

小波域上图像非线性扩散滤波

石澄贤^{1,2)} 王洪元²⁾ 夏德深²⁾

¹⁾(南京理工大学计算机系 603 室,南京 210094) ²⁾(江苏工业学院信息科学系,常州 213016)

摘要 提出一个小波域上图像扩散滤波恢复新模型。主要思想是把原图像作为最精细尺度下的小波子带,根据噪声分布的特点,导出保护较大尺度下信息的泛函模型代替小波阈值除噪,对泛函求变分得 Euler-Lagrange 方程。新的滤波方法能避免小波阈值除噪的伪 Gibbs 现象,改进了同类型非线性扩散方程滤波的效果。利用可加算子分裂(AOS)格式求非线性扩散方程的数值解。实例的数值计算说明对图像滤波和保护边缘的有效性。

关键词 图像滤波 小波域 非线性扩散

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)12-1449-05

Anisotropic Diffusion Filtering for Image Restoration on Wavelet Domain

SHI Cheng-xian^{1,2)}, WANG Hong-yuan²⁾, XIA De-shen²⁾

¹⁾(Department of Computer Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

²⁾(Department of Information Science, Jingsu Polytechnic University, Changzhou 213016)

Abstract In image processing, removal of noise without blurring the image edges is a difficult problem. Typically, noise is characterized by high spatial frequencies in image. A new method for image denoising is proposed on wavelet domain, based on image multiresolution decomposition and anisotropic diffusion filtering. The original image can be regarded as high resolution wavelet sub-sampling one. A functional of preserved lower resolution information is presented. It is used to substitute for wavelet threshold denoising on image. The Euler-Lagrange equations are deduced from the variational principle by the image functional model. Image is denoised and enhanced simultaneously. The numerical schemes of the equation is based on additive operator splitting (AOS) scheme. Some experimental results demonstrate the validity of the new method for image denoising and edge preserving. And this method is also compared with other denoising methods, such as wavelets threshold filtering and anisotropic diffusion filtering. The numerical results of the application on images demonstrate the good performance of the new method.

Keywords image filtering, wavelet domain, anisotropic diffusion equation

1 引言

许多信号和图像受到噪声的干扰。图像除噪一直是计算机视觉领域的一个重要研究课题。信号和图像除噪、锐化等措施就是对一个退化的图像进行恢复。图像和信号可以作为一个分段光滑且明显不连续的函数来处理。设 u_0, u 定义在有界开集 $\Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (一般 Ω 是一个矩形), u_0 是经变换或退化的图像, u 是原始图像。

$$u_0 = Gu + \eta \quad (1)$$

其中, η 是一个高斯噪声, G 为与 u 相对独立的斑点噪声随机变量。

模型要从观察图像 u_0 找出真实图像 u , 要求恢复原图的光滑性和保护主要的不连续点。现在已经提出了各种解决方案, 最近几年发展起来的有前景的二种方法是小波阈值除噪^[1,2]和总变差极小方法^[3~6]。把图像灰度值作为小波系数, 利用小波分析的多分辨关系建立不同尺度下的系数关系^[7,8], 提出了一种保护大尺度图像信息的滤波正则化泛函模型。由变分方法导出非线性扩散方程, 利用可加算子分裂(AOS)格式^[9]求解偏微分方程。选取合适的偏

微分方程非线性扩散系数可以更好地去除噪声及保护图像的细节和边缘。

2 小波阈值除噪和各向异性扩散除噪

小波阈值除噪是通过对比带噪声的图像进行小波分解,图像的能量主要集中在尺度大的子带,而尺度小的高频子带能量较低。认为在小波域上,绝对幅值比较大的小波系数其主要成份是信号提供的,而绝对值比较小的小波系数是噪声提供的。小波的阈值除噪就是利用软阈值或硬阈值抑制小波系数,在保持小波系数正负性(可以为零)不变的条件下,使小波系数的绝对值比原来的小波系数绝对值小。设一维正交小波函数和尺度函数分别为 $\psi(x),\varphi(x)$ 。记

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{k/2}\psi(2^kx - j)$$
$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{k/2}\varphi(2^kx - j)$$

$\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 组成 $L_2(I)$ 空间的正交小波基,这里 $I=[a, b]$ 。对于任意的函数 $f(x) \in L_2(I)$ 可表示成

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \geq K} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,K} \rangle \varphi_{j,K}(x) \tag{2}$$

其中, $\forall u, v \in L_2(I), \langle u, v \rangle = \int_I u(x)v(x)dx$ 记 $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$, 由 Mallat^[8] 提出的多分辨分析建立了不同尺度下小波系数及尺度系数的快速算法。设 h_j, g_j 分别为低通滤波器和高通滤波器系数,信号的分解算法为

$$c_{i,k-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j-2i}c_{j,k}$$
$$d_{i,k-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{j-2i}c_{j,k}$$

信号的重构算法为

$$c_{i,k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [p_{i-2j}c_{j,k-1} + q_{i-2j}d_{j,k-1}] \tag{4}$$

其中, p_j, q_j 是 h_j, g_j 对偶序列。

对于 2 维图像信号可以分解成 4 个子带:LL, LH,HL,HH。其中,LL 表示垂直和水平方向都是低频子带 LH 表示水平方向低频、垂直方向高频子带, HL 表示水平方向高频、垂直方向低频子带,HH 表示垂直方向和水平方向高频子带。反之利用 4 个子带, LL,LH,HL,HH 可以重构 2 维图像信号。

小波阈值的硬阈值算子和软阈值算子^[1,2] 分别定义为

$$\tau(x) = \begin{cases} x & |x| \geq \lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases} \tag{5}$$

和

$$\tau(x) = \begin{cases} x - \text{sig}(x)\lambda & |x| \geq \lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases} \tag{6}$$

利用小波阈值信号除噪简单地表示为

$$u = \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \geq K} \tau(\langle u_0, \psi_{j,k} \rangle) \psi_{j,k}(x) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle u_0, \varphi_{j,K} \rangle \varphi_{j,K}(x) \tag{7}$$

因为小波阈值算法简单且容易使用,小波系数的选择接近一定意义下的最佳选择,故工程技术人员广泛使用这一算法。可是小波阈值方法仍是一种正则化方法,小波系数的收缩使重构图像在边缘附近产生摄动。这种摄动很接近傅里叶阈值所表现出来的 Gibbs 现象。当然在范围和强度上都要比傅里叶阈值引起的小,称这种现象为伪 Gibbs 现象。这种现象影响图像的可视质量。另一方面,全部小的小波系数同时被删除,导致边缘的模糊和细节的丢失。

总变差除噪^[3-6]是与小波阈值除噪完全不同的图像除噪和增强方法。设 $u \in L_2, F(u)$ 是一给定的泛函,图像恢复作为如下正则化问题的解

$$\min_u F(u) \text{ s.t. } \|u - u_0\| = \sigma^2 \tag{8}$$

经常要求具有对恢复图像的光滑性。利用 Lagrange 定理,式(8)的最小化问题由下式给出

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ F(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - u_0\|^2 \right\} \tag{9}$$

其中, $\| \cdot \|$ 是 L_2 空间的范数, λ 是一个非负参数。 $F(u)$ 是限制性解的正则项,正则化参数 λ 是控制最小化正则项和另一最小化数据拟合项之间的平衡,确保限制条件 $\|u - u_0\| = \sigma^2$ 被满足。一般参数 λ 取估计值或先验值。如果 λ 的值大,恢复图像 u 可能满足方程 $u = u_0$ 的精确度高,但是会出现很大的波动,除噪声效果不理想。如果 λ 的值小,可以得到光滑的恢复图像 u ,但是恢复图像 u 是一个不精确的解,图像噪声被删除的同时细节也被平滑。 λ 的取值是一个困难的问题。原则上,参数 λ 可以作为 Lagrange 乘子来计算,但实际因计算的复杂性很少被采用。变分积分 $F(u)$ 的选择是一个至关重要的问题。经典的图像除噪泛函是 Dirichlet 积分成总变差积分,定义如下:

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$
$$TV = \int_{\Omega} |\nabla u| dx \tag{10}$$

其中, ∇u 表示函数的梯度。这些泛函的推广形式是下列的变分积分^[6]

$$F(u) = \int_{\Omega} \xi(|\nabla u|) dx \quad (11)$$

其中, $\xi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个光滑函数。利用式(11)得下列泛函

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} \xi(|\nabla u|) dx + \frac{\lambda}{2} \|u - u_0\|^2 \right\} \quad (12)$$

利用变分原理可以导出问题式(12)的 Euler-Lagrange 方程作为最小化问题满足的条件:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\xi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) + \lambda(u - u_0) = 0 \quad (13)$$

同时满足均匀 Neumann 边界条件。

这一问题也可以作为梯度下降流来求解

$$u_t = \nabla \cdot \left(\frac{\xi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) - \lambda(u - u_0) \quad (14)$$

同时满足均匀 Neumann 边界条件。上述偏微分方程解的特点是在平滑噪声的同时增强边缘。但是,这一方法的数值解在图像上容易产生阶梯效果。

通过小波和总变差除噪方法的结合,提出一个新的除噪方法。利用小波分解信号和总变差除噪的优点,这一方法是在保护大尺度的信息下进行各向异性扩散滤波。

3 小波域上的扩散滤波模型

把图像的灰度值作为不同尺度下的小波系数处理。具体地讲,设 Ω 是 \mathbf{R}^2 的一个开集,一般是一个矩形, u_0 是一个图像, $u_0: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 。图像信号是 2 维离散函数,把图像信号作为最精细尺度下的尺度系数。利用多分辨分析把精细尺度下的函数进行分解。设 u_{-1} 是 u_0 第 1 层分解的尺度系数。由式(3)得到分解关系式

$$c_{i,j,k-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{l-2j} h_{k-2i} c_{i,j,k} \quad (15)$$

其中, $k=0, -1, -2, \dots, c_{i,j,0} = u_0(i, j)$ 。

上式写成小波变换的形式为 $Wu_0 = u_{-1}$, 当小波具有有限紧支撑时,式(15)给出了观察图像 u_0 和分解系数 u_{-1} 的关系是有限维线性变换。若观察图像 u_0 带有噪声, u_{-1} 也将带有噪声。但是小波分解是一种特殊的移动平均值,噪声将得到抑制和平滑。设恢复图像 $u \in L_2$, 要求满足:

$$\|Wu - u_{-1}\| = \sigma_1^2 \quad (16)$$

其中, σ_1 为 u_1 的噪声标准方差。

代替小波阈值方法对小波系数的收缩处理,直接

对尺度系数进行滤波,使小波尺度系数满足下面给出的正则化条件。设 $u \in L_2$, $F(u)$ 是一给定的泛函

$$\min_u F(u) \quad \text{s. t. } \|Wu - u_{-1}\| = \sigma_1^2 \quad (17)$$

利用 Lagrange 定理,提出图像除噪的模型是寻找下列泛函最小化的图像函数 u 。

$$\int_{\Omega} \xi(|\nabla u|) dx + \frac{\lambda}{2} \|Wu - u_{-1}\|^2 \quad (18)$$

式(18)能在保证图像的大尺度信息被拟合的同时通过图像梯度的正则项进行滤波。通过变分原理可导出最小化问题的 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \left(\frac{\xi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) - \lambda W^* (Wu - u_{-1}) \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (19)$$

同时满足均匀 Neumann 边界条件,其中, W^* 为 W 的伴随算子。

如果 u_1 噪声污染仍很严重,可以把 u_1 作为恢复图像先利用式(19)进行除噪,再利用除噪处理后的图像恢复图像 u 。这一过程可以反复进行,但是一般到第 3 层就能满足要求。因为式(19)中的 u_{-1} 噪声减少,扩散方程第 2 项能起到更好的作用。

4 非线性扩散方程的数值解和实验结果

4.1 非线性扩散方程的数值解法

AOS (additive operator splitting) 格式是由 Weickert 等人^[9]引入的。这一计算格式是在图像处理中求解非线性扩散方程的无条件稳定数值解法。利用 AOS 格式求解扩散方程式(19)。设一维非线性扩散方程

$$u_t = \nabla \cdot (g(|\nabla u|) \nabla u)$$

其中, $g(x) = \xi'(x)/x$ 。

上式最简单的显式离散化如下:

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\tau} = \sum_{j \in N(i)} \frac{g_j^{(k)} + g_i^{(k)}}{2h^2} (u_j^{(k)} - u_i^{(k)}) \quad (20)$$

其中, $N(i)$ 是像素点 i 的两邻近点的集合(边界像素仅有一个邻近点)。 $g_j^{(k)}$ 为 $g(|\nabla u(x_i, t_k)|)$, 把式(20)写成矩阵形式:

$$u^{(k+1)} = [I + \tau A(u^{(k)})] u^{(k)} \quad (21)$$

显式格式是有条件稳定,限制时间步长只能取小的步长。下面的半隐式是基于向后 Euler 格式

$$u^{(k+1)} - u^{(k)} = \tau A(u^{(k)}) u^{(k+1)}$$

得

$$u^{(k+1)} = [I - \tau A(u^{(k)})]^{-1} u^{(k)} \quad (22)$$

这是无条件稳定的。虽然在式(22)中要求逆矩阵,计算的代价是昂贵的计算量 $O(N^3)$,但是式中的矩阵是三对角占优的,计算的量可以降为 $O(N)$ 。直接可以把一维的半隐式扩展到多维的情形。

$$u^{(k+1)} = [I - \tau \sum_{l=1}^m A_l(u^{(k)})]^{-1} u^{(k)} \quad (23)$$

其中, m 是坐标的维数, $A_l(u^{(k)})$ 是对应第 l 坐标轴的偏导数产生的矩阵。 $\sum_{l=1}^m A_l(u^{(k)})$ 不再是三对角占优,其逆矩阵的计算量是很大的,且不是无条件稳定的迭代格式。对向后 Euler 格式进行修改,提出可加算子分裂(AOS)格式:

$$u^{(k+1)} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m [I - m\tau A_l(u^{(k)})]^{-1} u^{(k)} \quad (24)$$

这一迭代格式是无条件稳定的,可以有效地求解非线性扩散方程。

对于式(19)可加算子分裂(AOS)格式为

$$u^{(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 [I - 2\tau A_l(u^{(k)})]^{-1} \times (u^{(k)} - \lambda\tau W^* W u^{(k)} + \lambda\tau W^* u_{-1}) \quad (25)$$

$$u^0 = u_0$$

同时满足均匀 Neumann 边界条件。

4.2 实验结果

用本文提出的方法获得的一些实验结果。实验中选择 symlets 小波。

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x/s)^2}} \quad (26)$$

图 1(a)是 Lena 原图像;图 1(b)是加高斯噪声后的图像,SNR=9.17;图 1(c)是本文方法利用 symlet3 小波,演化时间 $t=0.9, s=0.01, \lambda=0.03$ 小波一层分解的扩散滤波图像;图 1(d)为演化时间 $t=1.5$ 的滤波图像;图 1(e)是扩散方程式(14) $t=0.9, s=0.01, \lambda=0.01$ 除噪的结果;图 1(f)是利用 symlet3 小波,分解 4 层软阈值除噪的结果。从目视效果看,本文方法比小波软阈值除噪和扩散方程式(14)有更好的除噪效果,同时图像的边缘得到了较好的保护。图 1(g)是受乘性斑点噪声污染的图像;图 1(h)是采用本文方法利用 symlet3 小波,演化时间 $t=0.8, s=0.01, \lambda=0.04$ 小波一层分解的扩散滤波图像,可以看到斑点噪声得到了抑制。对高斯噪声和斑点噪声的实验结果如表 1 所示,表中的数据是几种不同方法滤波的信噪比。

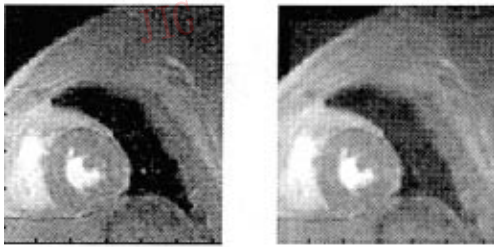


图 1 Lena 图像处理结果

表 1 图像滤波结果的信噪比

噪声类型	噪声图像	软阈值	方程式(14)	本文方法
高斯噪声	6.25	10.33	10.77	11.22
高斯噪声	9.17	12.04	11.47	12.59
斑点噪声	8.84	11.68	11.40	11.95

从表 1 中的实验结果(SNR)看,本文方法信噪比得到较大的提高,大于小波软阈值除噪和扩散方程式(14)除噪的信噪比。图 2(a)是医学核磁共振(MR)的心脏切片图像,图 2(b)是本文的方法处理



(a) MR 原图

(b) 本文方法滤波结果

图 2 心脏切片

的图像,演化时间 $t=0.5$, $s=0.01$, $\lambda=0.2$, 图像的质量得到了提高。

5 结 论

利用小波分解和正则化方法,把原图像作为最精细尺度下的小波子带,导出一个去噪的非线性扩散方程。该扩散滤波适用于受高斯噪声和乘性斑点噪声污染图像的去噪,能较好地保持目标的结构。本方法和小波阈值除噪相比具有更好的除噪效果,和方程式(14)除噪模型相比除噪效果也得到了明显改善。这是图像除噪的一种有效方法。但该扩散方程对椒盐噪声滤波不是很理想,对卷积干扰产生的模糊图像的恢复效果不明显。另外,对噪声扩散平滑有一些痕迹,消除扩散痕迹是需要进一步研究的问题。

参 考 文 献

- 1 Donoho David L. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613~627.
- 2 Chambolle A, DeVore R, Lee N Y, *et al.* Nonlinear wavelet image processing: Variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 319~334.
- 3 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629~639.

- 4 Alvarez L, Lions P L, Morel J M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(3): 845~866.
- 5 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, 60: 259~268.
- 6 Vese L. A study in the BV space of a denoising-deblurring variational problem [J]. Applied Mathematics Optimization, 2001, 44(2): 131~161.
- 7 Cohen R, Daubechies I, Vial P. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1993, 1(1): 54~81.
- 8 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition; the wavelet representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7): 674~693.
- 9 Weickert J B. Ter Haar Romeny, Viergever M. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 398~410.



石澄贤 1961年生。副教授、博士研究生。1988年于西北大学获理学硕士学位。主要研究方向为模式识别和图像处理。

E-mail: shicx518@163.com



王洪元 1960年生。副教授。2004年毕业于南京理工大学,获博士学位。研究方向为图像处理、自动控制。



夏德深 1941年生。教授、博士生导师。毕业于法国鲁昂大学,获博士学位。主要研究方向为图像处理、卫星遥感,模式识别。发表论文 80 余篇、专著 4 部。