

# 稳定交错差分求解线性 SFS 问题的新算法

俞鸿波 赵荣椿 张艳宁

(西北工业大学计算机学院计算机科学与工程系, 西安 710072)

**摘要** 针对采用偏心格式求解明暗恢复形状问题中的图像辐照方程时只能针对特定光源计算的特点, 提出了一种新的稳定差分法。首先使用泰勒展式线性化反射图函数, 然后结合定解条件, 讨论了一种新的交错差分格式用于求解图像辐照方程的具体算法, 并给出了新差分格式稳定性和收敛性的具体证明。结合最佳松弛因子的选取方法, 表面高度的最终值采用超松弛法迭代计算求得。经过多组图像计算可知, 该新方法适用于任意的光照环境, 且重构精度高于已有算法。

**关键词** 阴影恢复形状 差分法 截断误差 超松弛算法

**中图分类号:** TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2005)08-0970-07

## A New Stable Cross Difference Based Linear SFS Algorithm

YU Hong-bo, ZHAO Rong-chun, ZHANG Yan-ning

(Department of Computer Science and Engineering, Computer School, Northwest Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract** A new finite difference method is proposed to solve the image irradiance equation of shape from shading. Firstly, the non-linear term in the reflectance map is approximated by a Taylor-expansion. Then the resulting linear partial difference equation is solved numerically by a semi-implicit cross difference scheme, combining with initial and boundary conditions. We prove its stability and convergence in detail. Surface height is obtained iteratively by successive over-relaxation method, and the method of selecting optimization factor is also given in the paper. Experimental results on synthetic images demonstrate the new algorithm suits for any light direction and the reconstruction results are better than the traditional ones.

**Keywords** shape from shading, difference scheme, truncation error, relaxation algorithm

## 1 引言

自从 Horn 于 1970 年开创了明暗恢复形状<sup>[1]</sup> (shape from shading, 简称 SFS) 的方法以来, 基于单幅图像的 3 维重建算法层出不穷<sup>[2]</sup>。在这些算法中, 有限差分法因为其直观、计算公式简洁等特点, 引起了众多学者的关注。为了使差分法能够有效地用于 SFS, 人们做了许多工作, 比如 Ryszard<sup>[3]</sup> 和 Ulich<sup>[4]</sup> 分别将偏心格式和 Lax-Friedrich 格式用于求解线性的图像辐照方程, 然而, 因为这两种方法舍

去了反射图中的非线性项, 得到的反射图实际上已经不符合郎伯漫反射定理, 根据这个模型恢复的结果必然偏离真实值; 其次, 由于差分格式条件稳定的局限性, 导致了相应的偏心格式在 SFS 中的计算只能针对特定的光照环境。

为了克服上述缺陷, 本文将说明差分格式稳定与光照环境选择的关系, 并在此基础上提出了一种新的算法。该算法保留并线性化反射图中的非线性项, 然后对线性化以后的偏微分方程使用一种无条件稳定的交错差分格式, 并利用松弛迭代算法推导出 3 维表面高度的求解公式。对几个模型的计算表

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60141002)

收稿日期: 2004-09-21; 改回日期: 2004-12-20

第一作者简介: 俞鸿波 (1977 - ), 男, 1999 年于西北工业大学获学士学位, 2002 年于西北工业大学获硕士学位, 现为西北工业大学计算机学院在读博士生。主要研究方向为图像处理与计算机视觉、神经网络和模式识别。E-mail: hongbo\_edward@hotmail.com

明,该方法适合于求解不同光照环境下的 SFS 问题。

性化的偏微分方程。

## 2 图像辐照方程及其线性展开

假设物体反射模型为 Lambertian 表面模型,由一个位于无限远处的点光源照明,且成像几何关系为正交投影,在上述理想化的成像条件下,可以假设场景的辐射与图像的辐照相等。即图像辐照方程

$$E(x, y) = R(p, q) = \frac{p_0 p + q_0 q + 1}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad (1)$$

其中,  $E(x, y)$  为图像平面中的点  $(x, y)$  处的亮度,简称为  $E$ ;  $R(p, q)$  场景表面对应点的表面方向  $p$  和  $q$  的反射图值;  $(p_0, q_0)$  为光源方向;  $(p, q)$  为像点  $(x, y)$  所对应景物点处,景物的表面梯度,满足  $p = z_x$  和  $q = z_y$  的对应关系;  $z$  为景物表面的相对高度值。

可以看出,辐照方程是一个一阶非线性的非齐次偏微分方程,直接求解非常困难。为了求解问题的方便,需要对方程做线性化处理。Penland 和 Tsai 分别提出了两种线性化的方法<sup>[5,6]</sup>,前者舍掉了反射图中的非线性项,导致恢复的结果偏离了真实值;后者直接线性化反射图函数本身,结果容易受到噪声的影响。为了保留朗伯反射特性,同时尽量减小由于线性化带来的舍入误差,本文并不采用上述方法,而是首先将辐照方程变形为

$$\frac{p_0 p + q_0 q + 1}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}} = E(x, y) \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \quad (2)$$

定义  $S(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ,  $S(p, q)$  在点  $(\bar{p}, \bar{q})$  的某邻域内有连续的一阶偏导数,则对它在  $(\bar{p}, \bar{q})$  点泰勒展开,得到

$$S(p, q) \approx \sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2} + (p - \bar{p}) \frac{\bar{p}}{\sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2}} + (q - \bar{q}) \frac{\bar{q}}{\sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2}} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),经过整理后得到如下的偏微分方程

$$z_x(p_0 T - \bar{p} E) + z_y(q_0 T - \bar{q} E) = E - T \quad (4)$$

其中,  $T = \frac{\sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2}}{\sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}}$ , 令  $(p_0 T - \bar{p} E) = P_s$ ,  $(q_0 T - \bar{q} E) = Q_s$ ,  $E - T = G$ , 则将式(4)变为如下形式

$$P_s(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q_s(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = G(x, y) \quad (5)$$

通过上述方法,将图像辐照方程变成了一个线

## 3 Cauchy 问题及其有限差分逼近

可以看出,对于形如式(5)的非齐次拟线性偏微分方程,在给出了边界处的表面高度值后,通过数值解法,就可以由这些边界值确定成像域内其他内点的高度值。即求解一个满足 Dirichlet 边界条件的 Cauchy 问题。其中,自变量  $(x, y)$  的定义域为

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

$Z$  表示边界高度值。

给定初始条件:  $Z(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq a$

和边界条件:  $Z(0, y) = \psi(y),$

$$Z(a, y) = \xi(y) 0 \leq y \leq b$$

给定的函数  $\varphi(x), \psi(y), \xi(y)$  分别满足  $\varphi \in C([0, a]) \cap C^2((0, a)), \psi, \xi \in C([0, b]) \cap C^2((0, b))$ , 并且  $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$ 。

根据现有的偏微分方程理论可以为上述 Cauchy 问题构造出不同的数值解法,从而恢复 3 维物体的表面形状。文献[3]中使用 4 种偏心格式(分别为前前 FF, 后后 BB, 前后 FB, 后前 BF)代替线性反射图中的偏导数,求解差分方程得到微分方程的解。然而,这 4 种差分格式都是条件稳定的,而 SFS 中的网格受图像分辨率的限制通常具有固定的步长,于是,差分格式的稳定性就表现为不同的偏心格式要求特定的图像光照条件。以 FB 方法为例,它的差分格式为

$$z_{i+1, j} = (1 - \alpha) z_{i, j} + \alpha z_{i, j} + \frac{h}{p_0} G_{i, j}$$

$$i = 0, 1, \dots, M - 1; j = 1, 2, \dots, N$$

其中,  $\alpha = q_0 h / p_0 k$ ,  $h$  和  $k$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的步长,  $G_{i, j}$  指  $G(x, y)$  在图像坐标  $i, j$  点处的值。对于 FB 方法, Ryszard 已经证明其截断误差为  $O(h + k)$ , 表示差分算法的截断误差为  $(h + k)$  的等价无穷小,计算域为整个  $\Omega$ 。为了使计算开始时引入的误差在逐层计算中的影响逐渐消失或者保持有界,即差分算法稳定,要求  $\alpha$  必须小于等于 1。而在一个具体 SFS 的算例中,对于一幅 2 维图像,步长  $h$  和  $k$  通常保持为一个确定的常数,所以,对  $\alpha$  的要求实际上就变成对光源参数  $(p_0, q_0)$  的限定。如 FB 方法要求待重建的图像,其光源方向满足  $q_0 \leq p_0 \eta$ , 其中,  $\eta$  称为网比。如果使用不满足该光照参数要求的图像,则导致 FB 算法不稳定,计算结果出现较大的偏差。

它们的稳定条件和计算时对光源参数的限制列在表 1 中进行比较。

表 1 4 种偏心格式和交错差分格式的性能比较  
Tab.1 The performance comparison of four partiality difference schemes

差分方法	计算域	截断误差	稳定条件	对光照的约束
FF	$D_{FF} = \Omega$	$O(h+k)$	$-1 \leq \alpha^{-1} \leq 0$	$-\eta^{-1} \leq p_0/q_0 \leq 0$
FB	$D_{FB} = \Omega$	$O(h+k)$	$0 \leq \alpha^{-1} \leq 1$	$0 \leq p_0/q_0 \leq \eta^{-1}$
BF	$D_{BF} = \Omega$	$O(h+k)$	$0 \leq \alpha \leq 1$	$0 \leq q_0/p_0 \leq \eta$
BB	$D_{BB} = \Omega$	$O(h+k)$	$0 \leq \alpha^{-1}$	$0 \leq p_0/q_0$
交错差分	$D_{\Delta} = \Omega$	$O(h^2+k^2)$	无条件稳定	适合任意光照

### 4 交错差分格式及稳定性证明

为了得到不受光源条件限制的重构方法,需要对现有差分格式进行改进,以得到无条件稳定的差分格式。事实上,存在 Courant-Friedrichs 条件<sup>[7]</sup>,论证了对于偏微分方程并不存在显式的有限差分计算使之无条件稳定。从偏微分方程的角度考虑,存在着一些无条件稳定的隐式差分格式,比如 CB 格式, Crank-Nicolson 格式<sup>[7]</sup>等等,但是这些格式均为 3 层格式,也就是说,在使用这些格式求解图像辐照方程时,需要引入额外的边界条件,这给 SFS 计算带来了额外的附加约束。基于以上考虑并结合 4 种显式偏心格式的特点,提出一种半隐式平均差分格式。分别在对角线方向上取前向差分代替偏导数的运算

$$z_x = \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i,j}}{\sqrt{2}h} + O(h^2)$$

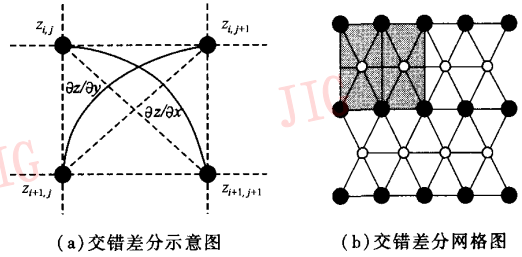
$$z_y = \frac{z_{i,j+1} - z_{i+1,j}}{\sqrt{2}k} + O(k^2)$$

将上式代入式(5),并忽略高阶无穷小量,可得

$$z_{i+1,j+1} = z_{i,j} + \frac{1}{\mu}(z_{i+1,j} - z_{i,j+1}) + \frac{\sqrt{2}h}{P_s} G_{i,j} \quad (7)$$

其中,  $\mu = (P_s k)(Q_s h)^{-1}$ , 且  $\mu \neq -1$ 。用此差分方程的解  $z_{i,j}$  代替微分方程(5)的解  $z(i,j)$ , 所产生的截断误差为  $O(h^2+k^2)$ , 计算域仍为整个  $\Omega$ 。如前文所述, 4 种偏心格式的截断误差均为  $O(h+k)$ , 可看出新的差分格式比偏心格式的截断误差阶数高, 可以有效地减小使用差分法求解偏微分方程的误差, 得到一个更理想的重构结果。

图 1 所示为交错差分格式的示意图。显然, 新的差分格式为一个两层的差分格式, 并不会增加新的边界约束。



(a) 交错差分示意图

(b) 交错差分网格图

图 1 交错差分格式的示意图

(图中虚线为网格线, 圆圈表示网格节点)

Fig.1 Diagram of cross difference scheme

由于差分方法用于 SFS 重建对稳定性的要求比较高, 在此给出交错差分格式的收敛性证明。为此, 首先介绍 Von Neumann 稳定性<sup>[7]</sup>标准。

引理 1 对于给定的常系数有限差分格式

$$L_h z_{i,j} = F_{i,j} \quad (8)$$

$L_h$  为一个有限差分算子。令  $z_{i,j} = g^i e^{i\theta}$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\theta = 2\pi lh$ ,  $l = \pm 1$ ,  $g$  为尺度因子。将此  $z_{i,j}$  代入式(5)所示的齐次有限差分格式中, 消去同类项, 得到关于  $g$  的表达式。当且仅当存在与  $\theta, h$  和  $k$  无关的常数  $K > 0$ , 对所有的  $\theta$  满足

$$|g| \leq 1 + Kk \quad (9)$$

称该差分格式式(8)为稳定的。若网比  $k/h$  为常数, 则稳定性条件(9)可以写为  $|g| \leq 1$ 。

定理 1 交错差分格式是无条件稳定的

证明 将  $z_{i,j} = g^i e^{i\theta}$  代入交错差分格式式(7)所对应的齐次方程中, 对每一个  $i$  和  $j$ , 有

$$g^{j+1} e^{i\theta(i+1)} = g^j e^{i\theta i} + \frac{1}{\mu}(g^j e^{i\theta(i+1)} - g^{j+1} e^{i\theta i})$$

整理后得到

$$g = \frac{\mu + e^{i\theta}}{1 + \mu e^{i\theta}} = \frac{(\mu + \cos(\theta)) + i \sin(\theta)}{(1 + \mu \cos(\theta)) + i \mu \sin(\theta)}$$

于是

$$|g|^2 = \frac{|(\mu + \cos(\theta)) + i \sin(\theta)|^2}{|(1 + \mu \cos(\theta)) + i \mu \sin(\theta)|^2}$$

$$= \frac{\mu^2 + 2\mu \cos(\theta) + 1}{\mu^2 + 2\mu \cos(\theta) + 1}$$

$$= 1$$

从而对所有的  $\mu$  和  $\theta$ ,  $|g| = 1$ 。所以, 交错差分格式符合 Von Neumann 稳定性标准, 是无条件稳定的, 定理得证。

下面将不加证明地引述 Lax 等价性定理<sup>[7]</sup>以说明交错差分格式的收敛性。

**定理 2** 如果待求问题是适定的,且差分格式满足相容性条件,那么差分格式的稳定性就是该差分格式收敛性的必要而充分的条件。(Lax & Richtmyer 等价性定理)

根据这个定理可知,因为交错差分格式满足相容性条件(即指当步长  $h \rightarrow 0$  和  $k \rightarrow 0$  时差分方程逼近微分方程),而且是稳定的,那么交错差分格式必然收敛。

至此,本文已经得到了一个非线性偏微分方程在 3 维坐标下的离散差分格式,该格式为无条件稳定且截断精度为  $O(h^2 + k^2)$ (见表 1)。再辅之以第一类边界条件,就可以对图像辐照方程进行求解。

### 5 基于超松弛迭代的 SFS 求解算法

将交错差分格式应用于式(5),得到

$$\frac{p_0 T_{i,j} - \tilde{p} E_{i,j}}{\sqrt{2}h} z_{i+1,j+1} + \frac{q_0 T_{i,j} - \tilde{q} E_{i,j}}{\sqrt{2}k} z_{i,j+1} - \frac{q_0 T_{i,j} - \tilde{q} E_{i,j}}{\sqrt{2}k} z_{i+1,j} - \frac{p_0 T_{i,j} - \tilde{p} E_{i,j}}{\sqrt{2}h} z_{i,j} = G_{i,j} \quad (10)$$

$$i = 0, 1, \dots, M - 1; j = 0, 1, \dots, N - 1$$

设  $\frac{p_0 T_{i,j} - \tilde{p} E_{i,j}}{\sqrt{2}h} = F_{i,j}, \frac{q_0 T_{i,j} - \tilde{q} E_{i,j}}{\sqrt{2}k} = H_{i,j}$ , 则上式简

写为

$$F_{i,j} z_{i+1,j+1} + H_{i,j} z_{i,j+1} - H_{i,j} z_{i+1,j} - F_{i,j} z_{i,j} = G_{i,j} \quad (11)$$

$$i = 0, 1, \dots, M - 1; j = 0, 1, \dots, N - 1$$

对于式(11),如果结合定解条件,则可以通过 Jacobi 迭代法直接计算得到代数解,但其收敛的速度比较慢。因此采用松弛算法,松弛因子  $\omega > 1$  时,称为超松弛算法<sup>[8]</sup>。算法基本步骤为

(1) 设置迭代算法的初值条件  $z_{0,j}$  和边界条件  $z_{i,0}$ , 通常取为零初值。即  $z_{0,j} = z_{i,0} = 0, i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$ 。

(2) 通过 Gauss-Seidel 法解式(11), 设  $\tilde{z}_{i,j}$  为第  $k$  次 Gauss-Seidel 迭代的结果, 满足

$$F_{i,j} \tilde{z}_{i+1,j+1}^k + H_{i,j} \tilde{z}_{i,j+1}^k - H_{i,j} \tilde{z}_{i+1,j}^{k-1} - F_{i,j} \tilde{z}_{i,j}^{k-1} = G_{i,j}$$

(3) 用超松弛法求解  $\tilde{z}_{i,j}$ , 通过用 Gauss-Seidel 法得到的前一次迭代结果做线性外延, 对初始结果逐次修正(为减小误差), 这样, 常能得到一个理想的解, 且所需要的迭代次数减少

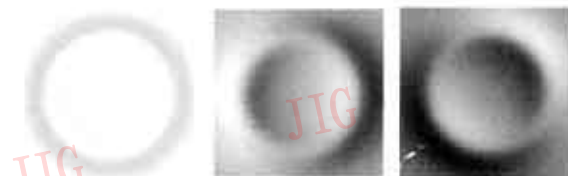
$$z_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega) z_{i,j}^k + \omega \tilde{z}_{i,j}^k$$

(4) 可以设定迭代中止条件为  $\frac{1}{MN} \left| \frac{z_{i,j}^k - z_{i,j}^{k-1}}{z_{i,j}^{k-1}} \right| < \epsilon$ , 为了算法可行, 迭代算法不但应该收敛, 而且收

敛速度必须足够快。因此要确定一个最优值  $\omega_{opt}$ , 使当  $\omega = \omega_{opt}$  时, 超松弛迭代收敛速度最快。确定  $\omega_{opt}$  是很困难的, 通常是通过试验并根据误差减小的情况动态地加以调整。可以证明, 当  $\omega \leq \omega_{opt}$  时, 收敛是单调的; 而  $\omega > \omega_{opt}$  时, 收敛是振荡的。通过这个现象可以确定一个较好的  $\omega$  值。最优松弛因子  $\omega_{opt}$  可以近似表示为  $\omega_{opt} \approx 2 / (1 + \sqrt{1 - \lambda^2})$ 。其中,  $\lambda$  为式(11)系数矩阵的特征值, 对于一般图像而言, 如果长和高的网格间隔都是  $h$ , 则  $\lambda = [\cos(\pi/M) + \cos(\pi/N)]/2$ 。其中,  $M, N$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的网格数。

### 6 数值结果

为了验证算法的正确性, 采用不同光照环境下的 3 幅合成图像, 如图 2 所示。原始图像大小为  $64 \times 64$ , 由已知方向的点光源照射, 光源方向分别为  $(0, 0.5), (1, 0)$  和  $(-1, 1)$ 。为了方便 SFS 算法的处理和分析, 首先要对试验图像进行归一化处理。对输入图像, 首先找出整幅图像中的最大灰度值, 然后使每一像素点的灰度值除以该值, 以保证所有数据的幅值均在  $[0, 1]$  之间。

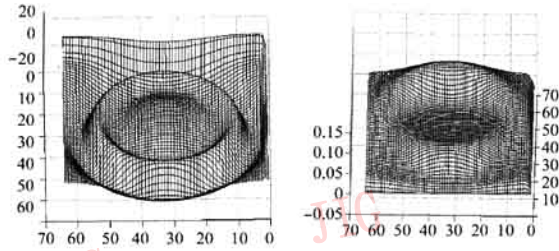


(a)  $(p_0, q_0) = (0, 0.5)$  (b)  $(p_0, q_0) = (1, 0)$  (c)  $(p_0, q_0) = (-1, 1)$

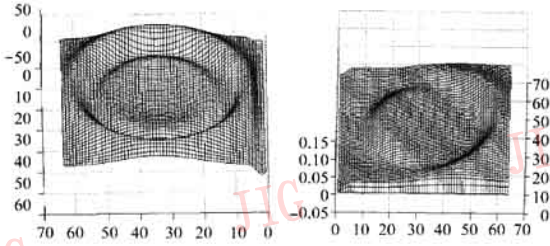
图 2 不同光照方向的输入原始图像

Fig. 2 Input images with different illumination

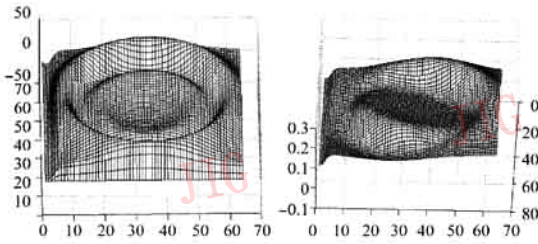
图 3 为利用交错差分格式计算不同光照方向的火山图像得到的重建结果, 取网格为  $64 \times 64$ 。对火山图像计算出的  $\omega_{opt} = 1.9065$ 。从实验结果可以看出, 对于不同光照环境的 3 幅图像, 交错差分法都能给出一个比较理想的重建结果, 说明对于不同光照的适应性其本质在于差分算法的稳定性。还应当指出, 网格的选取并不是决定数值算法稳定性和有效性的因素, 本文采用固定网格是以牺牲算法的灵活性来换取算法复杂度的降低, 但这样对于复杂物体的表面形状可能会造成细节处的缺失或者平坦处网格过密而计算资源浪费。通过对误差图的比较, 可以看出, 使用本文算法对不同光照的 3 幅图像的重



(a)  $(p_0, q_0) = (0, 0.5)$



(b)  $(p_0, q_0) = (1, 0)$



(c)  $(p_0, q_0) = (-1, 1)$

图 3 用交错差分格式计算不同光照方向的火山图像得到的重建结果和重建误差间的比较

Fig. 3 Comparison of reconstructed surface height and reconstruction error of input images with different illumination computed by cross difference scheme

构结果并不一样,但普遍好于由偏心格式的算法得到的结果。其平均误差的比较如表 2 所示。

表 2 不同差分方法误差比较表

Tab. 2 Comparison of reconstruction error of difference schemes

差分算法	火山图像的平均高度误差 (%)
FF 格式	10
FB 格式	14
BF 格式	6
BB 格式	8
交错差分	2

图 4 给出了使用本文算法得到图 3 所示的 3 个结果时平均重建误差与迭代次数的关系。从中可以

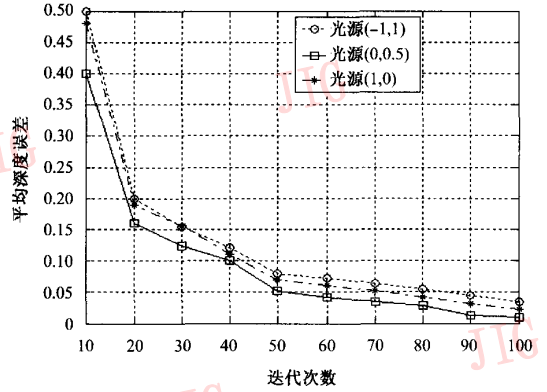


图 4 用迭代法计算 3 幅原始图像的平均深度误差

Fig. 4 Depth error computed by iterative method

看出,重建误差随着迭代次数的增加迅速减小,且不同光照环境对算法的影响可以忽略不计。

为了验证算法的适用性,在图 5 给出了另外一个模型 Vase 在不同光照环境下产生的合成图像和使用交错差分格式计算得出的重建结果。图像的大小同为  $128 \times 128$ 。图 5(d) ~ (i) 分别是对图 5(a)、(b)、(c) 使用本文算法的表面重建结果。图 5(j)、(k)、(l) 则分别为根据计算出的表面矢量方向合成出的模型光照图。从实验结果可以看出,本文算法对模型的各个部分均给出了较好的恢复,对于合成出的模型光照图其光照方向和部位也完全正确。

### 7 结论

针对采用偏心格式求解明暗恢复形状问题中的图像辐照方程时只能针对特定光源计算的特点,提出了一种针对不同光照方向环境下求解 SFS 问题的有限差分算法。这个方法利用泰勒展开线性化反射图函数,并设计了一种新的交错差分格式求解图像辐照方程。由于新差分格式无条件稳定且具有二阶截断误差,它可以有效地克服偏心差分格式条件稳定和一阶截断误差精度不高的缺点。理论分析和实验结果表明,本文提出的无条件稳定的差分算法对各种光照环境均能给出一个理想的恢复结果,且计算精度优于以往的算法。

通过具体实验发现,本文算法还可以在以下方面有所改进:由于网格的划分是均匀的,对于实际物体表面,尤其是表面高度剧烈变化之处,需要更加稠密的网格划分以确保细节处的重建效果更好,而在

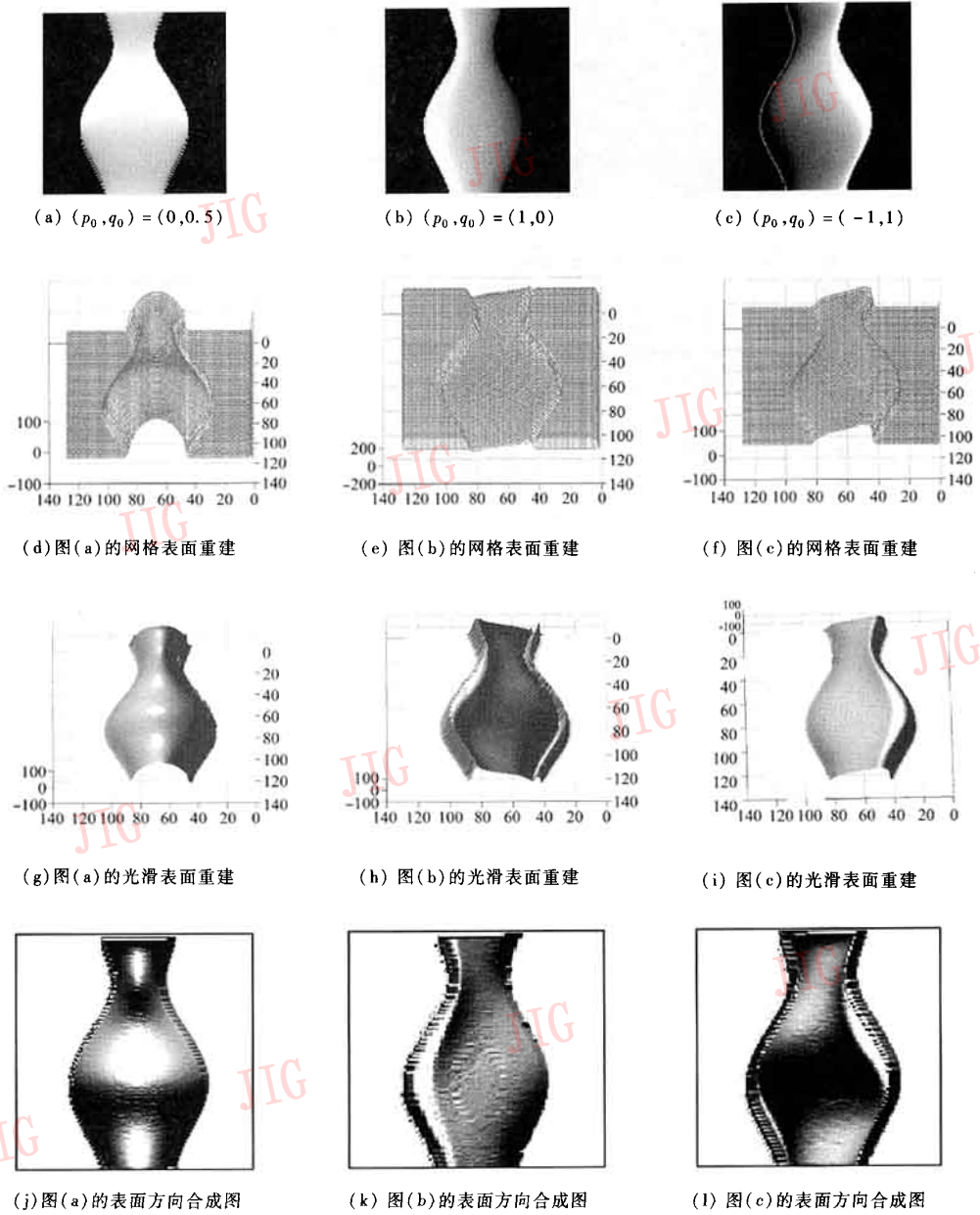


图 5 Vase 模型的原始光照图像、交错差分的网格表面重建图像、光滑表面及其表面方向合成图像

Fig. 5 Input images, reconstruction results of mesh surface, reconstruction results of smooth surface and recovery images of surface gradient for vase model

光滑平缓之处则可以采用稍稀疏的网格。因此,变间距网格技术的使用将是今后研究的重点。另外,由于这种方法对阴影区的重构缺乏有效的指导策略,导致图像灰暗处的重构不令人满意,对于阴影区的重构也是一个非常重要的问题。与传统方法相同,由于该算法也是建立在物体表面为朗伯特性的假设基础上,而实际成像过程中为漫反射和镜面反

射的混合反射模型,因此,建立更符合实际情况的反射模型对算法的实用性将具有非常重要的理论和实际意义。

参考文献 (References)

1 Horn B P. Shape from Shading: A method of obtaining the shape of a smooth opaque object from one view [ D ]. Massachusetts, USA:

- Massachusetts Institute of Technology, 1970.
- 2 Zhang R, Tsai P S, Cryer J E, *et al.* Shape from shading: A survey [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(8), 690 ~ 705.
  - 3 Kozera R, Klette R. Finite difference based algorithms in linear shape from shading[J]. Machine Graphics and Vision, 1997, 6(2): 157 ~ 201.
  - 4 Ulich G. Provably convergent methods for the linear and nonlinear shape from shading problem[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1998, 9(1): 69 ~ 82.
  - 5 Pentland A. Shape information from shading: A theory about human perception [A]. In: Proceedings of International Conference on Computer Vision[C]. Tampa, 1988: 404 ~ 413.
  - 6 Tsai P-S, Shah M. A fast linear shape from shading [A]. In: Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Urbana Champaign, 1992: 734 ~ 736.
  - 7 Strikwerda J C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations[M]. California: Wordsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1989; 24 ~ 137.
  - 8 Li R H, Feng G C. Numeric Method of Difference Equation[M]. Beijing: People's Education Publication, 1980; 134 ~ 175. [李荣华, 冯果忱. 微分方程数值解法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980: 134 ~ 175.]