

基于图的 Laplace 谱的特征匹配

王 年¹⁾ 范益政^{1),2)} 韦 穗¹⁾ 梁 栋¹⁾

¹⁾(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室,合肥 230039) ²⁾(安徽大学数学系,合肥 230039)

摘 要 为了能对等距变换和相似变换后的图像进行精确匹配,提出了一种基于图的 Laplace 谱的特征匹配方法,该方法首先是首先给定两幅图像的特征点,然后分别定义其 Laplace 矩阵,再通过分析该矩阵的特征值及特征向量来构造特征点匹配矩阵;最后根据匹配矩阵元素的大小和位置信息来实现特征点匹配,并从理论上证明了该算法在对图像进行等距变换或相似变换情况下能获得精确匹配。实验结果表明,该方法对真实图像的匹配精度可达到 82%。

关键词 匹配 特征点 图 Laplace 谱

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2006)03-0332-05

Feature Matching Based on Laplacian Spectra of Graphs

WANG Nian¹⁾, FAN Yi-zheng^{1),2)}, WEI Sui¹⁾, LIANG Dong¹⁾

¹⁾(Education Ministry Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039)

²⁾(Department of Mathematics, Anhui University, Hefei 230039)

Abstract This paper presents a method of feature matching based on Laplacian spectral of graphs. Given feature points of two images, we define Laplacian matrices respectively, analysis the eigenvalues and eigenvectors of the matrices, and construct a feature points matching matrix with information of magnitude and position of entries in the matching matrix, the feature points matching is done. Furthermore, we theoretically prove that our algorithm can acquire an exact matching under an equiangular transformation or equiform transformation on images. Experimental results show that the approach attains accuracy 82% on real images.

Keywords matching, feature point, graph, Laplacian spectrum

1 引 言

利用图的代数表示(如图的邻接矩阵或 Laplace 矩阵)的特征值和特征向量来刻画图的结构特征,谱图理论是一种有效的技术方法^[1,2]。近年来其在计算机视觉领域,如图像匹配、聚类和分割,谱图理论也得到越来越多的应用^[3-12]。Umeyama 提出了一种 SVD (singular value decomposition) 分解方法^[3],以寻找两个图的邻接矩阵之间的最小平方置换矩阵。这种特征分解的方法适用于精确的图匹配,也就是说,它可在具有相同节点和边结构的两幅图中,寻找图节点之间的对应关系(即所要求的置

换矩阵,或图同构)。借助结构化学的思想,Scott 和 Longuet-Higgins 首次将谱方法应用于图像匹配分析^[4],即通过构造图像之间点的亲近矩阵(inter-image point proximity matrix),并对此矩阵进行 SVD 分解来获得对应关系。该方法可处理不同大小的点集,但对较大角度的旋转效果不好。为了克服 Scott 和 Longuet-Higgins 方法的不足,Shapiro 和 Brady 采用了图像内部点的亲近矩阵(intra-image point proximity matrix)来进行匹配^[5],其方法为,对待匹配的每一幅图像,首先利用其内部点之间距离的高斯函数值来构造亲近矩阵,然后分别计算亲近矩阵的特征值和特征向量,其对应关系可以通过比较不同图像亲近矩阵的有序特征向量来获得。

基金项目:国家自然科学基金项目(60473102);安徽省自然科学基金项目(050460102);安徽省教育厅自然科学重点科研项目(2005KJ005ZD);安徽省教育厅自然科学研究项目(2004kj027)

收稿日期:2005-03-16; **改回日期:**2005-07-06

第一作者简介:王年(1966~),男,副教授。1986年获安徽大学电子工程与信息科学系学士学位,2005年获该校博士学位。主要研究领域为计算机视觉、模式识别、图像处理等。已发表学术论文 20 余篇。E-mail: wn_xlb@ahu.edu.cn

Carcassoni 把图谱分析方法和双步 (dual-step) EM 算法结合起来,通过点的亲和矩阵来获得点匹配的概率^[6]。为了获得更精确的匹配结果, Carcassoni 还采用了一种分层方法来解决匹配问题^[7],即在高层次上,通过模式分析来得到点聚类中心的对应,在低层次上用聚类中心对应来约束个体点的对应。Myers 提出了贝叶斯框架下的基于多模式的遗传算法^[8],用以解决图像中不确定特征点集的匹配问题。Bengoetxea 则引入分类估计算法 (estimation of distribution algorithms) 实现了不精确图的匹配^[9]。

Shapiro 和 Brady 的方法在本质上是对赋权图的邻接矩阵进行处理,即对每个特征点的权赋以 1,而对每条边的权则赋以该边所连的两点之间距离的高斯函数值。关于图的邻接谱的研究,已经有很多丰富的结论^[1]。图的 Laplace 谱是谱图理论研究的另一领域,尽管它的研究受到普遍关注的时间迟于图的邻接谱,但从某种意义上说,图的 Laplace 谱包含的信息不但比邻接谱多,而且更加自然和重要。在 Mohar、Merris 的综述文章和 Chung 撰写的专著中都详尽叙述了 Laplace 谱研究中的若干专题以及应用^[13,14,2]。

本文提出了基于图的 Laplace 谱的另一种匹配方法,即首先对两幅待匹配图像的特征点分别定义其规范化 Laplace 矩阵,然后通过分析该 Laplace 矩阵的特征值及特征向量来构造特征点匹配矩阵,以实现特征匹配,同时从理论上证明了在对图像进行等距变换或相似变换下,本算法不仅能获得精确匹配,而且对较小的仿射和射影变换也能获得较好的匹配效果。实验结果表明,该方法切实可行。

2 基于图的 Laplace 谱的匹配算法

对含有 m 个特征点 $p_i (i=1,2,\dots,m)$ 的图像 I 首先定义如下矩阵:

$$N = N_I = [n_{i,j}] = \begin{cases} -\|p_i - p_j\|^2 & i \neq j \\ -\sum_{k \neq i} n_{i,k} & i = j \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m$$

设 $D = D_I = \text{diag}\{n_{1,1}, n_{2,2}, \dots, n_{m,m}\}$ 。称矩阵

$$L = L_I = D^{-1/2} N_I D^{-1/2} \quad (1)$$

为图像 I 关于上述 m 个特征点的 Laplace 矩阵^[2]的规范化形式。 L_I 为图像 I 的奇异半正定矩阵,其特征值 0 的重数为 1,对应的特征向量为全 $D^{1/2} \mathbf{1}$,其中 $\mathbf{1}$ 为分量全为 1 的向量。

对待匹配的含相等数目特征点的两幅图像 I, J , 将 L_I 分解为

$$L_I = U \Delta_1 U^T \quad (2)$$

其中, $\Delta_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$, 矩阵 $U = (u_1, \dots, u_n)$ 。类似,对 L_J 进行以下分解:

$$L_J = V \Delta_2 V^T \quad (3)$$

其中, $\Delta_2 = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{n-1} > \gamma_n = 0$, 矩阵 $V = (v_1, \dots, v_n)$ 。

下面假设 L_I, L_J 的特征值互不相同 (若存在相同的特征值,则可以通过扰动,使得它们特征值互不相同),则 U, V 的列向量在相差一个符号下是唯一确定的,并称 U, V 的第 i 行向量分别为图像 I, J 中第 i 个特征点的特征表示,记为 $u^{(i)}, v^{(i)}$,然后固定 U 的列向量,对矩阵 V 的列向量进行符号校正,每次校正都是对 V 的一个列向量进行符号校正,使得校正后 V 的行向量极大可能地与特征向量集 $\{u^{(i)}, v^{(i)} | i=1, 2, \dots, m\}$ 共线 (对特征向量集 $\{v^{(i)} | i=1, 2, \dots, m\}$, 则仅考虑已校正过的向量)。事实上,符号校正的过程就是寻找一个最优的符号矩阵 S ,使得 $\|U - PVS\|$: P 为置换矩阵) 最小。

设 $\hat{V} = VS$ 为校正后的向量组。考虑

$$\|u^{(i)} - \hat{v}^{(j)}\|^2 = (u^{(i)} - \hat{v}^{(j)}) (u^{(i)} - \hat{v}^{(j)})^T = 2[1 - u^{(i)} (\hat{v}^{(j)})^T]$$

因此, $u^{(i)}, \hat{v}^{(j)}$ 之间的距离很小,这意味着 $u^{(i)} (\hat{v}^{(j)})^T$ 很大,即图像 I 的第 i 个特征点与图像 J 第 j 个特征点匹配的可能性大。构建以下匹配矩阵

$$C = U \hat{V}^T = [u^{(i)} (\hat{v}^{(j)})^T] = [c_{i,j}] \quad (4)$$

如果 $c_{i,j}$ 是它所在行与列的最大元素,则认为图像 I 的第 i 个特征点与图像 J 中第 j 个特征点匹配。

本文匹配算法如下:

(1) 分别对两幅待匹配图像提取相等数目的特征点,并按照式(1)构建 Laplace 矩阵 L_I 和 L_J ;

(2) 对 L_I 与 L_J 进行如式(2)和式(3)所示的分解;

(3) 对 V 的列向量进行符号校正,可获得校正后的向量组 $\hat{V} = VS$;

(4) 构造匹配矩阵 C ,并根据 $c_{i,j}$ 所在行与列的大小,判断特征点的匹配。

注:若图像 I, J 的特征点数目不等,则不妨设图像 I 的特征点数目为 m ,图像 J 的特征点数目为 n ,且 $m < n$ 。此时仅对 L_J 的前 $(m-1)$ 个特征向量以及最后 1 个特征向量进行处理,并删除第 $(m-1)$ 个特征向量后的 $(n-m)$ 个分量,以达到维数一致。

3 理论分析

之所以在对图像实行等距变换(包括旋转、平移、反射)和相似变换时,上述匹配算法可获得精确匹配结果,在仿射变换下也具有一定的匹配精度,其原因分析如下:

定理 1 设 $I = \{p_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ 为由欧氏平面 Π 上 m 个点构成的集合,若对 Π 进行等距变换;则 $J = \{q_j | j = 1, 2, \dots, m\}$ 为上述 m 个点经过等距变换后的点的集合。设 σ 为造成点 $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 到点 $q_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 对应的置换,则以下结论成立:

(1) 存在置换矩阵 $P = [p_{i,j}]$, 使得 $L_I = PL_J P^T$, 若 $\sigma(i) = j$, 则其中 $p_{i,j} = 1$; 否则 $p_{i,j} = 0$;

(2) 设 $L_I = U\Delta U^T, L_J = V\Delta V^T, \Delta = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 。若 $\lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$, 则存在符号矩阵 S , 使得 $U = PVS$

(3) 设 $\hat{V} = VS$, 则 $U\hat{V}^T = P$, 即置换矩阵元素 $p_{i,j} = 1$ 当且仅当 $\sigma(i) = j$, 则 p_i 与 $q_{\sigma(i)}$ 相对应。

证明 (1) 由于对图像 I 进行了等距变换, 故 $n_{i,j}^I = n_{\sigma(i), \sigma(j)}^J = (PN_J P^T)_{i,j}, N_I = PN_J P^T, D_I = PD_J P^T$ 从而

$$\begin{aligned} L_I &= D_I^{-1/2} N_I D_I^{-1/2} \\ &= (PD_J P^T)^{-1/2} PN_J P^T (PD_J P^T)^{-1/2} \\ &= PD_J^{-1/2} N_J D_J^{-1/2} P^T \\ &= PL_J P^T \end{aligned}$$

(2) 对任何的符号矩阵 S , 有

$$U\Delta U^T = PV\Delta V^T P^T = PVS\Delta S^T V^T P^T$$

由于 L_I 的特征值互不相同, 且其特征分解在列向量相差一个符号下是唯一的, 因此, 存在一个确定的符号矩阵 S , 使得 $U = PVS$ 。

(3) 根据证明(2), 有

$$U\hat{V}^T = PVSS^T V^T = PVV^T = P$$

故结论成立。

注: (1) 由定理 1 的结论可知, 在等距变换下, 本文的算法可以实现精确的匹配;

(2) 在定理 1 中, 若对平面 Π 进行相似变换, 而其他条件不变, 则经过类似讨论, 存在置换矩阵 $P = [p_{i,j}]$, 使得 $L_I = P(sL_J)P^T$, 其中, s 为缩放因子, $P = [p_{i,j}]$ 的定义同上。此时, 设 $L_I = U\Delta U^T, L_J = V(s\Delta)V^T, \Delta = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 。若 $\lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$, 则存在符号矩阵 S , 使得 $U = sPVS$ 。

考虑匹配矩阵 $U\hat{V}^T = sPVSS^T V^T = sPVV^T = sP$ 。由此可以发现, $p_{i, \sigma(i)} = s$ 是它所在行与列的最大元素, 即图像 I 的第 i 个特征点与图像 J 中第 $\sigma(i)$ 个特征点匹配。因此, 在相似变换下, 本文的算法也可以实现精确的匹配。

下面对平面 Π 的仿射变换进行讨论: 设 $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为欧氏平面 Π 上第 i 个点, 若对 Π 进行仿射变换 φ , 则 $q_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 为上述第 i 个点经仿射变换后的点; 设 σ 为造成点 $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 到点 $q_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 对应的置换, 则容易知道, φ 是一个非奇异的线性变换和一个平移变换的复合, 而后者则是等距变换, 故不妨假设 φ 为非奇异的线性变换, 其矩阵表示为: $\varphi: x \mapsto Ax$, 其中 A 为 2 阶非奇异矩阵。由 SVD 分解知, $A = U\Delta V^T$, 其中 $\Delta = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}, \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0, \lambda_1, \lambda_2$ 反映了仿射变换 φ 在两个正交方向上的缩放。此时, 当 $i \neq j$, 则有

$$\begin{aligned} n_{\sigma(i), \sigma(j)}^J &= -\|\varphi(p_i - p_j)\|^2 = -\|U\Delta V^T(p_i - p_j)\|^2 \\ &= -\|\Delta V^T(p_i - p_j)\|^2 \end{aligned}$$

注意到 $\|V^T(p_i - p_j)\|^2 = \|p_i - p_j\|^2$, 从而

$$\begin{aligned} -\lambda_1 n_{i,j}^I &= -\lambda_1 \|p_i - p_j\|^2 \leq n_{\sigma(i), \sigma(j)}^J \leq -\lambda_2 \|p_i - p_j\|^2 \\ &= -\lambda_2 n_{i,j}^I \end{aligned}$$

因此, 若 $\lambda_1/\lambda_2 \rightarrow 1$, 则 $n_{\sigma(i), \sigma(j)}^J \rightarrow \lambda_1 n_{i,j}^I$, 且存在置换矩阵 $P, L_I \rightarrow P(\lambda_1 L_J)P^T$ 。根据定理 1 的讨论, 本文算法对于小程度的仿射变换也有很高的匹配精度。

4 算法验证

设两幅点集图如图 1 所示, 应用本文所提出的算法, 分别对两个点集 a, b 构建 Laplace 矩阵 L_a 和 L_b , 并通过对其进行分解来得到 U 和 V , 其中 V 为已进行过符号修正的矩阵。

$$L_a = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.15 & -0.24 & -0.38 \\ -0.15 & 1.00 & -0.03 & -0.57 \\ -0.24 & -0.03 & 1.00 & -0.51 \\ -0.38 & -0.57 & -0.51 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.85 & -0.29 & 0.42 \\ -0.51 & -0.05 & 0.73 & 0.45 \\ -0.43 & -0.49 & -0.61 & 0.45 \\ 0.73 & -0.18 & 0.10 & 0.65 \end{bmatrix}$$

$$L_b = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.30 & -0.10 & -0.31 \\ -0.30 & 1.00 & -0.07 & -0.60 \\ -0.10 & -0.07 & 1.00 & -0.50 \\ -0.31 & -0.60 & -0.50 & 1.00 \end{bmatrix}$$

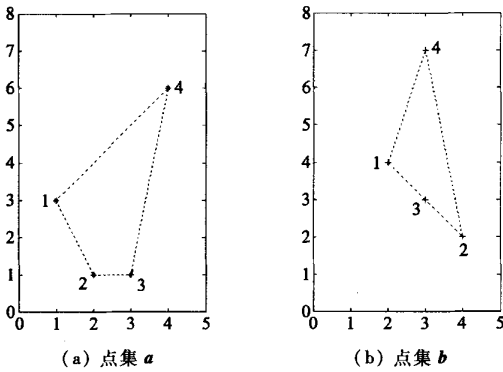
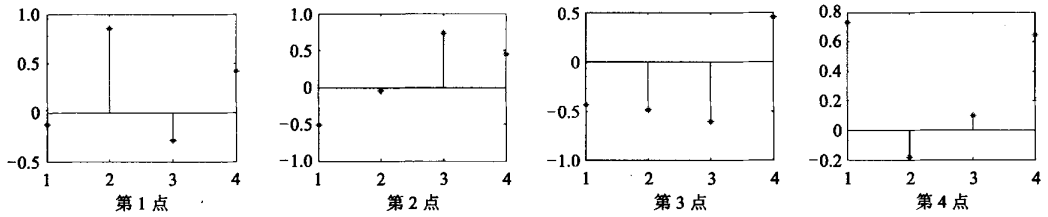
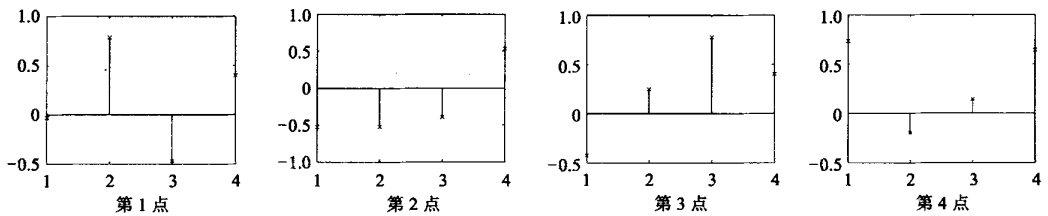


图 1 点集图
Fig. 1 Point-jet images

$$V = \begin{bmatrix} -0.03 & 0.79 & -0.47 & 0.40 \\ -0.53 & -0.53 & -0.40 & 0.53 \\ -0.43 & 0.25 & 0.77 & 0.40 \\ 0.73 & -0.20 & 0.14 & 0.64 \end{bmatrix}$$



(a) 点集 a 各点特征向量



(b) 点集 b 各点特征向量

图 2 点集的特征向量图

Fig. 2 Point-jet eigenvector images

图 2 为点集的特征向量图,第 1 行分别对应点集 *a* 中的 1、2、3、4 点的特征向量,第 2 行分别对应点集 *b* 中的 1、2、3、4 点的特征向量,从图 2 可以看出,两个点集的对应情况:即点集 *a* 中的第 1 点对应点集 *b* 中的第 1 点,点集 *a* 中的第 2 点对应点集 *b* 中的第 3 点,点集 *a* 中的第 3 点对应点集 *b* 中的第 2 点,点集 *a* 中的第 4 点对应点集 *b* 中的第 4 点。

根据本文算法,由 *U* 和 *V* 可得到匹配矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0.98 & -0.05 & 0.21 & -0.04 \\ -0.19 & 0.24 & 0.95 & 0.03 \\ 0.09 & 0.97 & -0.23 & -0.02 \\ 0.04 & 0.01 & -0.03 & 1.00 \end{bmatrix}$$

在矩阵 *C* 中,行号对应点集 *a* 中点的序号,列号对应点集 *b* 中点的序号,从矩阵 *C* 中同样可以得到相同的点对应关系,这种对应关系与图 1 中特征向量的对应关系是一致的。

5 实验

为验证本文算法的效果,又选取了 6 帧房子的真实序列图像(即取自 CMU/VASC 图像库)进行了真实图像实验,实验时,首先在每幅图像上检测出 30 个角点,然后两两之间分别应用本文所提算法进行匹配,匹配的平均准确率达到 82%。图 3 给出其

中 5 组匹配结果,每组图像中,左边为基准图像(第 30 帧),右边依次为第 39 帧、第 20 帧、第 15 帧、第 10 帧、第 3 帧图像(即以其中一幅图像为基准,其他 5 幅分别与其进行匹配运算)。通过对实验结果进行的分析发现,相隔较近的两帧序列图像匹配准确率高于相隔较远的两帧序列图像,这就表明,当摄像机与所拍摄物体变化较小的情况下,应用本文算法能获得高精度的匹配结果。

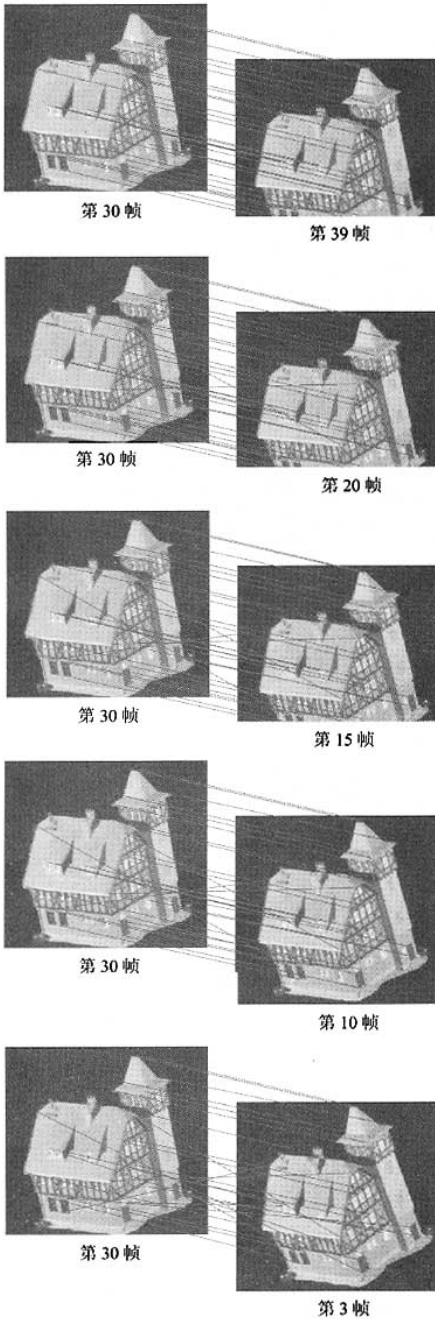


图 3 匹配结果
Fig. 3 Matching result

的特征点先分别定义其 Laplace 矩阵, 然后经过分解来得到反映其特征点特性的特征值及特征向量, 最后由所生成的匹配矩阵 C 就可以实现对应点的匹配。同时从理论上证明了在对图像作等距变换或相似变换下, 本文算法也能获得精确匹配。实验结果表明, 本文所提出的算法可以获得较高的匹配精度。

参考文献 (References)

- 1 Cvetković D, Doob M, Sachs H. Spectra of graphs: Theory and application[M]. Berlin: Academic Press, 1982.
- 2 Chung F R K. Spectral graph theory[M]. Providence, Rhode Island USA: American Mathematical Society, 1997.
- 3 Umeyama S. An eigen decomposition approach to weighted graph matching problems[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1988, 10(5):695 ~ 703.
- 4 Scott G L, Longuet-Higgins H C. An algorithm for associating the features of two images[J]. Proceedings of Royal Society of London, 1991, B-244:21 ~ 26.
- 5 Shapiro L S, Brady J M. Feature-based correspondence—An eigenvector approach [J]. Image Vision Comput, 1992, 10(5): 283 ~ 288.
- 6 Carcassoni Marco, Hancock Edwin R. Spectral correspondence for point pattern matching [J]. Pattern Recognition, 2003, 36(1): 193 ~ 204.
- 7 Carcassoni Marco, Hancock Edwin R. Correspondence matching with modal clusters [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(12):1609 ~ 1615.
- 8 Myers Richard, Hancock Edwin R. Least-commitment graph matching with genetic algorithms [J]. Pattern Recognition, 2001, 34(2): 375 ~ 394,
- 9 Endika Bengoetxea, Pedro Larranagab, Isabelle Bloch, et al. Inexact graph matching by means of estimation of distribution algorithms[J]. Pattern Recognition, 2002, 35(12):2867 ~ 2880.
- 10 Sengupta K, Boyer K L. Modelbase partitioning using property matrix spectra[J]. Computer Vision Image Understanding, 1998, 70(2): 177 ~ 196.
- 11 Shokoufandeh A, Dickinson S J, Siddiqi K, et al. Indexing using a spectral encoding of topological structure[A]. In: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C], Collins, Colorado, USA, 1999: 491 ~ 497.
- 12 Lei He, Han Chia Y, Everding B, et al. Graph matching for object recognition and recovery [J]. Pattern Recognition, 2004, 37(6): 1557 ~ 1560.
- 13 Mohar B. The Laplacian spectrum of graphs[A]. In: Y. Alavi et al. Eds, Graph Theory, Combinatorics, and Applications [M], New York: Wiley, 1991: 871 ~ 898.
- 14 Merris R. Laplacian matrices of graphs: a survey[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1994, 197/198:143 ~ 176.

6 结 论

本文所给出的匹配算法是, 对两幅待匹配图像