

# 基于射影不变量的摄像机自标定方法

张维勇<sup>1)</sup> 王征<sup>1)</sup> 翟鸣<sup>2)</sup> 李劲<sup>3)</sup> 刘可<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(合肥工业大学 计算机与信息学院, 合肥 230009) <sup>2)</sup>(上海交通大学电子信息与电气工程学院自动化系, 上海 200240)

<sup>3)</sup>(安徽省气象局, 合肥 230031)

**摘要** 为了方便而精确地进行摄像机标定,提出了一种基于射影不变量的求解摄像机内参数的方法,该方法利用交比在射影变换中不变性质,通过同一平面中相交直线的无穷远点与虚圆点的交比,先求出同一模板的不同方位的3幅图像中的虚圆点的像;然后利用绝对二次曲线的像在摄像机做刚体运动时保持不变的性质,进而求出绝对二次曲线的像;最后对结果进行Cholesky分解,就可以得到摄像机的内参数。实验表明,该方法行之有效,可以达到较高的精度。

**关键词** 摄像机自标定 射影变换 交比 虚圆点

中图分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2005)11-1432-04

## A Method of Camera Self-calibration Based on the Projective Invariant

ZHANG Wei-yong<sup>1)</sup>, WANG Zheng<sup>1)</sup>, ZHAI Ming<sup>2)</sup>, LI Jin<sup>3)</sup>, LIU Ke<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

<sup>2)</sup>(Department of Automation, School of Electronics and Electric Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240)

<sup>3)</sup>(Anhui Meteorological Bureau, Hefei 230031)

**Abstract** In this paper, a method of camera self-calibration based on the projective invariant is proposed. By the invariability of Cross Ratio in projective transform, we can compute the image of circular points via the cross ratio of circular points and vanish points of intersecting lines; With the image of circular points in three images of the planar pattern from different orientation, we can get IAC (Image of Absolute Conic), because of the invariability of IAC in rigid motion; Using Cholesky factorization on IAC, we get internal parameters of the camera. The result of experiments shows that this method is effective and has high precision.

**Keywords** camera self-calibration, projective transform, cross ratio, circular points

## 1 引言

在计算机视觉中,摄像机标定(确定摄像机内参数)是从2维图像获取空间3维信息的基本而又关键的步骤。其标定的方法有很多,总的来说可以分为传统标定方法、基于主动视觉的自标定方法、自标定方法3种。其中传统的标定方法虽可以获得较高的精度,但是标定过程比较复杂;基于主动视觉的标定方法,虽然算法简单,但是由于摄像机的运动有严格的限制,所以需要比较精密的仪器来控制摄像机;而自标定的方法不仅克服了以上两种方法的缺

点,而且它仅仅依靠多视图对应点之间的关系就可以直接进行标定。虽然自标定的精度和鲁棒性都较前两种方法低,但是由于它适合场景任意、摄像机运动未知的情形,所以成为人们研究的热点。本文提出一种基于射影不变量的方法,即通过同一模板的3幅不同方位的图像来对摄像机进行标定。

## 2 基于射影不变量的自标定算法

### 2.1 交比

所谓交比(cross ratio)指的是直线上长度的比率的比率,它是最基本的射影不变量。如图1所示,

收稿日期:2005-08-19;改回日期:2005-10-01

第一作者简介:张维勇(1949~),男,1977年毕业于合肥工业大学工业电子技术专业,教授,硕士生导师。研究方向为计算机软件与理论、数据库与多媒体技术,曾获得国家科技进步三等奖及省科技进步奖多项。E-mail:zhangweiyong.gocom@263.net

在同一平面内,4 条交于一点  $S$  的直线  $a, b, c, d$  分别与任意直线  $l$  交于点  $A, B, C, D$ , 于是交比定义为  $(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD}$ , 由对偶性原理可得直线的交比  $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$ 。如果交于点  $S'$  的直线  $a', b', c', d'$  也与直线  $l$  交于点  $A, B, C, D$ , 那么就有  $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$ <sup>[1]</sup>。特殊的, 如果  $(A, B, C, D) = -1$ , 就称点  $A, B$  与点  $C, D$  调和共轭<sup>[2]</sup> (harmonic conjugates)。

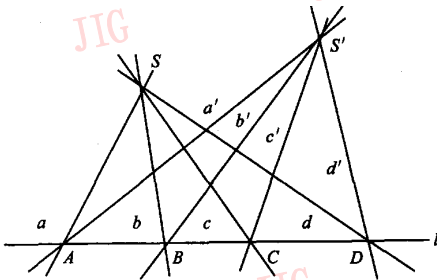


图 1 交比示意图  
Fig. 1 The sketch of cross ratio

2.2 虚圆点和迷向直线

虚圆点<sup>[3]</sup> (也称为圆环点, circular points) 是任意圆周和无穷远线  $l_\infty$  的交点, 其包括以下两个点:  $I = (1, i, 0)^T$  和  $J = (1, -i, 0)^T$ 。迷向直线<sup>[1]</sup> (也称为极小直线, isotropic line) 指的是通过虚圆点  $I, J$  的虚直线, 而且通过平面上任意一点  $(x_0, y_0)$  都可以有两条迷向直线, 其方程为

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0)$$

2.3 拉盖尔公式

设  $\varphi$  是两直线  $l_1, l_2$  的欧氏角,  $j_1, j_2$  为过  $l_1, l_2$  交点的两条迷向直线, 则  $\varphi = \frac{i}{2} \log(l_1, l_2, j_1, j_2)$ , 这就是拉盖尔 (Laguerre) 公式的内容<sup>[1]</sup>。于是可以推导出方程

$$(l_1, l_2, j_1, j_2) = e^{-2i\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} \quad (1)$$

设  $l_1, l_2$  与无穷远线的交点分别为  $A, B$ , 且  $j_1, j_2$  与无穷远线的交点为  $I, J$ , 则可以得到  $(A, B, I, J) = (l_1, l_2, j_1, j_2) = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = k_1 + k_2i$ 。由此可知道, 由两条相交直线得到的两个无穷远点和两个虚圆点的交比可由这两条直线的夹角决定。

2.4 求解虚圆点的像

建立如图 2 所示的模板, 其中有 6 组平行线, 每组

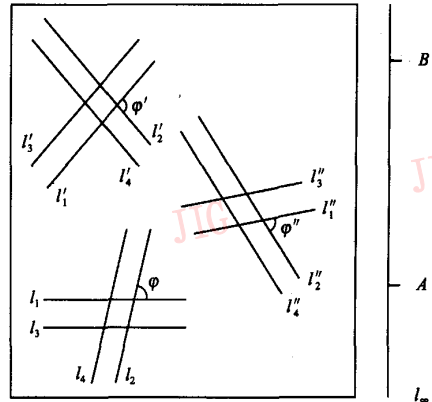


图 2 模板示意图  
Fig. 2 The sketch of planar pattern

之间互不平行。直线  $l_1$  和  $l_2$  分别与无穷远线交于点  $A, B$ 。若角度  $\varphi$  已知, 则共线 4 点  $A, B, I, J$  的交比可以通过式(1)求出, 不妨设求出的交比为  $k_1 + k_2i$ 。

当用摄像机对此模板拍照,  $l_1$  和  $l_3$  的像的交点  $U$ , 必然就是无穷远点  $A$  的像。  $l_2$  和  $l_4$  的像的交点  $V$ , 就是无穷远点  $B$  的像, 其用齐次坐标表示为  $U = (p_1, q_1, 1)^T, V = (p_2, q_2, 1)^T$ , 而射影变换后虚圆点的像为

$$I' = (h_1 + h_2i, h_3 + h_4i, 1)^T$$

$$J' = (h_1 - h_2i, h_3 - h_4i, 1)^T$$

其中,  $h_1, h_2, h_3, h_4$  为实数。又因为射影变换交比不变, 所以可得到  $(U, V, I', J') = (A, B, I, J)$ 。于是得到如下方程<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} (U, V, I, J) &= \frac{(h_1 + h_2i - p_1)(h_1 - h_2i - p_2)}{(h_1 - h_2i - p_1)(h_1 + h_2i - p_2)} \\ &= \frac{(h_3 + h_4i - q_1)(h_3 - h_4i - q_2)}{(h_3 - h_4i - q_1)(h_3 + h_4i - q_2)} \\ &= k_1 + k_2i \end{aligned} \quad (2)$$

若模板上另外两组平行线  $l'_1, l'_2, l''_1, l''_2$  的交点分别为  $U' = (p'_1, p'_2, 1)^T, V' = (q'_1, q'_2, 1)^T$ , 且与虚圆点的交比为  $(U', V', I, J) = k'_1 + k'_2i$ , 则可以得到以下类似的方程:

$$\begin{aligned} (U, V, I, J) &= \frac{(h_1 + h_2i - p'_1)(h_1 - h_2i - p'_2)}{(h_1 - h_2i - p'_1)(h_1 + h_2i - p'_2)} \\ &= \frac{(h_3 + h_4i - q'_1)(h_3 - h_4i - q'_2)}{(h_3 - h_4i - q'_1)(h_3 + h_4i - q'_2)} \\ &= k'_1 + k'_2i \end{aligned} \quad (3)$$

由式(2)、式(3)就可以得到以下关于未知量  $h_1, h_2, h_3, h_4$  的 4 个方程:

$$\begin{cases} h_1^2 + h_2^2 - (p_1 + p_2)h_1 + p_1p_2 = \frac{k_2}{1-k_1}(p_1 - p_2)h_2 & (4) \\ h_3^2 + h_4^2 - (q_1 + q_2)h_3 + q_1q_2 = \frac{k_2}{1-k_1}(q_1 - q_2)h_4 & (5) \\ h_1^2 + h_2^2 - (p'_1 + p'_2)h_1 + p'_1p'_2 = \frac{k'_2}{1-k'_1}(p'_1 - p'_2)h_2 & (6) \\ h_3^2 + h_4^2 - (q'_1 + q'_2)h_3 + q'_1q'_2 = \frac{k'_2}{1-k'_1}(q'_1 - q'_2)h_4 & (7) \end{cases}$$

由此可以看出,只要知道  $\varphi$  和  $\varphi'$  的大小,即可以确定  $k_1, k_2$  和  $k'_1, k'_2$  的值;同时可以通过联立方程式(4)、式(5)、式(6)、式(7)来求出 4 个未知量  $h_1, h_2, h_3, h_4$ ,进而就可求出虚圆点的像。

从理论上说,无论  $\varphi$  和  $\varphi'$  取什么值,上面的方程都能够求解,虽然求解的过程是非常复杂的,但可以通过对方程降次来简便求解过程。用式(4)减去式(6)就可以得到式(8)。

$$(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)h_1 + \left[ \frac{k_2}{1-k_1}(p_1 - p_2) - \frac{k'_2}{1-k'_1}(p'_1 - p'_2) \right] \times h_2 = p_1p_2 - p'_1p'_2 \quad (8)$$

上式可以转化为  $EX = F$  的形式,其中,  $X = (h_1, h_2)^T$ ,

$$F = p_1p_2 - p'_1p'_2, E = (p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2, \frac{k_2}{1-k_1}(p_1 - p_2) - \frac{k'_2}{1-k'_1}(p'_1 - p'_2))$$

此时,对未知数  $h_1, h_2$  来说,方程数小于未知数,由于在这个情况下,解不唯一,于是可考虑利用剩下的两组平行线  $l''_1, l''_2, l''_3, l''_4$ ,按上面所述,这两组平行线也能得到关于  $h_1, h_2, h_3, h_4$  的方程,即

$$h_1^2 + h_2^2 - (p''_1 + p''_2)h_1 + p''_1p''_2 = \frac{k''_2}{1-k''_1}(p''_1 - p''_2)h_2 \quad (9)$$

$$h_3^2 + h_4^2 - (q''_1 + q''_2)h_3 + q''_1q''_2 = \frac{k''_2}{1-k''_1}(q''_1 - q''_2)h_4 \quad (10)$$

其中,  $p''_1, p''_2, q''_1, q''_2$  是这两组平行线的交点  $U'' = (p''_1, p''_2, 1), V'' = (q''_1, q''_2, 1)$  的坐标,且它们与虚圆点的交比为  $(U'', V'', I, J) = k''_1 + k''_2i$ 。

此时,用式(4)减去式(6),式(4)减去式(9),式(6)减去式(9)就可以得到如下 3 个方程:

$$(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)h_1 + \left[ \frac{k_2}{1-k_1}(p_1 - p_2) - \frac{k'_2}{1-k'_1}(p'_1 - p'_2) \right] h_2 = p_1p_2 - p'_1p'_2 \quad (11)$$

$$(p_1 + p_2 - p''_1 - p''_2)h_1 + \left[ \frac{k_2}{1-k_1}(p_1 - p_2) - \frac{k''_2}{1-k''_1}(p''_1 - p''_2) \right] h_2 = p_1p_2 - p''_1p''_2 \quad (12)$$

$$(p'_1 + p'_2 - p''_1 - p''_2)h_1 + \left[ \frac{k'_2}{1-k'_1}(p_1 - p_2) - \frac{k''_2}{1-k''_1}(p''_1 - p''_2) \right] h_2 = p'_1p'_2 - p''_1p''_2 \quad (13)$$

联立式(11)、式(12)、式(13),即得到一个方程组,并可转化为  $E'X' = F'$  的形式,其中

$$X' = (h_1, h_2)^T$$

$$E' = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2, \frac{k_2(1-k'_1)(p_1 - p_2) - k'_2(1-k_1)(p'_1 - p'_2)}{(1-k_1)(1-k'_1)} \\ p_1 + p_2 - p''_1 - p''_2, \frac{k_2(1-k''_1)(p_1 - p_2) - k''_2(1-k_1)(p''_1 - p''_2)}{(1-k_1)(1-k''_1)} \\ p'_1 + p'_2 - p''_1 - p''_2, \frac{k'_2(1-k''_1)(p'_1 - p'_2) - k''_2(1-k'_1)(p''_1 - p''_2)}{(1-k'_1)(1-k''_1)} \end{bmatrix}$$

$$F' = \begin{bmatrix} p_1p_2 - p'_1p'_2 \\ p_1p_2 - p''_1p''_2 \\ p'_1p'_2 - p''_1p''_2 \end{bmatrix}$$

这时,对于对未知数  $h_1, h_2$  来说,由于方程数大于未知数,故一般没有解,但是可以用最小二乘解来拟合,于是可以求出  $h_1, h_2$  的最优值。同理,可以求得  $h_3, h_4$  的值,这样就可以确定虚圆点的像。

其实,当  $l_1$  和  $l_2, l'_1$  和  $l'_2$  正交的时候,这时候  $(A, B, I, J) = -1$ ,即点  $A, B$  与虚圆点  $I, J$  调和共轭。利用这个条件,只需要两组平行线就可以直接求得  $h_1, h_2, h_3, h_4$  的线性解<sup>[5]</sup>。为了不失一般性,这里不考虑这种情况。

### 2.5 求解摄像机内参

标定摄像机目的就是确定摄像机的内参矩阵  $K$ ,本文中采用 5 参数的摄像机,其内参数矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ & \alpha_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $\alpha_x$  是 X 轴的尺度因子,  $\alpha_y$  是 Y 轴的尺度因子,  $(x_0, y_0)$  为主点坐标;  $s$  为扭曲参数。设第 1 次拍照时,摄像机矩阵为  $P = K[I|0]$ ,在其他两个不同的方位对模块拍照时的摄像机矩阵为:  $P_1 = K[R_1|t_1]$  和  $P_2 = K[R_2|t_2]$  ( $R_1, R_2$  表示旋转,矩阵  $t_1, t_2$  表示平移向量)。由于在刚性运动(只有旋转和平移的运动)下,绝对二次曲线的像(image of absolute conic, IAC)  $\omega$  保持不变,而且  $\omega = (KK^T)^{-1}$ ,所以通过求解出  $\omega$ ,再对其进行 Cholesky 分解,即可求出摄像机的内参矩阵  $K$ 。由二次曲线一般形式的方程

$$ax_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f = 0$$

据此可以知道,通过 5 点即可确定一条二次曲线,由于虚圆点的像是  $\omega$  上的点,两个虚圆点可以分实部

和虚部列出两个约束方程,所以,可以通过 3 幅图片即可求出绝对二次曲线的像。

### 2.6 算法描述

本算法步骤如下:

(1)用待标定的摄像机从 3 个不同的方位拍摄模板来得到 3 幅模板的图像;

(2)检测图像中模板上的平行线,如果模板如图 2 所示,则由于直线比较少,所以可以首先通过 Canny 算子进行边缘检测,然后对结果进行霍夫(Hough)变换,再通过拟合出直线参数来求得直线的方程,但是要注意一点,霍夫变换的结果不太精确,为了更进一步精确地求出直线的方程,可以用最小二乘法再次进行拟合。一般情况下,可以通过手工操作先在直线上点点,然后求出直线方程;

(3)对每一组平行线,先通过求它们的叉乘,得到交点,然后根据 2.4 节中所述的方法一来求得虚圆点的像;

(4)求出 3 幅图像中虚圆点像后,再根据 2.5 节中所述的方法求出绝对二次曲线的像  $\omega$ ,最后对结果进行 Cholesky 分解,即可得到摄像机的内参矩阵  $K$ 。

### 3 实验与结论

实验中取  $\varphi = \varphi' = \varphi'' = 45^\circ$ ,设计的模板使用了一个正八边形(如图 3 所示)。

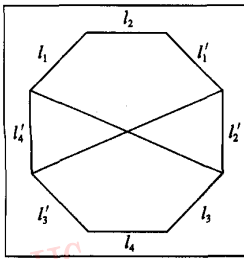


图 3 模板示意图  
Fig. 3 The planar pattern used in experiment

由于在求解前两组平行线的无穷远点的像的时候,已经可以确定无穷远线的像,所以只要求得  $l'_1, l'_2$  的像与无穷远线的像的交点,就可以得到  $l'_1, l'_2$  的无穷远点的像,所以这里省去了直线  $l'_3, l'_4$ 。由正八边形的性质可以得到  $l_1$  与  $l_2, l'_1$  与  $l'_2, l'_1$  与  $l'_2$  的夹角均为  $45^\circ$ 。

标定时,首先对模板从不同方位拍摄 3 幅图片(如图 4 所示),然后使用本文所述算法进行标定,

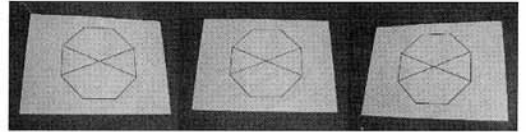


图 4 模板的 3 幅图片  
Fig. 4 Three images of planar pattern

求解过程在 Matlab6.1 中实现。

为了比较算法的精确度,同时使用传统标定法,即通过精确构造的标定块来对摄像机进行标定。两种方法标定的结果如表 1 所示。

表 1 自标定方法和传统标定法结果比较  
Tab. 1 Result of traditional calibration and self-calibration

标定法	$a_x$	$a_y$	$s$	$x_0$	$y_0$
自标定	1534.15	1739.65	-7.18	553.51	609.13
传统标定法	1583.06	1754.56	-5.02	561.25	613.02

由实验结果可以看到,本算法不仅是行之有效的,且具有一定的精度。本文受文献[5]启发,推广出利用射影变换中交比不变的性质,通过平面中夹角任意的几组平行线段来进行摄像机自标定的方法,但是由于求解虚圆点像的过程中求出的是最小二乘解,因此对算法的精度有一定的影响。

### 参考文献 (References)

- FANG De-zhi, CHEN Yi-pei. Projective geometry [M]. Beijing: Higher Education Press, 1983:109 ~ 111. [方德植,陈奕培.射影几何[M].北京:高等教育出版社,1983:109 ~ 111.]
- Semple J G, Kneebone G T. Algebraic projective geometry [M]. London: Oxford University Press, 1952:15 ~ 19.
- Hartley R, Andrew Zisserman. Multiple view geometry in computer vision[M]. Hefei, Anhui: Anhui University Press, 2002: 23 ~ 24. [Hartley R, Andrew Zisserman 著.韦穗,杨尚骏,章权兵等译.计算机视觉中的多视图几何[M].安徽合肥:安徽大学出版社,2002:23 ~ 24.]
- HE Jun-ji, ZHANG Guang-jun, YANG Xian-ming. Approach for calibration of lens distortion based on cross ratio invariability [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2004, 25(5): 597 ~ 599. [贺俊吉,张广军,杨宪铭.基于交比不变性的镜头畸变参数标定[J].仪器仪表学报,2004, 25(5): 597 ~ 599.]
- WU Fu-chao, WANG Guang-hui, HU Zhan-yi. A linear approach for determining intrinsic parameters and pose of cameras from rectangles [J]. Journal of Software, 2003, 14(3):703 ~ 712. [吴福朝,王光辉,胡占义.由矩形确定摄像机内参数与位置的线性方法[J].软件学报,2003, 14(3):703 ~ 712.]