

带形状参数的 Bézier 曲线

吴晓勤

(湖南科技大学数学与计算科学学院, 湘潭 411201)

摘 要 给出了含有参数 λ 的 $(n+1)$ 次多项式基函数, 其是 n 次 Bernstein 基函数的扩展; 分析了这组基的性质, 基于该组基定义了带有形状参数的 $(n+1)$ 次多项式曲线。曲线不仅具有 n 次 Bézier 曲线的特性: 如端点插值、端边相切、凸包性、变差缩减性、保凸性等, 而且具有形状的可调性: 在控制顶点不变的情况下, 随着参数不同, 可产生不同逼近控制多边形的曲线。当 $\lambda=0$ 时, 曲线可退化为 n 次 Bézier 曲线。运用张量积方法, 可生成形状可调的曲面, 曲面具有曲线类似的性质。应用实例表明, 本文定义的曲线应用于曲线/曲面的设计十分有效。

关键词 Bézier 曲线 形状参数 曲线设计

中图法分类号: TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2006)02-0269-06

Bézier Curve with Shape Parameter

WU Xiao-qin

(School of Mathematics & Computation Science, Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201)

Abstract Through heightening the degree of polynomial function, a class of polynomial function of $(n+1)$ degree that containing an adjustable constant parameter λ is presented in this paper. They are an extension of n degree Bernstein basis functions. Properties of this new basis are analyzed, which have symmetry, linear independence, weighting property and nonnegative property when the parameter λ is between -2 and 1 , based on which a $(n+1)$ degree polynomial curve with a shape parameter λ is defined. The curve, to be called λ -Bézier curve not only inherits the most properties of n -degree Bézier curve, such as endpoints' properties, symmetry, convex hull property, geometric invariability, affine invariance, convex-preserving property, variation diminishing property and so on, but also can be adjusted in shape by changing the value of λ without changement of control points. When $\lambda=0$, the curve degenerates to n -degree Bézier Curve. Using tensor product approach, a surface with parameter λ is constructed, whose properties are similar to the curve's. At last, examples illustrate the method of constructing curve is very useful for curve/surface design.

Keywords Bézier curve, shape parameter, curve design

1 引 言

以 Bernstein 基构造的 Bézier 曲线由于结构简单、直观而成为计算机辅助几何设计(CAGD)中表示曲线和曲面的重要工具之一^[1,2]。给定了控制顶点及相应的 Bernstein 基以后, Bézier 曲线就确定了;若要修改曲线的形状,必须调整控制顶点。有理 Bézier 曲线通过引入权因子,不改变控制顶点,由权因子来调

整曲线的形状;但有理 Bézier 曲线还有一定的缺陷:如权因子如何选取;权因子对曲线的形状影响还不是十分清楚;求导次数增加,求积分的不方便等^[3,4]。

随着几何造型工业的发展,往往要求调整曲线的形状或改变曲线的位置。人们开始想办法推广 Bézier 曲线。文献[5]中,讨论了一类可调控 Bézier 曲线,针对 $(n+1)$ 个控制顶点,用 $m=l(n-1)+1$ 次 Bernstein 基构造一类 Bézier 曲线。该类曲线的参数 l 几何意义不明显、曲线次数过高、增加了曲线

基金项目:湖南省教育厅资助项目(04C215)

收稿日期:2004-11-28;改回日期:2005-05-12

第一作者简介:吴晓勤(1968 ~),男,苗族,讲师。2000 年于中南大学获应用数学专业硕士学位,现为中南大学数学学院博士研究生。主要研究兴趣为计算机辅助几何设计、计算机图形学、数字图像处理等。已发表论文 10 多篇。E-mail: xqwu6789@tom.net。

的计算量。文献[6]通过将参数 t 重新参数化,提出了广义 Bézier 曲线和曲面,其目的在于提高连接两端 Bézier 曲线的连续阶。文献[7]通过将参数 t 有理参数化提出 Bernstein-Bézier 类曲线,但曲线不具有对称性。而文献[8]提出了 2 次 Bézier 曲线的扩展,其所用的方法是提高多项式次数以获得不同于 Bernstein 基且含有参数 λ 的基函数,得到的曲线具有 2 次 Bézier 曲线类似的性质。

本文针对一般 n 次 Bézier 曲线进行扩展,以文献[8]所给基函数为基础,利用德卡斯特罗算法,得到了 $(n+1)$ 个 $(n+1)$ 次带有参数 λ 的基函数。该组基具有与 Bernstein 基类似的性质,如非负性、权性、单峰性、线性无关性等。由该组基函数构造的带有形状参数 λ 的曲线,称为 $(n+1)$ 次 λ -Bézier 曲线。该曲线具有与 n 次 Bézier 曲线类似的性质,如端点插值、端边相切、凸包性、变差缩减性、保凸性等等,而且在控制顶点不变情况下,随着参数 λ 不同,可产生不同逼近控制多边形的曲线。当 $\lambda = 0$ 时,曲线退化为 n 次 Bézier 曲线。运用张量积方法,可生成形状可调的曲面,曲面具有曲线类似的性质。实例表明,本文所定义的曲线应用于曲线/曲面设计是十分有效的。

2 基函数的定义及性质

为了讨论方便,不妨把文献[8]的基函数记为

$$\begin{cases} b_{0,3}(t) = (1-\lambda t)(1-t)^2 \\ b_{1,3}(t) = (2+\lambda)(1-t)t \\ b_{2,3}(t) = (1-\lambda+\lambda t)t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

其中, λ 是参数,且 $-2 \leq \lambda \leq 1$ 。

易见,基函数组式(1)有对称性、非负性及权性,而且式(1)是 2 次 Bernstein 基的扩展,当 $\lambda = 0$ 时,其退化为 2 次 Bernstein 基。一般地,对 n 次 Bernstein 基有如下扩展。

定义 1 对 $t \in [0,1], n \geq 3$, 令

$$b_{k,n+1}(t) = (1-t)b_{k,n}(t) + tb_{k-1,n}(t) \quad (2)$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

规定 $b_{-1,n}(t) = b_{n,n}(t) = 0$ 。

称式(2)所定义的函数为带参数 λ 的 $(n+1)$ 次 Bernstein 基函数,简称为 $(n+1)$ 次 λ -B 基。

当 $n = 3$ 时,4 个 4 次 λ -B 基为

$$b_{0,4}(t) = (1-\lambda t)(1-t)^3$$

$$b_{1,4}(t) = (3+\lambda-\lambda t)(1-t)^2 t$$

$$b_{2,4}(t) = (3+\lambda t)(1-t)t^2$$

$$b_{3,4}(t) = (1-\lambda+\lambda t)t^3$$

当 $n = 4$ 时,5 个 5 次 λ -B 基为

$$b_{0,5}(t) = (1-\lambda t)(1-t)^4$$

$$b_{1,5}(t) = (4+\lambda-2\lambda t)(1-t)^3 t$$

$$b_{2,5}(t) = (6+\lambda)(1-t)^2 t^2$$

$$b_{3,5}(t) = (4-\lambda+2\lambda t)(1-t)t^3$$

$$b_{4,5}(t) = (1-\lambda+\lambda t)t^4$$

图 1 和图 2 分别是当 $\lambda = -1$ 时 4 次和 5 次 λ -B 基函数图形。

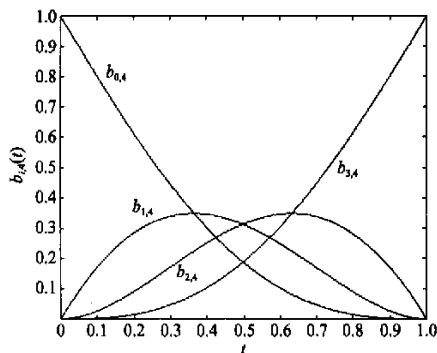


图 1 4 个 4 次基函数图形 ($\lambda = -1$)

Fig. 1 Four quartic basis functions ($\lambda = -1$)

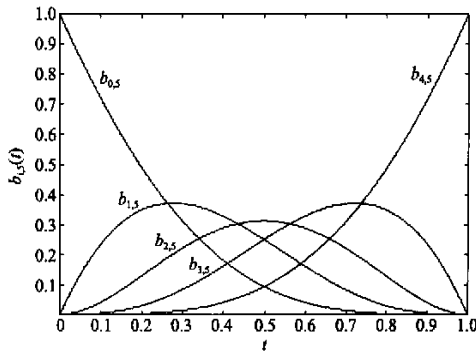


图 2 5 个 5 次基函数图形 ($\lambda = -1$)

Fig. 2 Five quintic basis functions ($\lambda = -1$)

在定义 1 中,每个基函数都含有参数 λ , λ 的取值范围是 $-2 \leq \lambda \leq 1$ 。实际上,随着 n 的增大, λ 的取值范围可更大,比如,当 $n = 3$ 时, λ 的取值范围是 $-3 \leq \lambda \leq 1$; 当 $n = 4$ 时, λ 的取值范围是 $-4 \leq \lambda \leq 1$ 。

从递推式(2)可得到 $(n+1)$ 次 λ -B 基具有如下性质:

性质 1 非负性与权性,即

$$\sum_{i=0}^n b_{i,n+1}(t) \equiv 1 \text{ 且 } b_{i,n+1}(t) \geq 0, i = 0, \dots, n.$$

此性质显然可从式(1)的非负性、权性及递推式(2)证得。

性质 2 对称性, 即 $b_{i,n+1}(1-t) = b_{n-i,n+1}(t)$, $i=0,1,\dots,n$ 。

此性质显然从式(1)的对称性及递推式(2)可证。

性质 3 端点性质

$$b_{0,n+1}(0) = b_{n,n+1}(1) = 1 \quad (3)$$

$$b_{i,n+1}^{(j)}(0) = b_{i,n+1}^{(j)}(1) = 0 \quad (4)$$

$$(j=0,1,\dots,i-1; k=0,1,\dots,n-i-1)$$

此性质也可由式(1)及递推式(2)归纳验证。

性质 4 单峰性, 即每个基函数在 $[0,1]$ 上有一个局部最大值。

也就是说固定一个参数 $t^* \in [0,1]$, 则存在一个依赖于 t^* 的指标 k , 使得

$$b_{0,n+1}(t^*) \leq \dots \leq b_{k-1,n+1}(t^*) \leq b_{k,n+1}(t^*) \geq b_{k+1,n+1}(t^*) \geq \dots \geq b_{n,n+1}(t^*) \quad (5)$$

证明 用归纳法证之。对 $n=2,3$ 时结果是肯定的; 假设一直到 n 结果都是成立的。从式(2)可知

$$b_{j,n+1}(t^*) = (1-t^*)b_{j,n}(t^*) + t^*b_{j-1,n}(t^*)$$

$$j=0,1,\dots,n$$

则 $b_{j,n+1}(t^*)$ 是 $b_{j,n}(t^*)$ 与 $b_{j-1,n}(t^*)$ 的凸组合, 因此有

$$b_{0,n+1}(t^*) \leq b_{0,n}(t^*) \leq \dots \leq b_{k-1,n}(t^*) \leq b_{k,n+1}(t^*) \leq b_{k,n}(t^*) \geq b_{k+1,n+1}(t^*) \geq b_{k+1,n}(t^*) \geq \dots \geq b_{n-1,n}(t^*) \geq b_{n,n+1}(t^*)$$

从而式(5)成立。

性质 5 线性无关性

证明 设线性组合 $\sum_{i=0}^n c_i b_{i,n+1}(t) = 0$, 当 $t=0$ 时, 由式(3)、式(4)知, 有 $c_0=0$ 。将线性组合微分 k 次后, 据式(4)可知, 当 $t=0$ 时, 有 $c_k=0$ ($k=1, 2, \dots, n$)。因此结论得证。

性质 6 退化性, 即当 $\lambda=0$ 时, $b_{i,n+1}(t) = B_i^{(n)}(t)$, $i=0,1,\dots,n$ 。

也就是说 $(n+1)$ 个 $(n+1)$ 次 λ -B 基退化为 n 次 Bernstein 基函数。据当 $\lambda=0$, $b_{i,3}(t) = B_i^{(2)}(t)$ 及递推式(2)可知结论成立。

此性质说明, $(n+1)$ 次 λ -B 基函数是 n 次 Bernstein 基函数的扩展。

3 曲线的构造及性质

定义 2 给定 $(n+1)$ 个控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^d$ ($d=2,3, i=0,1,\dots,n$), 对 $t \in [0,1]$ 定义曲线

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n+1}(t) \quad (6)$$

称式(6)所定义的曲线为带有形状参数 λ 的 $(n+1)$ 次 Bézier 曲线, 简称 $(n+1)$ 次 λ -Bézier 曲线。

显然, 当 $\lambda=0$ 时, $(n+1)$ 次 λ -Bézier 曲线退化为 n 次 Bézier 曲线。图 3 从上到下是 $\lambda=1, 0, -1, -2, -3$ 时不同的 4 次 λ -Bézier 曲线。图 4 从上到下是 $\lambda=1, 0, -1, -2, -3, -4$ 时不同的 5 次 λ -Bézier 曲线。从图 3、图 4 来看, 4 次 λ -Bézier 曲线和 5 次 λ -Bézier 曲线分别比 3 次 C-Bézier 曲线^[9] 和 4 次 C-Bézier 曲线^[10] 有更好的逼近性, 而且突破了 Bézier 曲线对控制多边形的逼近度。

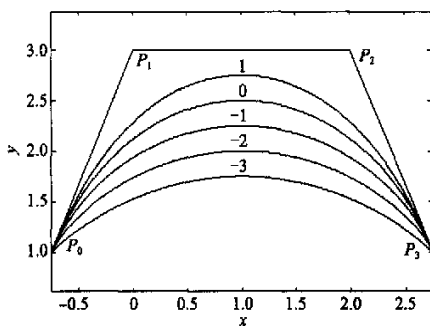


图 3 4 次不同参数值的曲线

Fig. 3 Quartic curves with different parameters

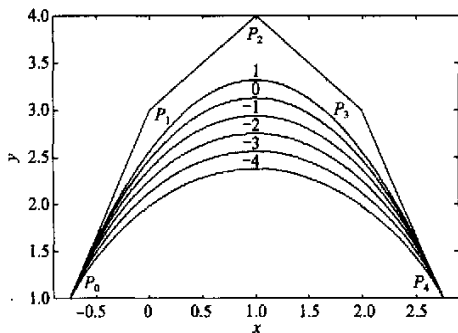


图 4 5 次不同参数值的曲线

Fig. 4 Quintic curves with different parameters

从基函数的性质, 不难得出曲线式(6)具有以下性质:

性质 1 端点性质

$$B(0) = P_0$$

$$B(1) = P_n$$

$$B'(0) = (n+\lambda)(P_1 - P_0)$$

$$B'(1) = (n+\lambda)(P_n - P_{n-1})$$

该性质说明曲线式(6)插值于首末端点及与控

制多边形的首末边相切。

性质 2 凸包性

由基函数的性质 1 即得。

性质 3 对称性

即以 P_n, \dots, P_1, P_0 为顶点的 $(n + 1)$ 次 λ -Bézier 曲线和以 P_0, \dots, P_{n-1}, P_n 为顶点的 $(n + 1)$ 次 λ -Bézier 曲线是相同的, 只是定向相反。因为根据基函数的对称性质, 可得

$$\begin{aligned}
 B(1 - t) &= \sum_{i=0}^n b_{i,n+1}(1 - t)P_{n-i} \\
 &= \sum_{j=0}^n b_{j,n+1}(t)P_j \\
 &= B(t)
 \end{aligned}$$

性质 4 几何不变性和仿射不变性

曲线仅依赖于控制顶点而与坐标系的位置和方向无关, 即曲线的形状在坐标平移和旋转后不变, 同时, 对控制多边形进行缩放或剪切等仿射变换后, 所对应的新曲线就是相同仿射变换后的曲线。

性质 5 变差缩减性 (V. D.)

为了证明此性质, 先给出一个引理。

引理 在两个正数序列之间插入一个数, 则新序列的符号改变次数要么与原序列的符号改变次数相同, 要么比原序列的符号改变次数多 2。

证明 采用文献 [11] 所提供的方法, 先证明基函数组 $\{b_{0,n+1}(t), b_{1,n+1}(t), \dots, b_{n,n+1}(t)\}$ 在 $(0, 1)$ 上满足笛卡尔符号法则, 即对任一常数序列 $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$, 有

$$\text{Zeros}(0, 1) \left\{ \sum_{k=0}^n c_k b_{k,n+1}(t) \right\} \leq SA(c_0, c_1, \dots, c_n) \tag{7}$$

其中, $\text{Zeros}(0, 1) \{f(t)\}$ 表示函数 $f(t)$ 在区间 $(0, 1)$

的根的个数, $f(t) = \sum_{k=0}^n c_k b_{k,n+1}(t)$, $SA(c_0, c_1, \dots, c_n)$ 表示序列 (c_0, c_1, \dots, c_n) 的符号改变次数。

不妨设 $c_0 > 0$, 且 $SA(c_0, c_1, \dots, c_n) = k, (k = 0, 1, \dots, n)$ 。

(1) 当 k 为奇数时, 根据引理, 则 $c_n < 0$ 。另一方面, $f(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是连续函数, $f(0) = c_0, f(1) = c_n$ 。假设 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上有 $k + 1$ 个根, 即有偶数个根, 则 $f(1) = c_n > 0$, 故产生矛盾, 式 (7) 成立。

(2) 当 k 为偶数时, 根据引理, 则 $c_n > 0$ 。另一方面, $f(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是连续函数, $f(0) = c_0, f(1) = c_n$ 。假设 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上有 $k + 1$ 个根, 即有奇

数个根, 则 $f(1) = c_n < 0$, 故产生矛盾, 式 (7) 也成立。

下证变差缩减性。令 L 为通过点 Q 和法向量为 v 的直线 (或平面)。

如果 L 和控制多边形 $\langle P_0 P_1 \dots P_{n-1} P_n \rangle$ 交于 P_k, P_{k+1} 之间的边, 则 P_k, P_{k+1} 一定位于 L 的两侧, 有 $v \cdot (P_k - Q)$ 和 $v \cdot (P_{k+1} - Q)$ 符号相反。因此, 一方面 $SA(v \cdot (P_0 - Q), v \cdot (P_1 - Q), \dots, v \cdot (P_{n-1} - Q), v \cdot (P_n - Q)) \leq \langle P_0 P_1 \dots P_{n-1} P_n \rangle$ 与 L 交点的个数; 另一方面, $B(t)$ 与 L 交点的个数为

$$\text{Zeros}(0, 1) \left\{ \sum_{k=0}^n b_{k,n+1}(t) (P_k - Q) \cdot v \right\}$$

所以, 据基函数组的笛卡尔符号法则

$B(t)$ 与 L 交点的个数 $\leq SA(v \cdot (P_0 - Q), v \cdot (P_1 - Q), \dots, v \cdot (P_{n-1} - Q), v \cdot (P_n - Q))$ 从而结论得证。

性质 6 保凸性

由性质 5 知, 当控制多边形为凸时, 平面上任一直线与曲线的交点个数不超过 2, 因为直线与控制多边形的交点个数最多为 2。

4 曲线的应用实例

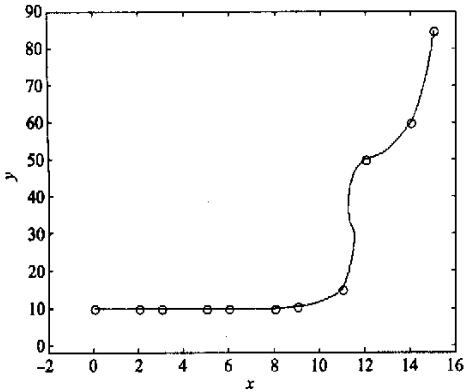
下面针对低次 λ -Bézier 曲线, 给出一些应用例子。

4.1 保形插值

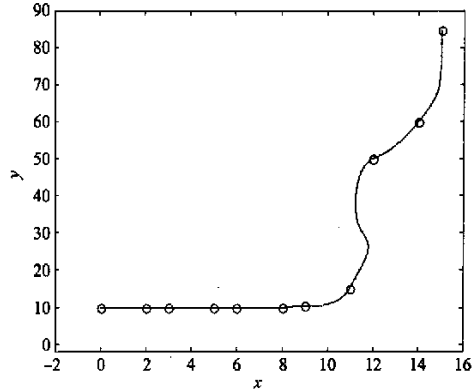
对于 Akima 数据, 已有很多方法对其做了插值研究 [12]。若要求满足保形插值, 需严格满足一定的条件, 而且曲线是固定的。如果采用 3 次 λ -Bézier 曲线, 则条件要弱得多, 只需增加一些控制顶点, 曲线可达到 G^1 连续, 且曲线形状可调。图 5 中圆点是 Akima 数据点, 插值曲线分为两部分, 一部分是直线段, 另一部分是曲线段, 其中拐段是两条曲线组成的, 共有 5 条曲线。图 5(a) 中 5 条曲线段的参数 λ 取值分别是 $-1, -1, -1, 1, -1$, 图 5(b) 5 条曲线段的参数 λ 取值分别是 $0, 1, -1, 0, 1$, 两条曲线都具有保形插值的特点且是 G^1 连续的。

4.2 圆的逼近

给定一整圆, 取相应的控制顶点 $P_0(-1, 0), P_1(-1, 1.2), P_2(1, 1.2), P_3(1, 0), P_4(1, -1.2), P_5(-1, -1.2), P_6(-1, 0)$, 则分别以 $P_0 P_1 P_2 P_3$ 及 $P_3 P_4 P_5 P_6$ 为顶点生成的 4 次 λ -Bézier 曲线可很好地逼近整圆。图 6 是当 $\lambda = 0.56$ 时, 曲线对整圆的逼近图。



(a) $\lambda = -1, -1, -1, 1, -1$



(b) $\lambda = 0, 1, -1, 0, 1$

图 5 曲线对 Akima 数据的保形插值(3次 λ -Bézier)

Fig. 5 Shape preserving interpolation curve to Akima data (cubic)

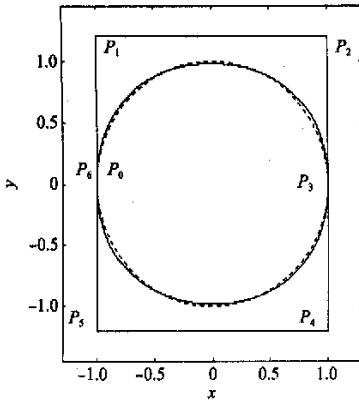


图 6 曲线对整圆的逼近(4次 λ -Bézier)

Fig. 6 Approximation curve to circle (quartic)

4.3 花瓣图形

λ -Bézier 曲线与 Bézier 曲线一样,当首末顶点重合时,可得到一封闭曲线,如图 7 所示是当 $\lambda = 1, 0$,

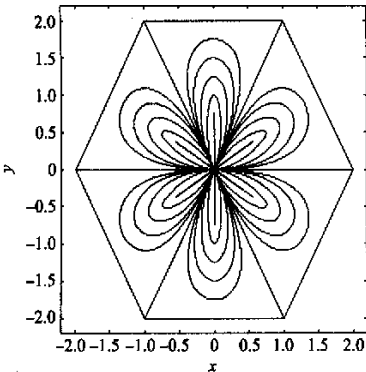


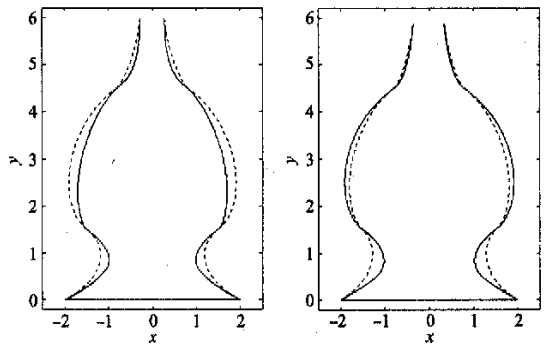
图 7 闭曲线的花瓣图形(4次 λ -Bézier)

Fig. 7 Leaf pattern with close curves (quartic)

$-1, -2, -3$ 时的 4 次 λ -Bézier 闭曲线的花瓣图形。

4.4 花瓶图形

两段同次的 λ -Bézier 曲线可方便地进行拼接,图 8 中的花瓶瓶身的曲线共有 6 段,图 8(a)是用 4 次 λ -Bézier 曲线设计的图形,(b)是用 5 次 λ -Bézier 曲线设计的图形,在图 8(a)、(b)中,都可调整每一段曲线的参数修改瓶身曲线。



(a) 4 次曲线花瓶图形

(b) 5 次曲线花瓶图形

图 8 4 次、5 次曲线花瓶图形

Fig. 8 Vase pattern of quartic and quintic curve

5 曲面的定义

运用张量积的方法,可将曲线推广到曲面上。

定义 3 设有 $(n + 1) \times (n + 1)$ 个控制顶点 $P_{ij}(i, j = 0, 1, \dots, n)$, 其相应的张量积曲面

$$B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P_{ij} b_{i,n+1}(u) b_{j,n+1}(v) \quad (8)$$

$u, v \in [0, 1], -2 \leq \lambda \leq 1$

称为 $[0,1] \times [0,1]$ 上的双 $(n+1)$ 次 λ -Bézier曲面。可证明双 $(n+1)$ 次 λ -Bézier曲面不仅具有与 $(n+1)$ 次 λ -Bézier曲线相似的性质,而且曲面也保持了Bézier曲面的许多性质。

6 结论

通过提高多项式的次数得到一组带有参数 λ 的 $(n+1)$ 次多项式基函数,并分析了该组基的性质;以该组基构造的曲线称为 $(n+1)$ 次 λ -Bézier曲线,曲线具有 n 次Bézier曲线的特征,如端点插值、端边相切、凸包性、变差缩减性、保凸性等等。在计算上,该曲线比 n 次Bézier曲线的计算量大,可利用海纳(Horner)算法来计算曲线。该曲线的优点是:对于同样的 $(n+1)$ 个控制顶点,参数 λ 可调整曲线的形状,不同的 λ 取值,可得到不同的曲线;当 $\lambda=0$ 时,曲线退化为 n 次Bézier曲线。从低次曲线,比如4次和5次 λ -Bézier曲线看,构造的曲线比3、4次C-Bézier曲线具有更好的逼近性,突破了Bézier曲线对控制多边形的逼近度。运用张量积,将曲线推广到曲面,曲面的形状是可调的且具有曲线类似的性质。下一步,将研究曲线、曲面的拼接,特别是低次曲线、曲面的拼接,可以预见,因为 λ -Bézier曲线含有参数,相对于Bézier曲线来说,曲线曲面的拼接将更方便、自由。

参考文献(References)

- 1 Shi Fa-zhong. Computer Aided Geometric Design & Non-Uniform Rational B-Spline [M]. Beijing: High Education Press, 2001: 306 ~ 454. [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条[M]. 北京:高等教育出版社, 2001:306 ~ 454.]
- 2 Pottmann H, Wagner M G. Helix splines as an example of affine tchebycheffian splines [J]. Advances Computation Mathematics, 1994, 45(2): 123 ~ 142.
- 3 Piegl L, Tiller M. The NURBS Book (2nd ed) [M]. Berlin: Springer, 1997: 141 ~ 188.
- 4 Marnar E, Peña J M, Sanchez-Renes J. Shape preserving alternatives to the rational Bézier model [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(1): 37 ~ 60.
- 5 Qi Cong-qian, Wu Hong-yi. A class of modifiable Bézier curves and its approximation [J]. Journal of Hunan University, 1996, 23(6): 15 ~ 19. [齐从谦, 邬弘毅. 一类可调控 Bézier 曲线及其逼近性 [J]. 湖南大学学报, 1996, 23(6): 15 ~ 19.]
- 6 Liu Cen-hong, Liu Shong-tao. Application of generalized Bézier curve and surface in smooth joining [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1996, 19(1): 107 ~ 114. [刘根洪, 刘松涛. 广义 Bézier 曲线与曲面在连接中的应用 [J]. 应用数学学报, 1996, 19(1): 107 ~ 114.]
- 7 Liang Xi-kun. Bernstein-Bézier class curves and a reparametrization method of Bézier [J]. Journal of Computer Research and Development, 2004, 41(6): 1016 ~ 1021. [梁锡坤. Bernstein-Bézier 类曲线和 Bézier 曲线重新参数化方法 [J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(6): 1016 ~ 1021.]
- 8 Han Xu-li, Liu Sheng-jun. Extension of a quadratic Bézier curve [J]. Journal of Central South University Technology, 2003, 34(2): 214 ~ 217. [韩旭里, 刘圣军. 二次 Bézier 曲线的扩展 [J]. 中南工业大学学报(自然科学版), 2003, 34(2): 214 ~ 217.]
- 9 Zhang Ji-wen. C-curves: An extension of cubic curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(2): 199 ~ 217.
- 10 Chen Qin-yu, Yang Xun-nian, Wang Guo-zhao. Properties and applications of degree 4 C-curve [J]. Application Math Journal Chinese University (Series A.), 2003, 18(1): 45 ~ 50. [陈秦玉, 杨勋年, 汪国昭. 四次 C-曲线的性质及其应用 [J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2003, 18(1): 45 ~ 50.]
- 11 Ron Goldman. Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004: 152 ~ 157. [Ron Goldman 著. 金字塔算法——曲线曲面几何模型的动态编程处理 [M]. 吴宗敏, 刘剑平, 曹沉等译. 北京: 电子工业出版社, 2004: 152 ~ 157.]
- 12 Fontanella F. Shape preserving interpolation [A]. In: Computation of Curves and Surfaces [C], Tenerife, Spain: Kluwer Academic Publishers, 1989: 183 ~ 214.