-preserving or monotonicity-preserving interpolating polynomial spline. Journal of Computer Aided Designing & Computer Graphics, 1996,8(5):361 ~ 367. [方途,谭建荣,朱国庆. C^2 保单调或保形的插值多项式样条算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,1996,8(5):361 ~ 367.]
 - 7 Heb W, Schmidt J W. Convexity preserving interpolation with exponential splines[J]. Computing, 1986, 36:335 ~ 342.