

有序子集最小二乘 OS-LS 图像重建迭代算法

刘力 印胤 单保慈

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100049)

摘要 为推导一种新的快速图像迭代重建方法, 首先将有序子集(ordered subsets, OS)技术应用到最小二乘图像重建迭代算法(least square reconstruction, LS); 然后对仿真 Phantom 模型数据和实际医用正电子发射断层成像仪(PET)数据进行重建, 并研究了在不同子集划分下的重建结果, 同时分析比较了不同子集的选取对 OS-LS 重建图像质量以及重建收敛速度的影响。重建结果表明, 这种基于有序子集的最小二乘图像重建迭代算法(OS-LS)具有较高的重建图像质量和较短的计算时间, 相对于传统 LS 算法的重建, OS-LS 的收敛速度加速了约 L 倍(L 为子集个数), 其重建图像质量也好于传统的滤波反投影(FBP)方法的重建, 可应用在 PET 图像重建中。

关键词 计算机图像处理 图像重建 子集

中图分类号: R814.43 TP39141 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)05-0628-05

Study on Ordered Subsets-least Square Reconstruction of Image

LIU Li, YIN Yin, SHAN Bao-ci

(Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract In order to construct a new practical and fast iterative image reconstruction method, the ordered subsets(OS) technique is combined with the least square(LS) reconstruction of images in medical tomography. Reconstruction of simulated data and real positron emission tomography(PET) data shows that so accelerated OS-LS iterative image reconstruction method has a rapid convergent speed and higher spatial resolution. The reconstructed image quality and convergence speed by different subsets order are studied. As compared to the traditional LS reconstruction, OS-LS is L times faster, where L is the number of subsets, and the reconstructed images by OS-LS are better than the conventional FBP(filtered back-projection) as well. The conclusion is that the so proposed OS-LS reconstruction method can be used in real PET image reconstruction.

Keywords computer image processing, image reconstruction, subsets

1 引言

医用断层扫描仪包括 CT、SPECT(单光子发射断层扫描仪)、正电子发射断层成像仪(positron emission tomography, PET)等, 由这些探测器测量得到的投影数据需重建为断层图像才能被用于临床诊断。常用的图像重建算法有解析法, 如滤波反投影(filtered back-projection, FBP)重建^[1]以及迭代法, 如最大似然期望法(maximum likelihood expectation-

maximization, ML-EM)^[2]、有序子集最大期望值方法(ordered subsets-expectation maximization, OS-EM)^[3,4]、最小二乘图像重建迭代算法(least square reconstruction, LS)与加权最小二乘图像重建迭代算法(weighted least square reconstruction, WLS)等等^[5], 其中迭代法具有图像质量好、空间分辨率高、适合于信息量相对不足的采集条件、可方便地根据具体成像条件引入与空间几何有关的或与测量值大小有关的约束和条件因子等优点, 但是迭代法收敛速度慢、运算时间长、运算量大, 这些缺点极大地限

基金资助: 国家自然科学基金项目(90209030)

收稿日期: 2004-03-22; **改回日期**: 2004-12-20

第一作者简介: 刘力(1962~), 男, 中国科学院高能物理研究所副研究员, 1999年获中国科学院高能物理研究所博士学位。长期从事医学图像处理和断层图像重建的研究工作, 现主要从事迭代法图像重建的研究与应用, 已发表论文 30 余篇。E-mail: liuli@mail.ihep.ac.cn

制了它在临床中的应用。近年来,一种具有较高重建图像质量和较短计算时间的 OS-EM 重建算法已经成功地应用在临床 PET 和 SPECT 断层图像重建中。本文将有序子集 OS 技术应用到一类最小二乘图像重建迭代算法中,提出了基于有序子集的最小二乘图像重建迭代算法(OS-LS)及其加权形式(OS-WLS)。仿真 Phantom 模型数据和实际 PET 数据的重建表明,OS-LS 与 OS-WLS 算法具有较高的空间分辨率、较好的抗噪声能力和较短的计算时间,可应用在 PET 图像重建中。相对于传统的 LS 算法重建,OS-LS 算法的收敛速度加速了约 L 倍(L 为子集个数),其重建图像质量也优于传统的滤波反投影重建方法。本文还通过研究在不同划分子集下的重建结果,分析比较了不同子集的选取对 OS-LS 与 OS-WLS 算法重建图像质量以及重建收敛速度的影响。

2 OS-LS 迭代算法

为了加快迭代法的图像重建收敛速度,减少运算时间,提高重建图像质量,人们提出了很多快速图像重建算法,其中有序子集最大期望值法 OS-EM 是很有应用前景的一种快速迭代重建算法,它是在最大似然期望法 ML-EM 的基础上引入 OS 加速机制而发展起来的。原则上讲,OS 加速技术可应用于所有迭代重建法中,本文将 OS 技术引入到一类 LS 迭代重建算法中。

传统的加法 LS 图像重建迭代算法计算式为^[1]

$$f^{(k)}(i,j) = f^{(k-1)}(i,j) + \frac{\alpha}{\sum_{n,m} p^2(i,j,n,m)/\sigma_{n,m}^2} \times \sum_{n,m} p(i,j,n,m) \frac{d(n,m) - \hat{d}(n,m)}{\sigma_{n,m}^2} \quad (1)$$

其中, (i,j) 为像素坐标, $f^{(k)}(i,j)$ 为第 k 次迭代图像中 (i,j) 像素的近似值,它反映了与像素 (i,j) 对应的肌体中放射性活度之大小(相对), (n,m) 为探测器空间坐标, $d(n,m)$ 为第 n 个投影角度时,第 m 探测单元上检测到的(符合)光子数,而 $\hat{d}(n,m) = \sum_{i,j} p(i,j,n,m) f^{(k-1)}(i,j)$ 为其投影期望值, $p(i,j,n,m)$ 为第 (i,j) 像素在第 n 个投影角度时,落入第 m 探测单元的几率, α 为松弛因子。上述迭代算法旨在寻找满足如下投影差的最小二乘原理的估计解:

$$\sum_{n,m} (d(n,m) - \sum_{i,j} p(i,j,n,m) f^{(k-1)}(i,j))^2 / \sigma_{n,m}^2 \rightarrow \min(\text{极小}) \quad (2)$$

$\sigma_{n,m}^2$ 为针对测量数据而引入的权因子,对等权情况,取 $\sigma_{n,m}^2 = 1$,此时迭代算法叫 LS 算法,若认为测量光子数 d 服从 Poisson 涨落规律,则可取 $\sigma_{n,m}^2 = d(n,m)$,此时算法叫 WLS 算法。

LS 方法在每一次迭代过程中,是使用所有的投影数据对重建图像每一个像素点的值进行校正,其重建图像只被替换一次,而 OS-LS 方法则由于在每一次迭代过程中先将投影数据集 D 按某种顺序分成 L 个子集: $D = \{d_1, d_2, \dots, d_L\}$,然后用每一个子集数据对重建图像各像素点值进行修正以后,重建图像便被更新一次,这样所有的子集运算一遍,就称为一次迭代过程,其中重建图像被更新 L 次,所以 OS-LS 方法具有加快收敛的作用。

令 $\hat{f}^{(0)}$ 为初始图像, $\hat{f}^{(k)}$ 为 k 次迭代后的图像,具体算法如下^[6]:

(1) $k=0$, 初始化 $\hat{f}^{(k)}$ 。

(2) 重复下面步骤直到 $\hat{f}^{(k)}$ 收敛或迭代至给定次数

① $f_l = \hat{f}^{(k)}, k = k + 1$;

② 对子集 $d_l (l=1, \dots, L)$ 做投影,即

计算图像与每个子集 d_l 对应的投影角度 n , 探测器 m 上得到的第 l 个子集投影期望值为

$$\hat{d}_l(n,m) = \sum_{i,j} p(i,j,n,m) f_l(i,j) \quad n,m \in d_l \quad (3)$$

反投影:对每一个像素依式(1)进行一次修正。

这样共进行 L 次修正,其中对 n,m 求和是在各自子集内进行。

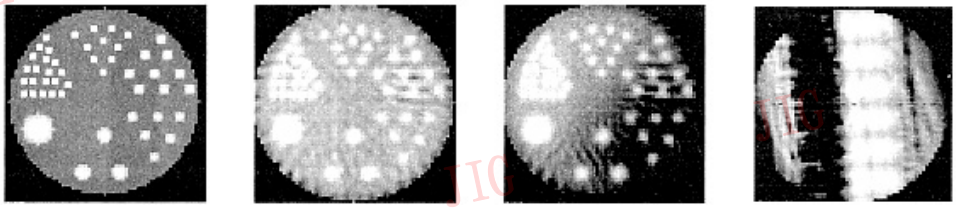
③ $\hat{f}^{(k)} = f_{L+1}$ 。

OS-LS 算法中,子集的选取和划分有很多种。对 PET 来讲,由于各个探测器上测得的符合光子数(即投影数据)是在符合判选之后同时获得的,因此应在总计数完成以后再划分子集。

3 重建计算

首先类似 Jaszczak 模型,构造一个 64×64 大小的仿真 Phantom 切片,仿真模型中的圆形区域分布着大小不等,呈指数衰减的点状源,最大值为 35 counts/pixel(见图 1(a))。

仿真 Phantom 切片重建时,在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 范围选取的观测角度个数为 32,探测器单元(bin)的个数为 64,平均计数约为 350 counts/bin,该仿真模型为模拟的实际投影矩阵,投影数据符合 Poisson 随机分



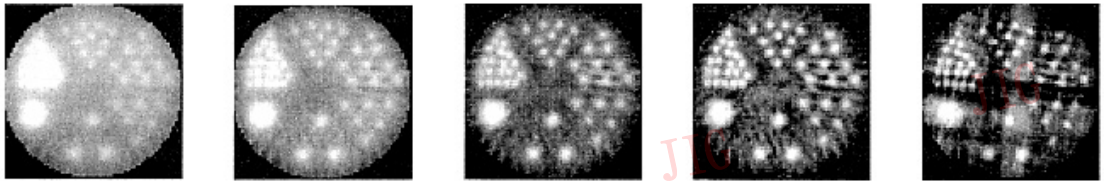
(a) 仿真图 (b) 传统 FBP 重建结果 (c) 大 α 值 LS 重建结果 (d) 32 子集 OS-LS 重建结果

图 1 仿真 Phantom 原图及几种重建结果

Fig. 1 Original phantom image and their reconstructed results

布,它模拟了核医学中较低信息量的断层扫描。为做对比,图 1(b)给出了 FBP(Butterworth 平滑窗,截止频率 0.5,阶数 2)的重建结果。将投影矩阵按观测角度分别划分为 1,2,4,8,16 个子集,其中 1 个子集情况下的 OS-LS 重建就是传统的 LS 算法。重建时,

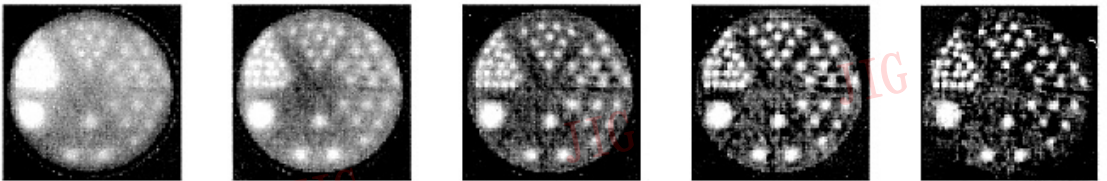
取松弛因子 $\alpha = 0.05$,且不加任何平滑滤波,图 2、图 3 分别为 5 种子集划分方法,经过一次迭代后 OS-LS 算法与 OS-WLS 算法的重建图像,图 4、图 5 分别为 5 种子集划分情况下分别经过 16,8,4,2,1 次迭代后的 OS-LS 算法与 OS-WLS 算法的重建图像。



(a) 子集数为 1 (b) 子集数为 2 (c) 子集数为 4 (d) 子集数为 8 (e) 子集数为 16

图 2 在 5 种子集划分情况下 OS-LS 算法一次迭代重建结果

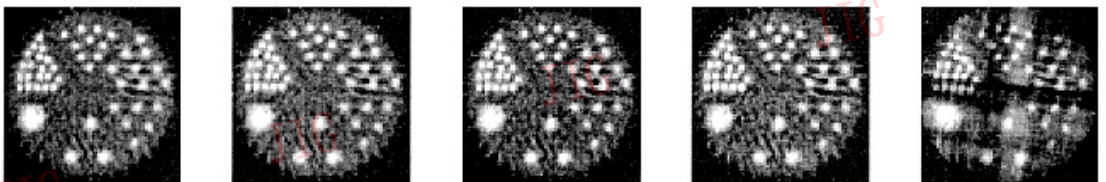
Fig. 2 OS-LS reconstruction by 1 iteration under 5 subset numbers



(a) 子集数为 1 (b) 子集数为 2 (c) 子集数为 4 (d) 子集数为 8 (e) 子集数为 16

图 3 在 5 种子集划分情况下 OS-WLS 算法一次迭代的重建结果

Fig. 3 OS-WLS reconstruction by 1 iteration under 5 subset numbers



(a) 子集数为 1 迭代 16 次 (b) 子集数为 2 迭代 8 次 (c) 子集数为 4 迭代 4 次 (d) 子集数为 8 迭代 2 次 (e) 子集数为 16 迭代 1 次

图 4 在 5 种子集划分情况下不同迭代次数的 OS-LS 算法重建结果

Fig. 4 OS-LS reconstruction by different iteration number k under 5 subset partitions

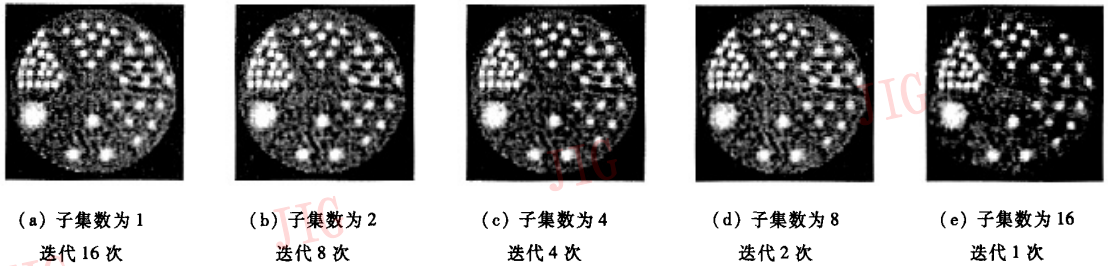


图 5 在 5 种子集划分情况下不同迭代次数的 OS-WLS 重建结果

Fig.5 OS-WLS reconstruction by different iteration number k under 5 subset partition

一次迭代就是将全部投影数据使用一遍,因而不论 L 为何值,其所需计算时间大致一样。从图 3 ~ 图 5 可见,在相同迭代次数下,若子集划分个数增加,则重建图像质量明显改善;若要得到近似同等质量的重建图像,则子集划分个数需增加,其迭代次数可减少。无论投影数据被划分为多少个子集,只要子集划分个数与迭代次数的乘积相同,则重建图像质量也就接近。

对 OS-WLS 算法也有同样结论,其重建图像质量基本上与 OS-LS 算法相同,只是抗噪声干扰能力

更强一些(见图 3, 图 5)。对比图 1 与图 4、图 5 可见,当子集划分个数与迭代次数取值合适时,OS-WLS、OS-LS 算法的重建图像质量好于 FBP 结果,其给出的小点源最大值约为 30,接近真实值 35。

实际 PET 透射数据的重建结果见图 6,该图像进行了一次 3×3 中值滤波。图 6 PET 数据为人体仿真模具某断层 SINO 图(192 观测角度 \times 160 个 bin) 数据。由图 6 可见, $L=4$,迭代次数 $k=1$ 时,就可得到较好重建结果。

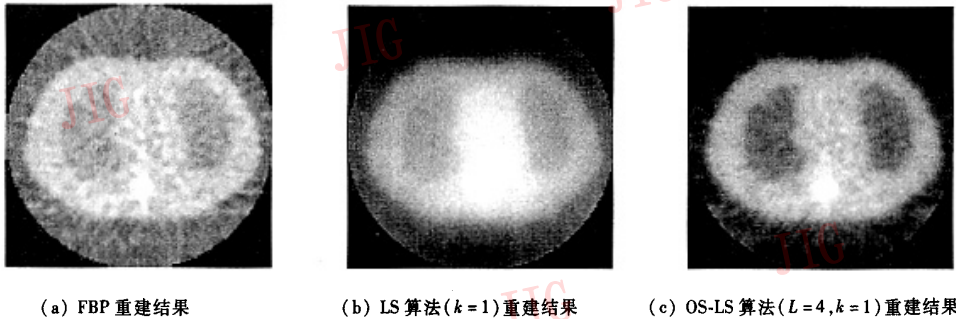


图 6 PET 透射数据的重建结果

Fig.6 Reconstructed results of PET transmission data

4 结果与讨论

为了比较不同划分子集对图像重建收敛速度的影响,参照文献[6]定义的误差参数 E 为

$$E^{(k)} = \sum_{n,m} \left(\sum_{i,j} p(i,j,n,m) f^{(k)}(i,j) - d(n,m) \right)^2 \tag{4}$$

式中, k 为迭代次数,图 7 是不同划分子集 OS-LS 重建过程中,参数 E 随迭代次数变化的曲线,对 OS-WLS 算法也有类似变化规律。

由图 7 可见,随着划分子集个数的增加,参数 E 趋于收敛的速度逐渐加快,所需迭代次数 k 也逐渐

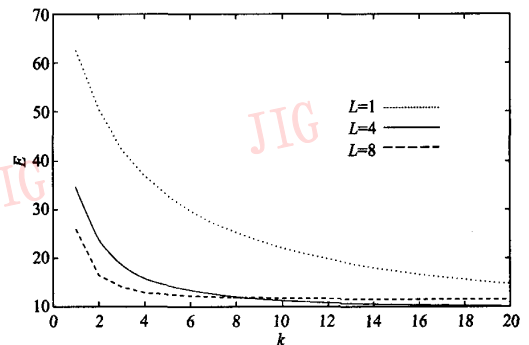


图 7 不同划分子集 OS-LS 重建中,参数 E (相对值)与迭代次数 k 相关变化曲线

Fig.7 The value of error parameter E as a function of iterative number k under 3 subset partitions in OS-LS reconstruction

减少,但子集划分个数并不是越多越好,比如当子集个数为 32 时,图像会严重变形(见图 1(d)),可见,子集划分个数和图像重建质量之间存在均衡关系。以上计算都是针对固定松弛因子 $\alpha = 0.05$ 而进行的,松弛因子的大小也影响 OS-LS 算法收敛速度,若 α 太小,则重建收敛慢,若 α 过大(如本例中为大于 0.07),则图像会严重变形恶化,例取 $\alpha = 0.07$ 时,LS 迭代 4 次的结果见图 1(c),这说明用增大 α 来提高 LS 算法收敛速度是不可取的,而采用 OS 技术才能在提高运算速度的同时,确保最小二乘图像重建迭代算法的重建图像质量。在实际应用中, α 和 L 的范围取决于投影数据的属性,如统计涨落水平、是否经过平滑滤波及重建时间的开支等,一般情况下,要靠经验性地多次尝试选取“最佳”值。对一类属性接近的数据, α 和 L 可基本固定。本文所用数据属于核医学低计数类型, $L = 4/8$ 与 $\alpha = 0.05$ 是较好的参数选择。实践证明,OS-LS 算法可用于核医学和 CT 的图像重建。

参考文献 (References)

- 1 Barret H H. Radiological imaging—The theory of image formation, detection, and processing[M]. Beijing: Academic Press, 1988. [巴雷特. 放射成像——图像形成、探测和处理的理论[M]. 北京: 科学出版社, 1988.]
- 2 Shepp L A, Vardi Y. Maximum likelihood reconstruction in emission tomography [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982, MI-1(2): 113 ~ 122.
- 3 Peter S, Matthias E B, Gunnar B. Subsets and overrelaxation in iterative image reconstruction[J]. Physics in Medicine and Biology, 1999, 44(5): 1384 ~ 1396.
- 4 Hudson H M, Larkin R S. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1994, 13(4): 601 ~ 609.
- 5 Anderson J M M, Mair B A, Rao M, et al. Weighted LS reconstruction methods for PET[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1997, 16(2): 159 ~ 165.
- 6 Wu Zhaoxia, Liu Li, Cai Xinyu, et al. Study of fast iteration reconstruction method OS-EM based on different subsets[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2002, 23(4): 408 ~ 410. [吴朝霞, 刘力, 柴新禹等. 基于不同子集的 OS-EM 快速迭代重建算法研究[J]. 仪器仪表学报, 2002, 23(4): 408 ~ 410.]