

# 基于多尺度边缘表示的图像增强快速算法

翟广涛

(上海交通大学图像通信研究所, 上海 200030)

王欣

(山东大学信息科学与工程学院, 济南 250100)

**摘要** 低对比度结构广泛存在于各种数字图像之中, 研究如何通过后期处理增强数字图像的对比度是很有意义的。灰度图像对比度的高低总是与图像灰度梯度幅值的大小相联系, 受这种思想的启发, 提出了一种基于图像多尺度边缘表示的, 利用对信号小波变换模板大值的拉伸和 Hermite 插值多项式实现的图像增强快速算法。此算法可以实现对噪声的抑制和对图像中不同尺度特征的增强。数值实验结果表明, 该算法增强效果明显, 运算速度快, 是一种实用性较强的图像对比度增强算法。

**关键词** 图像增强 小波变换 多尺度边缘 Hermite 插值多项式

**中图法分类号:** TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)12-1454-05

## A Fast Image Enhancement Algorithm Based on Multi-scale Edges Representation of Images

ZHAI Guang-tao<sup>1)</sup>, WANG Xin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Institute of Image Communication and Information Processing, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

<sup>2)</sup>(School of Information Science and Technology, Shan Dong University, Ji'nan 250100)

**Abstract** Low contrast structure can be found in many kinds of digital images, and it is a meaningful work to find out how to enhance these raw images through digital post-processing. A novel enhancement algorithm based on multi-scale edges representation of images is proposed. This algorithm is motivated by the connection between the contrast of a grayscale image and the gradient magnitude of intensity edges in the neighborhood where the contrast is measured. The undecimated dyadic wavelet transform of the original image is computed firstly by treating the columns and lines of the image separately, and then the local maxima of wavelet transform coefficients are selected out. The reconstruction of the image can be interpreted as an interpolation process, which recovers the wavelet coefficients between two consecutive modulus maxima and then calculates the inverse wavelet transform. As we know, the first derivatives of the modulus maxima are zero, and the Hermite polynomial requires the value of derivatives at the given nodes. Based on these two facts, the wavelet coefficients can be reconstructed using Hermite interpolation polynomial of degree 3 between any two adjacent maxima. By means of stretching those maxima at different levels and interpolating them with Hermite interpolation polynomials, the image can be enhanced effectively, and the different stretching factors on different levels can provide various kinds of enhancing effects, while this kind of enhancing flexibility cannot be found in other algorithms easily. This algorithm also offers abilities to control noise magnification and to enhance features of certain size within the images. Numerical experiments show that, the method can get fairly well enhancement result and the computing complexity can be low, so it is a practical fast enhancement algorithm.

**Keywords** image enhancement, wavelet transform, multi-scale edges, Hermite interpolation polynomial

## 1 引言

低对比度现象存在于多种数字图像中, 进行图

像的对比度增强是数字图像处理的常见任务<sup>[1]</sup>。图像的低对比度实际上是像素亮度在其动态范围内的不良分布造成的, 增加图像的对比度实际上就是调整像素的亮度分布<sup>[2]</sup>。对于灰度图像而言, 对比度表

示的是某个边缘两侧像素的灰度差别,这与图像多尺度边缘的梯度值是有密切联系的,对多尺度边缘梯度的拉伸对应于图像对比度的提高。基于这种思想,提出了一种基于多尺度边缘表示和 Hermite 插值的图像对比度增强算法。

## 2 多尺度边缘表示

称  $\theta(x, y)$  为 2 维光滑函数,假如它满足:

$$(1) \theta(x, y) \geq 0$$

$$(2) \iint_{\mathbf{R}^2} \theta(x, y) dx dy = 1$$

设小波函数满足:

$$\psi^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\psi^{(2)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \quad (2)$$

若记

$$\begin{cases} \psi_{2^j}^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2^{2j}} \psi^{(1)}\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \\ \psi_{2^j}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2^{2j}} \psi^{(2)}\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \end{cases} \quad (3)$$

则在尺度  $2^j$  下,函数  $f(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$  的小波变换为

$$\begin{cases} W_{2^j}^{(1)} f(x, y) = f * \psi_{2^j}^{(1)}(x, y) \\ W_{2^j}^{(2)} f(x, y) = f * \psi_{2^j}^{(2)}(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

令  $\hat{\psi}^{(1)}(\omega_x, \omega_y)$  及  $\hat{\psi}^{(2)}(\omega_x, \omega_y)$  是  $\psi^{(1)}(x, y)$  及  $\psi^{(2)}(x, y)$  的 Fourier 变换,则  $W_{2^j}^{(1)} f(x, y)$  与  $W_{2^j}^{(2)} f(x, y)$  的 Fourier 变换可以表示为

$$\hat{W}_{2^j}^{(1)} f(\omega_x, \omega_y) = \hat{f}(\omega_x, \omega_y) \hat{\psi}^{(1)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \quad (5)$$

$$\hat{W}_{2^j}^{(2)} f(\omega_x, \omega_y) = \hat{f}(\omega_x, \omega_y) \hat{\psi}^{(2)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \quad (6)$$

为保证该二进小波变换是完整且稳定的,  $\hat{\psi}^{(1)}(\omega_x, \omega_y)$  及  $\hat{\psi}^{(2)}(\omega_x, \omega_y)$  的二进膨胀必须能够覆盖整个 Fourier 平面。为此设存在两常数  $A, B, 0 < A \leq B < \infty$ , 使得

$$A \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \{ |\hat{\psi}^{(1)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y)|^2 + |\hat{\psi}^{(2)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y)|^2 \} \leq B \quad (7)$$

现设  $\chi^{(1)}(x, y), \chi^{(2)}(x, y)$  是两函数,其 Fourier 变换满足:

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} [\hat{\psi}^{(1)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \hat{\chi}^{(1)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) + \hat{\psi}^{(2)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \hat{\chi}^{(2)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y)] = 1 \quad (8)$$

由此可得到如下的重构公式:

$$f(x, y) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} [W_{2^j}^{(1)} f * \chi_{2^j}^{(1)}(x, y) + W_{2^j}^{(2)} f * \chi_{2^j}^{(2)}(x, y)] \quad (9)$$

在不同尺度下的图像一般都是经过光滑处理的,即由  $f(x, y)$  与  $\theta(x, y)$  卷积得到。由前面的分析可得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W_{2^j}^{(1)} f(x, y) \\ W_{2^j}^{(2)} f(x, y) \end{bmatrix} &= 2^j \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (f * \theta_{2^j})(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (f * \theta_{2^j})(x, y) \end{bmatrix} \\ &= 2^j \nabla (f * \theta_{2^j})(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $2^j \nabla (f * \theta_{2^j})(x, y)$  为梯度向量。在尺度  $2^j$  上,梯度向量的模值为

$$M_{2^j} f(x, y) = \sqrt{|W_{2^j}^{(1)} f(x, y)|^2 + |W_{2^j}^{(2)} f(x, y)|^2} \quad (11)$$

辐角为

$$A_{2^j} f(x, y) = \arctan \left| \frac{W_{2^j}^{(1)} f(x, y)}{W_{2^j}^{(2)} f(x, y)} \right| \quad (12)$$

在曲面  $f * \theta_{2^j}(x, y)$  的尖锐变化点  $(x, y)$  处,  $M_{2^j} f(x, y)$  有局部极大值,其方向由  $A_{2^j} f(x, y)$  给出。

实际上图像的多尺度边缘<sup>[3,4]</sup>就是二进小波变换的局部极值点,也就是  $f * \theta_{2^j}(x, y)$  的拐点。可见若记录下这些局部极值点的坐标  $(x, y)$  及相应的  $M_{2^j} f(x, y)$  和  $A_{2^j} f(x, y)$ , 就得到了重构  $f(x, y)$  的重要信息。

一幅图像总是在有限分辨率下被观测的,不能在比该分辨率更小的尺度下计算图像的二进小波变换,定义一个实函数  $\varphi(x, y)$ , 它满足:

$$|\hat{\varphi}(\omega_x, \omega_y)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{\psi}^{(1)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \hat{\chi}^{(1)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) + \hat{\psi}^{(2)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \hat{\chi}^{(2)}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y)) \quad (13)$$

即它的 Fourier 变换是由小波函数  $\psi^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x}$  和  $\psi^{(2)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y}$  在比 1 大的尺度上膨胀而来。由小波变换的容许性条件可得  $\varphi(x, y)$  的二重积分为 1, 这说明  $\varphi(x, y)$  为一平滑函数。定义算子  $S_{2^j}$ :

$$S_{2^j} f(x, y) = f * \varphi_{2^j}(x, y) \quad (14)$$

其中,

$$\varphi_{2^j}(x, y) = \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \quad (15)$$

一幅数字图像实际上是一种能量的 2 维有限离散分

布,记为

$$D = (d_{n,m})_{(n,m) \in Z^2}$$

显然存在不唯一的  $f(x) \in L^2(\mathbf{R}^2)$  满足

$$\forall (n,m) \in Z^2 \quad S_1 f(n,m) = d_{n,m}$$

因此离散图像可以写成

$$D = (S_1 f(n,m))_{(n,m) \in Z^2} \quad (16)$$

根据取样值  $(S_1 f(n,m))_{(n,m) \in Z^2}$  可以在尺度  $2^j$  上计算图像  $f(x,y)$  的归一化取样

$$W_{2^j}^{(1,d)} f = (W_{2^j}^{(1)} f(n+w, m+w))_{(n,m) \in Z^2}$$

$$W_{2^j}^{(2,d)} f = (W_{2^j}^{(2)} f(n+w, m+w))_{(n,m) \in Z^2}$$

$$S_{2^j}^{(d)} f = (S_{2^j} f(n+w, m+w))_{(n,m) \in Z^2}$$

其中,上标 d 表示离散变换,  $w$  表示取样间隔。

### 3 Hermite 插值

由图像小波变换模极大值恢复小波系数的方法可以分为两类:由 Mallat 提出的交替投影算法和插值算法。交替投影算法恢复效果较精确,但是计算较为复杂,所以这里采用简单的插值法来重建小波系数。Hermite 插值<sup>[5]</sup>方法是一种具有重节点的多项式插值方法,由于它要求在节点处满足相应的导数条件,因此也称为切触差值。由于小波系数模极大值点的导数为零,这与 Hermite 插值对节点的导数要求不谋而合,因此选用 Hermite 插值多项式作为改进的插值方式。

设有  $s$  个点:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_s \quad (17)$$

$y_k^{(h)} (h=0, \dots, a_k-1, k=1, \dots, s)$  是各个点上的  $h$  阶导数值,其中  $a_1, \dots, a_s$  为正整数:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_s = n + 1, \quad a_k \geq 1, \quad (k=1, \dots, s) \quad (18)$$

构造一个  $n$  次多项式  $p(x) \in P_n$ , 使之满足插值条件:

$$p^{(h)}(x_k) = y_k^{(h)}, \quad (h=0, \dots, a_k-1, k=1, \dots, s) \quad (19)$$

采用待定系数法或构造多项式的方法可以解决此多项式构造问题,所构造的  $p(x)$  如下:

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{a_i}} \times \sum_{k=0}^{a_i-1} y_i^{(k)} \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left\{ \frac{(x-x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right\}_{(x_i)}^{(a_i-k-1)} \right] \quad (20)$$

其中,  $\left\{ \frac{(x-x_i)^{a_i}}{\omega(x)} \right\}_{(x_i)}^{(a_i-k-1)}$  表示函数  $\frac{(x-x_i)^{a_i}}{\omega(x)}$  Taylor 展开的前  $a_i-k$  项和,且

$$\omega(x) = (x-x_1)^{a_1} \dots (x-x_s)^{a_s} \quad (21)$$

插值方法要解决的是由连续的两个小波系数模

极大值恢复中间的小波系数的问题,极值点的一阶导数为零,为此将式(20)简化如下:

设  $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 2$ , 此时问题变为求  $n=2s-1$  次多项式  $p(x)$ , 对函数  $f(x)$  使之满足:

$$p(x_i) = f(x_i), p'(x_i) = f'(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (22)$$

此 Hermite 插值的几何意义在于使曲线  $y=p(x)$  不仅通过给定的极值点  $(x_i, f(x_i))$ , 而且在点  $x=(x_i)$  处与曲线  $y=f(x)$  有相同的一次导数。由式(20)可得此时

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\sigma(x)}{\sigma'(x_i)(x-x_i)} \right)^2 \left[ f(x_i) \left( 1 - \frac{\sigma''(x_i)}{\sigma'(x_i)}(x-x_i) \right) + f'(x_i)(x-x_i) \right] \quad (23)$$

其中,  $\sigma(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_s)$  (24)

显然,随着  $s$  的增大,插值的精确度提高,但是计算量也增大了。考虑最简单的情况  $s=2$  时有:

$$p(x) = \left( \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right)^2 \left[ f(x_1) \left( 1 - 2 \frac{x-x_1}{x_1-x_2} \right) + f'(x_1)(x-x_1) \right] + \left( \frac{x-x_1}{x_1-x_2} \right)^2 \left[ f(x_2) \left( 1 - 2 \frac{x-x_2}{x_2-x_1} \right) + f'(x_2)(x-x_2) \right] \quad (25)$$

设函数  $f(x)$  的小波变换  $W_{2^j} f(x)$  在点  $x_i (i=1, 2, \dots, l)$  取得局部极值  $y_i (i=1, 2, \dots, l)$ , 显然有  $f'(x_i) = 0 (i=1, 2, \dots, l)$ ; 由式(18)、式(19)可以得到此时的插值公式为

$$f_r(x) = \left( \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \right)^2 \left[ y_i \left( 1 - 2 \frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}} \right) \right] + \left( \frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}} \right)^2 \left[ y_{i+1} \left( 1 - 2 \frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} \right) \right] \quad (26)$$

其中,  $x \in [x_i, x_{i+1}] (i=1, 2, \dots, l-1)$ 。

以上主要针对一维信号的差值,对于 2 维信号,将行列分别进行处理即可。

### 4 增强算法

增强算法分为 5 步:

(1) 计算原始图像的二进小波变换,得到多尺度边缘梯度向量,采用 Mallat<sup>[3]</sup>提出的小波基;

(2) 检测各个尺度上梯度向量模值的局部极大值,记录其位置和大小;

(3) 对各个尺度上梯度向量模极大值进行拉伸,不同尺度上的拉伸因子可以根据所要增强结构的尺度选取;

(4) 使用 Hermite 插值由梯度向量模极大值恢复各个尺度上的小波系数;

(5) 计算小波逆变换,得到增强后的图像。

重建后的图像灰度值范围有可能超过原始图像,此时可以对其进行灰度剪裁拉伸和归一化处理。

### 5 实验结果及讨论

试验图像为  $256 \times 256$  的 256 级灰度图,小波变换分解级数为 5 级,各个尺度上的拉伸因子由低向高排列。

图 1、图 2 是低对比度图像的增强效果。可以看出其增强效果是很明显的。通过比较(b)和(c)可见,由于原始图像的噪声组要集中于低尺度上,在较低尺度上采用较小的拉伸因子可以抑制重构图像的噪声。

图 3 是对医学图像数字化乳腺 X 线照片(mammography)的增强效果,对于此类图像,感兴趣的区域主要是乳腺的纹理结构的肿块和细小的白色钙化点,这些都是乳腺癌的先兆<sup>[6]</sup>。

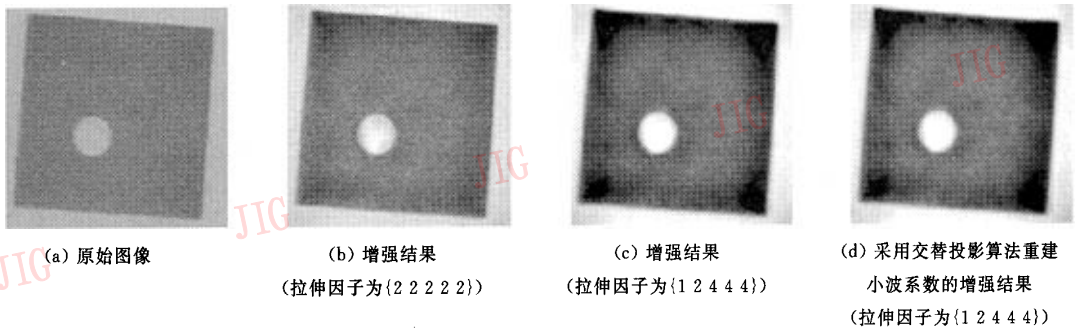


图 1

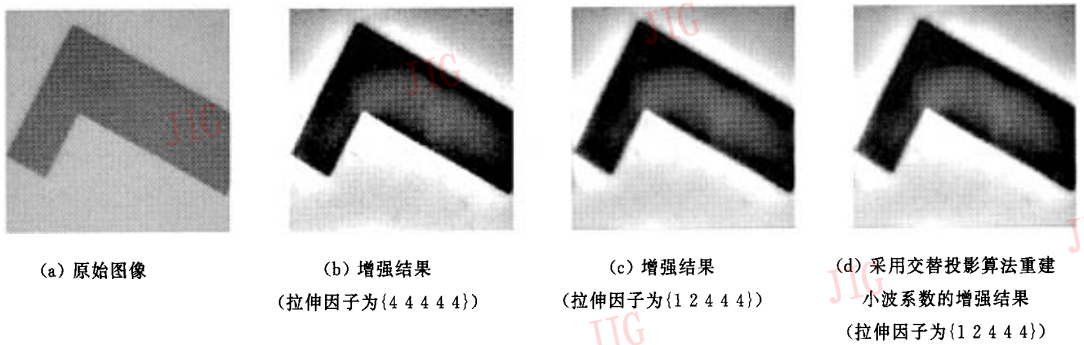


图 2

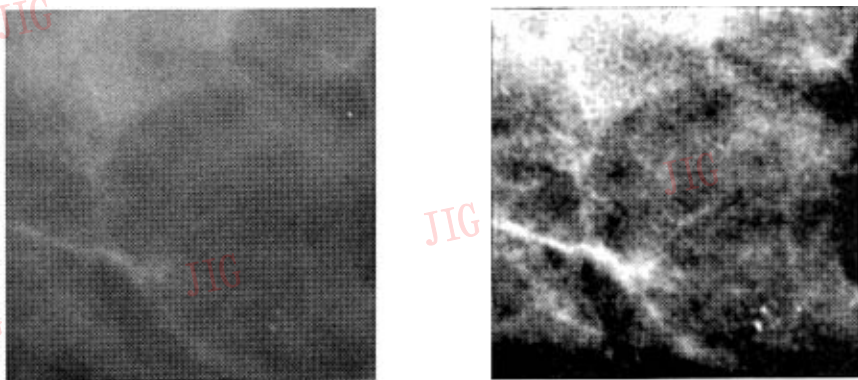


图 3

应当指出,在此算法的第 4 步也可以采用 Mallat 提出的交替投影算法重建小波系数。文献 [7] 提出的增强算法就是采用此方法,其重建较为精确,但是计算复杂度较高,以上各幅图像的计算时间大约为 100s,很难在实际中使用。而采用 Hermite 插值法,增强算法的计算时间都少于 3s,而重建质量没有明显的下降,比较图 1、图 2 中的 (c) 和 (d),可见两种算法的重建结果几乎没有差别。

事实上图像中包含着许多的细节信息,这些细节对于图像的使用者来说可能是很有价值的,比如医学图像中的细节对于医生的正确诊断就是非常重要的。任何图像的后期处理很难保证保留原图像的所有信息,而图像增强更容易造成图像细节内容的损失。因此在许多情况下,经过处理的图像不能完全代替原图像,而只能作为其补充。本文算法的优点在于能够通过调整各个尺度上的拉伸因子得到针对原图像不同尺度内容的不同效果的增强,文中所示只是其中的一小部分,其他效果可以通过进一步调整比较而得到。

## 6 结 论

基于图像多尺度边缘表示的图像增强算法,可以有效地用于数字图像的对比度增强。通过对各个尺度上边缘梯度模极大值的拉伸,该算法可以对不同尺寸的图像结构进行增强。合理的选择拉伸系数,该算法可以在一定程度上抑制原图像的噪声,并且可以与 Donoho<sup>[8,9]</sup> 的小波去噪理论相结合。由于采用 Hermite 插值法重建小波系数,该算法的计算复杂性较低,与采用 Mallat 提出的交替投影算法的增强方法相比,计算时间可缩短为大约三分之一,这在数字图像处理中将是很有实用价值的。

### 参 考 文 献

- Jain A K. Fundamental of Digital Image Processing [M]. Englewood Cliffs, N J, USA: Prentice-Hall, 1989.
- Pratt William K. Digital Image Processing Third Edition [M]. New York: Wiley, 2001.
- Mallat S G, Zhong S. Characterization of signals from multi-scale edges [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(7): 710~732.
- Froment J, Mallat S G. Second generation compact image coding with wavelets: Wavelets-A Tutorial and Applications [M]. New York: Academic Press, 1992.
- Burden Richard L. Numerical Analysis [M]. Englewood Cliffs, N J, USA: Prentice-Hall, 1998.
- Moskovic J C, Mansi J L, King D M. Mammography in the assessment of response of medical treatment of large primary breast cancer [J]. Clinic Radiology, 1993, 7(47): 339~343.
- Lu Jian. Contrast enhancement of medical images using multi-scale edge representation [J]. Optical Engineering, 1994, 33(7): 2151~2161.
- Donoho D L, Johnstone I M. Threshold selection for wavelet shrinkage of noisy data [A]. In: Proceedings of the 16th Annual International Conference of the IEEE [C], Piscataway, N J, USA, 1994, 1: 24~25.
- Donoho D L. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613~627.



翟广涛 1978 年生。2004 年于山东大学获得信号与信息处理专业工学硕士学位,现于上海交通大学图像通信研究所通信与信息系统专业攻读博士学位。研究方向为图像通信、图像处理与识别等。  
E-mail: zhaiguangtao@vip.sina.com.cn



王欣 1947 年生。教授、博士生导师。现为中国电子学会电路与系统分会委员。研究方向为图像处理、非线性滤波、小波变换等。多篇论文被 EI 和 SCI 收录。