

# 零谱矩滤波器系列

张良仪 吴敏金

(华东师范大学华贸学院, 上海 200062)

**摘要** 鉴于一种新型的滤波器类别——零谱矩滤波器系列, 其性能优于传统信号处理中的 FIR 滤波器, 特别在通带的平滑度与阻带的衰减度方面尤佳。其特例包含了人们熟识的小波变换滤波器, 如共轭滤波器与双正交滤波器。为此, 对其进行简要介绍, 以飨读者。

**关键词** 谱矩 多通道滤波器组合 图像分解

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2005)11-1462-04

## A Series of Zero Spectral Moment Filters

ZHANG Liang-yi, WU Min-jin

(Huamiao College, East China Normal University, Shanghai 200062)

**Abstract** A new kind of filters—Zero Spectral Moment Filters are introduced, which properties are better than that of the common FIR filters, particularly for flatness on pass-band and stop-band. It includes the known wavelet filters, for examples of conjugate filters and biorthogonal filters.

**Keywords** spectrum, moment, multi-channel filter banks, image decomposition

### 1 引言

作者在研究多通道滤波器组合及其优化设计<sup>[1-3]</sup>时, 发现一种新型的滤波器类别——零谱矩滤波器系列。其性能优于传统信号处理中的 FIR 滤波器, 特别在通带的平滑度与阻带的衰减度尤佳。其特例包含了人们熟识的小波变换滤波器, 如共轭滤波器与双正交滤波器。兹以阐述, 供理论参考与实际应用。

### 2 谱矩与零谱矩阶数

设滤波器响应序列  $h_n$ , 频响  $H(\omega)$ , 其谱矩定义为

$$H_i(\omega) = \sum_n h_n e^{-jn\omega} n^i \quad (j = \sqrt{-1})$$

谱矩具有谱与矩双重特性 ( $i = 0$  时, 其为频响

$H(\omega)$ ; 而  $\omega = 0$  时, 其为  $h_n$  的  $i$  阶矩), 而且, 频响  $H(\omega)$  的  $i$  阶导数  $H^{(i)}(\omega) = (-j)^{(i)} H_i(\omega)$ 。

如果  $h_n$  在  $\omega = \omega_0$  处满足

$$H_i(\omega_0) = 0, (i = 1, \dots, I), \text{ 而 } H_{I+1}(\omega_0) \neq 0$$

则称  $h_n$  在  $\omega = \omega_0$  处具有  $I$  阶零谱矩, 记为  $I_{\omega_0}$ 。它反映了滤波器频响  $H(\omega)$  在  $\omega_0$  近旁的平滑程度。对于各类滤波器 (低通, 高通, 带通), 特别重要的是在  $\omega_0 = 0, \pi$  处的  $I_0$  与  $I_\pi$  阶零谱矩。

### 3 零谱矩滤波

设滤波器系数  $h_n$  满足以下归一化条件:

$$\text{对于低通 } h_n, \sum h_n = 1, \sum h_n (-1)^n = 0;$$

$$\text{对于高通 } g_n, \sum g_n = 0, \sum g_n (-1)^n = 1;$$

$$\text{对于带通 } f_n, \sum f_n = 0, \sum f_n (-1)^n = 0;$$

而在  $\omega_0 = 0, \pi$  处具有  $I_0$  与  $I_\pi$  阶零谱矩, 即

收稿日期: 2005-08-15; 改回日期: 2005-09-08

第一作者简介: 张良仪 (1953 ~ ), 男, 1978 年毕业于华东师范大学物理系。现为华东师范大学电气总公司总经理、高级工程师。主要研究领域为语音信号处理、计算机信息技术开发与应用。E-mail: tecn1@ecnu.edu.cn

$$\sum_n h_n n^i = 0, i = 1, 2, \dots, I_0$$

$$\sum_n h_n n^i (-1)^n = 0, i = 1, 2, \dots, I_\pi$$

则称之为零谱矩滤波器(zero spectral moment filters, ZSMF)。根据零谱矩阶数  $I_0$  与  $I_\pi$  是否相等,零谱矩滤波器可分为平衡式( $I_0 = I_\pi$ ,其滤波器频响  $H(\omega)$  在高低端的谱特性相同)与非平衡式(如单边零谱矩: $I_0 = 0; I_\pi > 0$ 等)。

分析与实验表明,对于有限基上 ZSMF 的零谱矩阶数  $I_0$  与  $I_\pi$  越高,则  $h_n$  的通带(与阻带)越平滑,通带宽(与阻带宽)越宽,而过渡带则越窄。

对于有限基而言,零谱矩滤波器的设计实际上是求解归一化零谱矩线性方程组。其自由参数个数(自由度  $f$ )为  $f = L - 2 - I_0 - I_\pi$ 。所谓零谱矩滤波器系列是指一族带有自由参数及具有一定谱特性、对称性与奇偶性的零谱矩滤波器。下面先导出若干典型带参数的平衡式零谱矩滤波器系列与单边零谱矩滤波器系列的显式表示;然后给出一般非平衡式零谱矩滤波器的快速算法。

### 4 平衡式零谱矩滤波器系列

对于平衡式的零谱矩滤波器,可由归一化零谱矩方程组,在一定谱特性、对称性与奇偶性和自由参数条件下,转化为如附录所示的范德蒙方程的形式,然后借助范德蒙行列式计算,直接获得其滤波器系数的显式表示。下面以  $[-N, N]$  上的在  $M=3$  通道滤波器组合中使用的 3 类零谱矩滤波器为例加以阐述。

#### 4.1 低通对称平衡式零谱矩滤波器系列

设低通滤波器  $h_n = h_{-n}, n \in [-N, N], I_0 = I_\pi$ 。由于其关于原点的对称性,因此其奇数阶的谱矩必为零( $I_0 = I_\pi$  必为奇数)。若取参数为  $h_0$ ,则平衡式零谱矩方程可化为如下两个等价的范德蒙方程:

$$\begin{cases} \sum_{n>0} h_{2n+1} = \frac{1}{4} \\ \sum_{n>0} h_{2n-1} (2n-1)^{2i} = 0, i = 1, 2, \dots, I \end{cases}$$

及 
$$\begin{cases} \sum_{n>0} h_{2n} = \frac{1}{4} - \frac{h_0}{2} \\ \sum_{n>0} h_{2n} (2n)^{2i} = 0, i = 1, 2, \dots, I \end{cases}$$

利用附录的范德蒙方程之解,可得其零谱矩滤波器系数如下:

$$\begin{cases} h_{2n-1} = \prod_{k \neq n} \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2 - (2n-1)^2} \left(\frac{1}{4}\right), \\ 2n-1 = 1, \dots, N \\ h_{2n} = \prod_{k \neq n} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - (2n)^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{h_0}{2}\right), \\ 2n = 2, \dots, N \end{cases}$$

此时,  $I_0 = I_\pi = \begin{cases} N-1, N \text{ 为偶数} \\ N-2, N \text{ 为奇数} \end{cases}$

图 1 给出了不同基长与不同参数的低通零谱矩滤波器的功率谱。

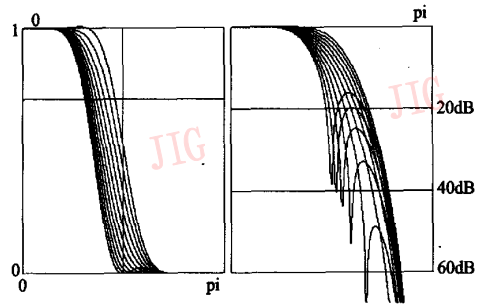


图 1  $[-N, N]$  上的低通零谱矩滤波器系列

Fig. 1 Lowpass ZSMF on  $[-N, N]$

$N = 8; h_0 = 0.36, 0.38, \dots, 0.567$

将此类滤波器与人们熟悉的矩形窗和汉明窗下的低通滤波器比较,其功率谱<sup>[8]</sup>如图 2 所示(图中光滑曲线为零谱矩滤波器)。

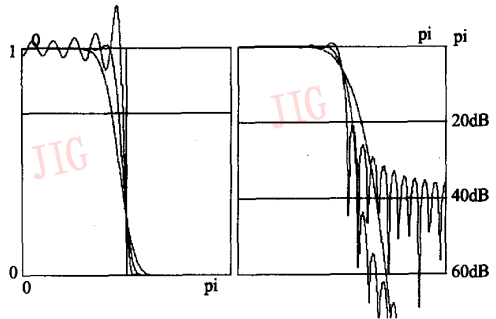


图 2 零谱矩滤波器与矩形窗和汉宁窗滤波器的功率谱比较

Fig. 2 The comparison of the power spectra of ZSMF ( $N = 20; h_0 = 0.5$ ) and FIR lowpass filters using hamming window and rectangle window

由图可见,其通带平滑度与阻带衰减度大大优于矩形窗和汉明窗下的低通滤波器。此零谱矩低通滤波器的零谱矩阶数高达  $I_0 = I_\pi = N - 1 = 19$ ,其不足的是过度带稍宽。

### 4.2 带通反对称平衡式零谱矩系列

设带通滤波器  $f_n, n \in [-N, N], f_n = -f_{-n}$ , 带通中心在  $\tilde{\omega}_0 = \pi/2$ 。考虑到带通在  $\tilde{\omega}_0 = \pi/2$  的零谱矩, 可用类似低通的方法, 取  $c$  为参数 ( $c = \text{Im}(F(\pi/2))$ ), 求解得其滤波器系数:

$$\begin{cases} f_{2n-1} = \prod_{k=n}^N \frac{(2k-1)}{(2k-1) - (2n-1)(-1)^{n-k}} \frac{c}{2} (-1)^{n+1} \\ 2n-1 = 1, \dots, N \\ f_{2n} = 0 \end{cases}$$

此时,  $I_0 = I_\pi = I_{\pi/2} = \begin{cases} (N-2)/2, N \text{ 为偶数} \\ (N-1)/2, N \text{ 为奇数} \end{cases}$

### 4.3 高通对称平衡式零谱矩滤波器系列

其可由低通对称奇长滤波器系列转换而成:

$$g_n = (-1)^n h_n, n \in [-N, N]$$

读者可仿照上述方法导出其他类型(如  $[0, N]$  上)的平衡式零谱矩滤波器系列。

## 5 单边零谱矩滤波器系列

非平衡式零谱矩滤波器有一种重要的类别——单边零谱矩, 即  $I_0 = 0, I_\pi > 0$  (或反之)。单边零谱矩系列包含了众所周知的具有消失矩的滤波器。下面以  $[0, N]$  上的单边零谱矩滤波器系列加以阐述。

### 5.1 $[0, N]$ 上的低通单边零谱矩滤波器系列

设低通滤波器  $h_n, n \in [0, N], I_0 = 0, I_\pi = I, f = N-1-I$ , 则归一化的单边零谱矩方程可化为如下两个范德蒙方程:

$$\begin{cases} \sum_{n>0} h_{2n} = \frac{1}{2} - h_0 \\ \sum_{n>0} h_{2n} (2n)^i = c_i, i = 1, 2, \dots, I \end{cases}$$

及 
$$\begin{cases} \sum_{n>0} h_{2n-1} = \frac{1}{2} \\ \sum_{n>0} h_{2n-1} (2n-1)^i = c_i, i = 1, 2, \dots, I \end{cases}$$

当  $N, I$  及  $f$  满足:  $f \geq \begin{cases} \frac{N-1}{2} \geq I, N \text{ 为奇数} \\ \frac{N}{2} \geq I+1, N \text{ 为偶数} \end{cases}$  的时候, 通

过适当选取自由参数(如  $h_{2n}, n > 0$ ), 可借助于范德蒙方程解法直接解出  $h_n$ 。功率谱的示例如图 3 所示 ( $N=7, I=3; f=3$ )。

此类零谱矩滤波器不仅包含了正交共轭小波滤波器<sup>[4]</sup>, 也包含一个对称的特解系列。

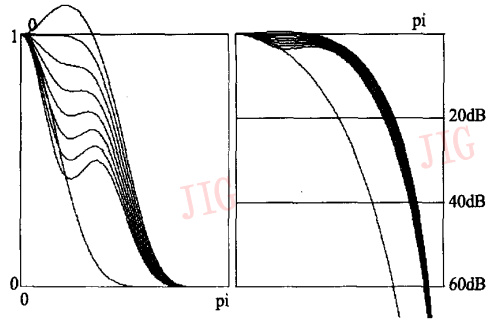


图 3  $[0, N]$  上的低通单边零谱矩滤波器的功率谱  
Fig. 3 Lowpass ZSMF on  $[0, N]$

### 5.2 $[0, N]$ 上低通单边零谱矩滤波器的对称特解系列

设低通  $h_n, n \in [0, N], I_0 = 0, I_\pi = I, f = 0$  (无参数, 称为特解)。可得

$$h_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N \left( (-1)^{n+1} \prod_{i=n}^N \frac{i}{i-n} \right)}$$

$$h_n = (-1)^{n+1} h_0 \prod_{i=n}^N \frac{i}{i-n}, n = 1, \dots, N$$

可验证此单边零谱矩滤波器为对称的。其系数如表 1 所示, 而功率谱如图 4 所示。

表 1 对称低通单边零谱矩滤波器系数

Tab. 1 Symmetric single ZSMF

$N$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
0	0.125	0.0625	0.03125	0.015625
1	0.375	0.25	0.15625	0.09375
2	0.375	0.375	0.3125	0.234375
3	0.125	0.25	0.3125	0.3125
4		0.0625	0.15625	0.234375
5			0.03125	0.09375
6				0.015625

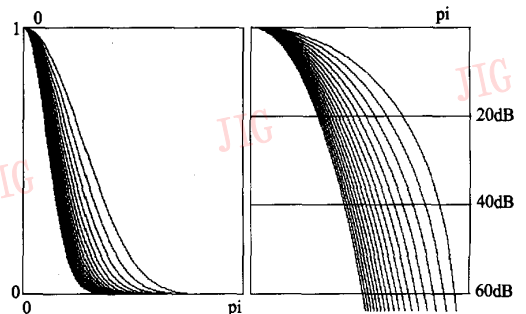


图 4  $[0, N]$  上的对称低通单边零谱矩滤波器特解的功率谱  
Fig. 4 The spectrum of symmetric ZSMF on  $[0, N]$

对于一般非平衡式零谱矩滤波器,虽然可用线性方程组的一般解法来求解,但采用类似最大元消去法的迭代算法更为方便。(从略)

各类零谱矩滤波器系列可应用于信号处理与图像分析的种种领域,其在多通道滤波器组合与图像分解的应用见文献[2]。此不详述。

### 附录 范德蒙方程及其解法

下列方程的系数是一个范德蒙行列式,称之为范德蒙方程

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_n^k x_n = c_k, k = 0, 1, \dots, N-1$$

利用范德蒙行列式的计算,可得线性方程之解:

$$x_n = \frac{\sum_{k=0, k \neq n}^{N-1} c_k (-1)^k S_{N-1-k}(a_0, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}, \dots, a_{N-1})}{\prod_{k=0, k \neq n}^{N-1} (a_k - a_n)}$$

其中,  $S_k(b_1, b_2, \dots, b_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \prod_{i=1}^k b_{i_i}$ , 即从  $\{b_1, \dots, b_n\}$  中任选  $k$  个数作乘积,并对所有的组合求和。特别地,当  $c_1 = \dots = c_{N-1} = 0$  时,

$$x_n = c_0 \prod_{k=0, k \neq n}^{N-1} \frac{a_k}{(a_k - a_n)}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

### 参考文献 (References)

- 1 WU Min-jin. Design of filter bank and parameter optimization [J]. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(4): 513 ~ 519. [吴敏金. 滤波器组合设计参数优化 [J]. 自动化学报, 2002, 28(4): 513 ~ 519.]
- 2 WU Min-jin, SHEN Xiao-feng, JIN Sheng-jin. Multi-channel filter banks and its application of image decomposition [J]. Journal of image and graphics, 2005, 10(11): 1423 ~ 1426. [吴敏金, 沈霄凤, 金升俊. 图像分解中的多通道滤波器组合 [J]. 中国图象图形学报, 2005, 10(11): 1423 ~ 1426.]
- 3 GAN L, MA K K. M-channel linear-phase perfect reconstruction filter bank with rational coefficients [J]. IEEE Transactions on Circuits System, 2002, 49(4): 914 ~ 927.