基于约束优化的Bézier曲面形状修改

夏飞海 吴庆标

(浙江大学数学系科学与工程计算研究所,杭州 310028)

摘 要 Bézier曲线和曲面广泛应用于CAGD(计算机辅助几何设计)和计算机图形学,对Bézier曲线或者曲面的设计和形状修改是一个重要的问题。研究了基于几何约束的Bézier曲面优化问题,对单点和多点约束的问题,提出了一种通过修改控制点的约束优化方法。用这种方法,通过修改原Bézier曲面的控制点来修改曲面的形状并满足给定的约束条件,同时给出了数值实例,其结果表明,用拉格朗日方法能有效地解决Bézier曲面的形状修改问题。

关键词 Bézier曲面 约束优化 形状修改 控制点

中图法分类号: TP391.72 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2006)02-0265-04

Shape Modification of Bézier Surfaces by Contrained Optimization

XIA Fei-hai, WU Qing-biao

(*Institute of Scientific & Engineering Computing Mathematics, Mathematics Department, Zhejiang University, Hangzhou* 310028)

Abstract Bézier curve and surfaces are one kind of the most commonly used parametric curves in CAGD and computer graphics. Developing more convenient techniques for designing and modifying Bézier curve and surfaces are an important problem. This paper investigates the optimal shape modification of Bézier surfaces by geometric constraints. A constrained optimization method based on changing the control points of the surfaces is presented in this paper. Ahich modifys control points of the original Bézier surfaces to satisfy the given constraints and modify the shape of the surfaces optimally. Practical examples are also given. The results indicate that Lagrange multiplier method is an effective way to solve the problem of shape of Bézier surfaces.

Keywords Bézier surface, constrained optimization, shape modification, control points

1 引 言

Bézier曲线和曲面广泛应用于计算机辅助几何设计(CAGD)和计算机图形学,其在形状设计方面有很多好的性质。当生成Bézier曲面时,往往因为设计的需要而对它做形状的修改。对NURBS(non-uniform rational B-splires)和B样条曲线曲面的形状修改已经被广泛的研究,文献[1]提出了NURBS曲线的外形修改的两种方法,即基于控制顶点和权因子的修改;文献[2]给出了一个方法让用户依靠曲线在给定点的值和导数指定曲线的几何性质;文献[3]、[4]给出了同时修改控制顶点和权,改变NURBS曲线外形的方法;文献[5]、[6]分别给出了NURBS曲线和曲面几何约束修改方法。然而,对Bézier曲面的形状修改是研究中所要解决的一个重要问题。文献[7]讨论了Bézier曲线的约束修改方法,基于此,本文研究了基于几何约束的Bézier曲面优化问题,对单点和多点约束的问题,提出了一种通过修改控制点的约束优化方法。用这种方法,通过修改原Bézier曲面的控制点来修改曲面的形状并满足给定的约束条件。对单点约束的情况给出了精确的公式,同时给出了数值实例。

基金项目:浙江省自然科学基金项目(101027)

收稿日期:2004-04-16;**改回日期**:2005-05-20

第一作者简介:夏飞海(1980~),男。2003年毕业于浙江大学信息与计算科学专业,现为浙江大学计算数学专业硕士研究生。主要研究方向为计算机图形学。E-mail:xiafeihai@sina.com

2 问题的提出

设 $P_{ij}(i=0,1,\cdots,m;\ j=0,1,\cdots,n)$ 为 $(m+1)\times(n+1)$ 个空间点列，则 $m\times n$ 次 Bézier 曲面的定义为

$$S(u,w)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)P_{ij} \tag{1}$$

其中，$u,w\in[0,1]$，并且 $B_{i,m}(u)$ 和 $B_{j,n}(w)$ 为 Bernstein 基函数，也是曲面上各点位置矢量的调和函数，其数学表达式为

$$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i} \tag{2}$$

如图1所示，s 为 Bézier 曲面 $S(u,w)$ 上的一点，并假定它的参数值为 (u_s,w_s)，而 T 是一个目标点，为了使曲面通过点 T，必须对曲面上的控制点进行修正。

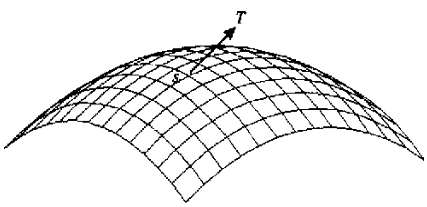


图1 Bézier 曲面局部点的变化

Fig. 1 Illustration of local shape modification

3 对于单点的约束优化

3.1 单点约束的情况

由于点 s 的改变，曲面的形状必然要重新修整，而 Bézier 曲面的形状可以完全由控制点来决定。所以本文方法是确定有多少控制点要进行重新调整，且具体要调整多少？为了保证该曲面与相邻曲面的连续性，首先假定边界点保持不变，即 P_{ij}($i=0$ 或者 m，$j=0$ 或者 n) 这 $2(m+n)$ 个边界点保持不变。总体上，对于局部形状的改变而需重新调整的曲面上的 $k\times l$ 个点给出了精确的公式，其中 $1\leqslant k\leqslant m-1$；$1\leqslant l\leqslant n-1$。

假定点 $\boldsymbol{P}_{pq},\boldsymbol{P}_{p(q+1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{P}_{p(q+l-1)}$；$\boldsymbol{P}_{(p+1)q},\boldsymbol{P}_{(p+1)(q+1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{P}_{(p+1)(q+l-1)}$；$\cdots\cdots$，$\boldsymbol{P}_{(p+k-1)q},\boldsymbol{P}_{(p+k-1)(q+1)},\cdots\cdots,\boldsymbol{P}_{(p+k-1)(q+l-1)}$ 需要调整，并设这些点的修正向量为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=(\varepsilon_{ij}^x,\varepsilon_{ij}^y,\varepsilon_{ij}^z)^{\mathrm{T}}$，那么修改后的曲面方程为

$$\begin{aligned}\tilde{S}(u,w)=&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{q-1}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{P}_{ij}+\\&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=q+1}^{n}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{P}_{ij}+\\&\sum_{i=0}^{p+1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{P}_{ij}+\\&\sum_{i=p+k}^{m}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{P}_{ij}+\\&\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)(\boldsymbol{P}_{ij}+\boldsymbol{\varepsilon}_{ij})\\=&\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}+\\&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{P}_{ij}\\=&S(u,w)+\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\end{aligned} \tag{3}$$

由于点 $T(u_s,w_s)$ 过 $\tilde{S}(u,w)$，则它满足：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}=&\tilde{S}(u_s,w_s)\\=&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\boldsymbol{P}_{ij}+\\&\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\\=&\boldsymbol{s}+\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\end{aligned} \tag{4}$$

通过约束优化的方法来确定 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ 的值，使得：

$$\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}\|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\|^2=\mathrm{Min} \tag{5}$$

这里的 $\|\cdot\|$ 是欧几里德泛数。由拉格朗日乘数法，定义拉格朗日方程为

$$\begin{aligned}L=&\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}\|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\|^2+\\&\boldsymbol{\lambda}\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{s}-\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 为一常量。令

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}^x}(L)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}^y}(L)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}^z}(L)=0$$

$$(i=p,p+1,\cdots,p+k-1;\ j=q,q+1,\cdots,q+l-1)$$

并把解得的方程写成向量形式，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{s}+\displaystyle\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} & (7)\\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\boldsymbol{\lambda}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s) & (8)\end{cases}$$

通过解上述方程，得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\frac{B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)}{\displaystyle\sum_{i=p}^{p+k-1}\sum_{j=q}^{q+l-1}B_{i,m}^2(u_s)B_{j,n}^2(w_s)}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{s}) \tag{9}$$

3.2 端点和切线的约束

在很多情况下,希望保持Bézier曲面的边界点及过边界点的切线方向保持不变。考虑控制点$\boldsymbol{P}_{ij}(i=0$或$m)$保持不变,新产生的控制点$\boldsymbol{P}'_{ij}(i=1$或$m)$必须在相应的边上$\boldsymbol{P}_{(i+1)j}\boldsymbol{P}_{ij}(i=0$或$m-1)$上。如果控制点$\boldsymbol{P}_{ij}(i=1$或$m-1)$改变了,那么$(m-1)(n+1)$个点需要变化。仍旧以$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=(\varepsilon_{ij}^{x},\varepsilon_{ij}^{y},\varepsilon_{ij}^{z})^{\mathrm{T}}$为修正向量。由于要保持切方向不变,因此假定$\boldsymbol{\varepsilon}_{1j}=k_{1j}(\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j})/\|\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j}\|$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(m-1)j}=k_{(m-1)j}(\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j})/\|\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j}\|$,其中,$k_{1j},k_{(m-1)j}$为任意实数。

那么修正后的曲面方程可以表示为

$$\begin{aligned}\tilde{S}(u,w)=&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\boldsymbol{P}_{ij}+\\&\sum_{j=0}^{n}k_{1j}\frac{(\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j})}{\|\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j}\|}B_{1,m}(u)B_{j,n}(w)+\\&\sum_{j=0}^{n}k_{(m-1)j}\frac{(\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j})}{\|\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j}\|}B_{m-1,m}(u)B_{j,n}(w)+\\&\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\end{aligned}\tag{10}$$

这里的约束条件为

$$\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=0}^{n}\|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\|^2+\sum_{j=0}^{n}(\|k_{1j}\|^2+\|k_{(m-1)j}\|^2)=\mathrm{Min}\tag{11}$$

那么下面的方程可以通过约束优化的方法解得:

$$\begin{cases}\begin{aligned}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{s}=&\sum_{j=0}^{n}k_{1j}\frac{(\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j})}{\|\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j}\|}B_{1,m}(u)B_{j,n}(w)+\\&\sum_{j=0}^{n}k_{(m-1)j}\frac{(\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j})}{\|\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j}\|}B_{m-1,m}(u)B_{j,n}(w)+\\&\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\end{aligned}\\2\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\boldsymbol{\lambda}B_{i,m}(u_s)B_{j,n}(w_s)\\2k_{1j}=\boldsymbol{\lambda}\frac{(\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j})}{\|\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j}\|}B_{1,m}(u)B_{j,n}(w)\\2k_{(m-1)j}=\boldsymbol{\lambda}\frac{(\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j})}{\|\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j}\|}B_{m-1,m}(u)B_{j,n}(w)\end{cases}\tag{12}$$

通过解上述方程组,可得:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}=\dfrac{2(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{s})}{\Delta} & (13)\\ \begin{aligned}\Delta=&\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=0}^{n}B_{i,m}^2(u_s)B_{j,n}^2(w_s)+\\&\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{(\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j})}{\|\boldsymbol{P}_{1j}-\boldsymbol{P}_{0j}\|}\right)^2+\\&\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{(\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j})}{\|\boldsymbol{P}_{mj}-\boldsymbol{P}_{(m-1)j}\|}\right)^2\end{aligned} & (14)\end{cases}$$

3.3 对一种特殊情况的讨论

为了满足在端点处的相切限制,目标点的选择就不是任意了。希望给出哪块区域是被允许的。当m或n为3时,情况就会变得特殊。为了表述方便起见,只对$m=3,n=1$的情况进行讨论(同理可得到$m=3,n\leqslant3$的其他情况)。

由于$\boldsymbol{P}'_{10},\boldsymbol{P}'_{11},\boldsymbol{P}'_{20},\boldsymbol{P}'_{21}$这4个修正过的点只能落在相对应的$\boldsymbol{P}_{00}\boldsymbol{P}_{10},\boldsymbol{P}_{01}\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{30}\boldsymbol{P}_{20},\boldsymbol{P}_{31}\boldsymbol{P}_{21}$这4条射线上。所以目标点的选择范围就是由$\boldsymbol{P}_{00},\boldsymbol{P}'_{10},\boldsymbol{P}'_{20},\boldsymbol{P}'_{30},\boldsymbol{P}'_{01},\boldsymbol{P}'_{11},\boldsymbol{P}'_{21},\boldsymbol{P}'_{30}$这$4\times2$个点所形成的Bézier曲面和由$\boldsymbol{P}_{00},\boldsymbol{P}_{01},\boldsymbol{P}_{31},\boldsymbol{P}_{30}$这4个点所形成的Bézier曲面之间。由4个新产生的控制点在其对应射线上的任意性,它所包围的范围也随之变化。换句话说,对一个目标点$\boldsymbol{T}$,只要能找到4个点$\boldsymbol{P}'_{10},\boldsymbol{P}'_{11},\boldsymbol{P}'_{20},\boldsymbol{P}'_{21}$(当然要满足上述条件)使$\boldsymbol{T}$落在上述的包围内,那么$\boldsymbol{T}$就是合理的。

4 多点约束的情况

在有些情况下,会碰到有多个目标点的情况,那么怎样修正控制点,使修改后的曲面经过所有的目标点呢?

设有$r+1$个目标点$\boldsymbol{T}_l,l=0,1,\cdots,r$。由于每个$\boldsymbol{T}_l$满足经过调整后的Bézier曲面。因此仍旧设$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=(\varepsilon_{ij}^{x},\varepsilon_{ij}^{y},\varepsilon_{ij}^{z})^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{P}_{ij}$(除了边界点)的修正向量,所以经过调整后的Bézier曲面为

$$\tilde{S}(u,w)=S(u,w)+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\tag{15}$$

从而:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_l&=\tilde{S}(u_l,w_l)\\&=S(u_l,w_l)+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}B_{i,m}(u_l)B_{j,n}(w_l)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\end{aligned}\tag{16}$$

为了得到$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$的值,同样通过约束优化的方法,使得:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\|^2=\mathrm{Min}\tag{17}$$

那么定义拉格朗日方程为

$$\begin{aligned}L=&\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\|\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\|^2+\\&\sum_{l=0}^{r}\boldsymbol{\lambda}_l(\boldsymbol{T}_l-\boldsymbol{S}_l-\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}B_{i,m}(u_l)B_{j,n}(w_l)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\end{aligned}\tag{18}$$

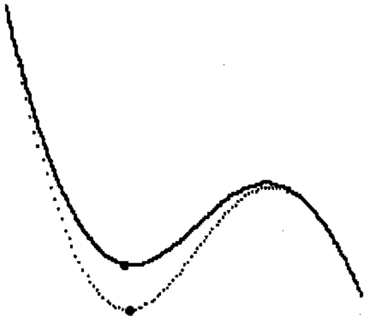
由此得到下面的方程组:

$$\begin{cases} T_l = \tilde{S}(u_l, w_l) \\ \quad = S(u_l, w_l) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} B_{i,m}(u_l)B_{j,n}(w_l)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} & (19) \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l=0}^{r} \boldsymbol{\lambda}_l B_{i,m}(u_l)B_{j,n}(w_l) & (20) \end{cases}$$

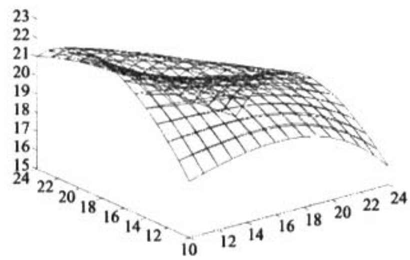
其中，$l=0,1,2,\cdots,r$；$i=1,2,\cdots,m-1$；$j=1,2,\cdots,n$。通过解上述方程组可以得到约束极值的解。

5 实 例

下面就上述的方法给出具体的例子。在下面的各图中，原图由实线绘制，修正后的图形由虚线表示。其中，图2是单点限制的情况；图3是多点限制的情况。



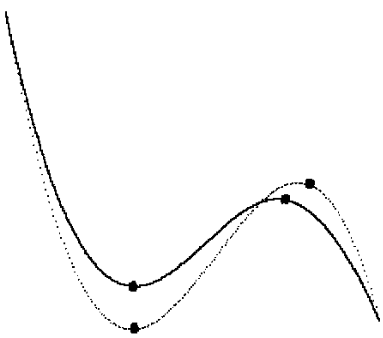
(a) Bézier 曲线



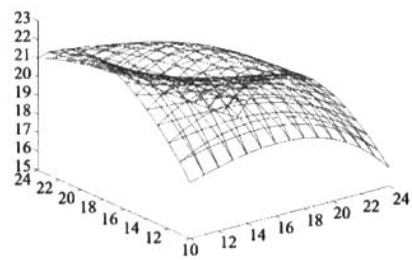
(b) Bézier 曲面

图2 对 Bézier 曲线、曲线单点约束的情况

Fig. 2 Shape modification of Bézier curve and Bézier surface with single target point



(a) Bézier 曲线



(b) Bézier 曲面

图3 对 Bézier 曲线、曲面多点约束的情况

Fig. 3 Shape modification of Bézier curve and Bézier surface with multiple target point

参考文献(References)

1 Piegl L. Modififying of the shape of rational B-spline. Part 1: Curves [J]. Computer Aided Design, 1989, **21**(8): 509～518.

2 Flowler B, Bartels R. Constrained-Based curve manipulation [J]. IEEE Computer Graphics and Application, 1993, **13**(5): 43～49.

3 Au C K, Yuen M M F. Unified approach to NURBS curve shape modification[J]. Computer Aided Design, 1995, **27**(2): 85～93.

4 Sánchez R J. A simple technique for NURBS shape modification[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1997, **17**(1): 52～59.

5 Hu Shi-min, Zhou Den-wen, Sun Jia-guang. Shape modification of NURBS curves via constrained optimization[A]. In: Proceedings of the CAD/Graphics'99[C]. Shanghai: WenHui Publishers, 1999: 958～962. [胡事民，周登文，孙家广. 基于约束优化的 NURBS 曲线形状修改[A]. 见:99'CAD/图像会议论文集[C]，上海：上海文汇出版社，1999: 958～962.]

6 Hu Shi-min, Li You-fu, Ju-tao. Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints [J]. Computer Aided Design, 2001, **33**(12): 903～912.

7 Xu Li, Chen Yu-jian, Hu Yu-ning. Shape modification of Bézier curves by contrained optimization [J]. Journal of Software, 2002, **13**(6): 1069～1074. [徐立，陈玉健，胡毓宁. 基于约束优化的 Bézier 曲线形状修改[J]. 软件学报，2002, **13**(6): 1069～1074.]