

图像分解中的多通道滤波器组合

吴敏金¹⁾ 沈霄凤¹⁾ 金升俊²⁾

¹⁾(华东师范大学信息技术系,上海 200062) ²⁾(上海天域时捷信息系统有限公司,上海 200232)

摘要 为了有效地利用多通道滤波器组合进行图像分解,以 $M=3$ 通道为例,首先给出非奇异多通道滤波器组合及其分析、合成与传递方程,然后设计其归一化、平滑度与对称性优化约束与最小二乘算法,最后讨论其在图像分解中的应用。

关键词 多通道滤波器组合 图像分解

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)11-1423-04

Multi-channel Filter Banks and Its Application of Image Decomposition

WU Min-jin¹⁾, SHEN Xiao-feng²⁾, JIN Sheng-jun²⁾

¹⁾(DEIT East Chins Normal University, Shanghai 200062) ²⁾(Shanghai DigiGraphic Information System Co. Ltd., Shanghai 200232)

Abstract In this paper, we shall investigate multi-channel filter banks (MFB, $M=3$), introduce the analysis, synthesis Equations and transfer Equations of MFB, design its optimal restriction and "least-squares" iteration algorithm, and discuss the application to image decomposition.

Keywords multi-channel filter banks, image decomposition

1 引言

在图像分解中,人们常采用双通道滤波器组合(如小波变换^[1-3]等)来实现2幂次方分解。而其对于非2幂次方分解则无能为力。对此,本文首先介绍多通道滤波器组合,并以 $M=3$ 通道为例,给出正规型非奇异多通道滤波器组合的分析、合成与传递方程,然后设计其最小二乘算法和讨论其归一化、平滑度与对称性的优化约束,最后阐述多通道滤波器组合在图像分解中的应用示例。

2 正规型非奇异滤波器组合

M 通道滤波器组合($M=3$)如图1所示。(一般的多通道滤波器组合^[4,5]另文介绍)。

当传输系统 P 为无失真时,为了实现系统的完

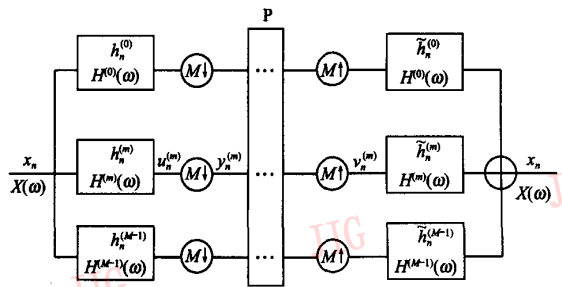


图1 M 通道滤波器组合($M=3$)

Fig.1 Multi-channel filter banks ($M=3$)

全重构(PR),而不出现混叠,可导出以下一类正规型非奇异多通道滤波器组合(normal multi-channel filter banks, NMFB)完全重构的时域方程。

(1) 分析方程

$$\sum_{i+j+k=3n} (h_i^{(0)} h_j^{(1)} h_k^{(2)}) \sin \frac{\pi}{3} (i-j) \times$$

收稿日期:2005-08-16; 改回日期:2005-09-08

第一作者简介:吴敏金(1940~),男,1964年毕业于复旦大学数学系,1980年获得华东师范大学计算机工学硕士学位。华东师范大学教授,上海图象图形学会常务理事,图像处理与模式识别专业委员会主任。专著有《图象形态学》与《分形信息导论》。主要研究领域为图象形态学与非线性科学。E-mail:mjwu@mail.ecnu.edu.cn

$$\sin \frac{\pi}{3}(i-k) \sin \frac{\pi}{3}(j-k) = \frac{3}{8} \delta_n$$

(2) 合成方程

$$\tilde{h}_i^{(0)} = (-1)^{i-1} 2 \sum_{j+k=i} h_j^{(1)} h_k^{(2)} \sin \frac{\pi}{3}(j-k)$$

$$\tilde{h}_j^{(1)} = (-1)^{j-1} 2 \sum_{i+k=j} h_i^{(0)} h_k^{(2)} \sin \frac{\pi}{3}(i-k)$$

$$\tilde{h}_i^{(2)} = (-1)^{i-1} 2 \sum_{i+j=k} h_i^{(0)} h_j^{(1)} \sin \frac{\pi}{3}(i-j)$$

(3) 传递方程

$$\forall m = 0, 1, 2 \quad q_{3k}^{(m)} = \delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$q_n^{(m)} = h_n^{(m)} * \tilde{h}_n^{(m)}$$

NMFB 设计的基本步骤是:先利用传递方程式 $q_n^{(0)}$ (或分析方程式) 求解分析滤波器 $h_n^{(m)}$, 再利用合成方程式计算合成滤波器 $\tilde{h}_n^{(m)}$ 。

3 有限基上 NMFB 设计的迭代算法

设分析滤波器 $h_n^{(m)}$ 的有限基为 $[n_b^{(m)}, n_e^{(m)}]$ (以下下角 b 代表 being, e 代表 end)。令 $\tilde{n}_b^{(m)} = \sum_{i \neq n_m} n_b^{(i)}, \tilde{n}_e^{(m)} = \sum_{i \neq n_m} n_e^{(i)}$ 。由合成方程式可知, 合成滤波器 $\tilde{h}_n^{(m)}$ 的基必在 $[\tilde{n}_b^{(m)}, \tilde{n}_e^{(m)}]$ 之内。NMFB 设计可采用如下的基于最小二乘法的迭代算法^[6,7]:

- (1) 选取适当的初值 $h_n^{(m)}, n \in [n_b^{(m)}, n_e^{(m)}]$;
- (2) 归一、对称和平滑等优化约束 (见下节);
- (3) 计算 $q_n^{(0)}, n \in [q_b, q_e]$, 其中

$$q_b = n_b^{(m)} + \tilde{n}_b^{(m)}, q_e = n_e^{(m)} + \tilde{n}_e^{(m)};$$

- (4) 令 $u_k = q_{3k}^{(0)} - \delta_k, s = \sum_k u_k^2$;
- (5) 如果 $s < \varepsilon$ (如 $\varepsilon = 10^{-24}$), 则结束迭代循环;

$$(6) \text{ 计算 } \frac{\partial s}{\partial h_n^{(m)}} = \sum_k 2u_k \frac{\partial q_{3k}^{(0)}}{\partial h_n^{(m)}};$$

$$(7) \text{ 迭代 } h_n^{(m)} = h_n^{(m)} - \frac{\frac{\partial s}{\partial h_n^{(m)}}}{\sum_i \left(\frac{\partial s}{\partial h_n^{(i)}} \right)^2} \cdot s;$$

(8) 返回步骤 2。

4 有限基上 NMFB 设计的优化约束

(1) 归一化

由于通常要求 $h_n^{(0)}, h_n^{(1)}$ 以及 $h_n^{(2)}$ 分别呈低通、

带通及高通属性, 因此 $h_n^{(m)} (m=0, 1, 2)$ 的频谱在高低端的归一化约束为

$$\sum h_n^{(0)} = \sqrt{3}, \quad \sum h_n^{(0)} (-1)^n = 0;$$

$$\sum h_n^{(2)} = 0, \quad \sum h_n^{(2)} (-1)^n = \sqrt{3};$$

$$\text{而 } \sum h_n^{(1)} = 0, \quad \sum h_n^{(1)} (-1)^n = 0$$

(2) 平滑度

为了提高 NMFB 滤波器在通带与阻带的平滑度, 可采用作者引进的零矩滤波器 (详见文献 [8])。

设滤波序列 h_n , 其 i 阶谱矩定义为

$$m_i(\omega) = \sum_n h_n e^{-jn\omega} n^i$$

如果 h_n 在 $\omega = \omega_0$ 处满足

$$m_i(\omega_0) = 0, (i = 1, \dots, I), \text{ 而 } m_{I+1}(\omega_0) \neq 0$$

则称 h_n 具有 I 阶零谱矩, 记为 I_{ω_0} , 而且它反映了 $H(\omega)$ 在 ω_0 处的平滑程度。将 $m=0, 1, 2$ 的滤波器 $h_n^{(m)}$ (与 $\tilde{h}_n^{(m)}$) 在 $\omega = \omega_0$ 处的零谱矩阶数记为 $I_{\omega_0}^{(m)}$ (或 $\tilde{I}_{\omega_0}^{(m)}$)。特别重要的是在 $\omega_0 = 0, \pi$ 处的 $I_0^{(m)}, I_{\pi}^{(m)}$ (或 $\tilde{I}_0^{(m)}, \tilde{I}_{\pi}^{(m)}$)。

因此 NMFB 滤波器平滑度的优化是尽可能地提高零谱矩的阶数 $I_0^{(m)}, I_{\pi}^{(m)}$ (或 $\tilde{I}_0^{(m)}, \tilde{I}_{\pi}^{(m)}$)。

(3) 对称性

为了获得各通道的线性相位, 要求 $h_n^{(m)}$ 的基中心满足

$$\sum_m c^{(m)} = 0, \forall m, n, c^{(m)} - c^{(n)} = \frac{3}{2} k_{m,n} (k_{m,n} \text{ 为整数})$$

同时, $h_n^{(m)}$ 和 $\tilde{h}_n^{(m)}$ 不仅具有相同的奇偶性 (即同奇长或同偶长), 而且还具有相同的对称性 (即同对称或同反对称)。分析表明, 对于 $M=3$ 对称滤波器组合, 其反对称滤波器个数必为 1。而有限基上的对称 (或反对称) 序列的谱特性与序列长有关, 并应服从表 1 约束^[9]。

表 1 对称滤波器组合的奇偶性与对称性

Tab.1 The odd-even property and symmetrical property of symmetrical NMFB

$h_n^{(m)}$	SF_0	SF_1	SF_2	SF_3
低通	奇长 对称	奇长 对称	偶长 对称	偶长 对称
带通	奇长 反对称	偶长 对称	奇长 对称	偶长 反对称
高通	奇长 对称	偶长 反对称	偶长 反对称	奇长 对称

5 对称型滤波器组合的设计示例

有限基上对称型滤波器组合的设计首先应结合实际需要来确定其优化约束的归一化与平滑度要求,以决定 $h_n^{(m)}$ 的零谱矩阶数 $I_0^{(m)}$ 和 $I_n^{(m)}$,进而确定其基长,并选择对称型滤波器组合的类型;然后进行基于最小二乘法的迭代以获得滤波器系数。下面给出一典型示例。

类 SF_0 :取分析滤波器 $h_n^{(m)}$ 的基奇长 $L=9, n \in [-4, 4]$,则合成滤波器 $\tilde{h}_n^{(m)}, n \in [-7, 7]$ 。其中, $h_n^{(0)}, h_n^{(2)}$ 和 $\tilde{h}_n^{(0)}, \tilde{h}_n^{(2)}$ 为对称滤波器,而 $h_n^{(1)}$ 和 $\tilde{h}_n^{(1)}$ 为反对称滤波器。不同的优化约束及不同的参数(如带通 $H^{(1)}(\omega)$ 的幅度)可得到不同的滤波器组合。表 2 列出一种基于零谱矩阶数约束的对称滤波器组合之滤波器 $h_n^{(m)}$ 和 $\tilde{h}_n^{(m)}$ 的系数(其中, $h_n^{(2)} = (-1)^n h_n^{(0)}, \tilde{h}_n^{(2)} = (-1)^n \tilde{h}_n^{(0)}$)。 $h_n^{(0)}, h_n^{(2)}$ 和 $\tilde{h}_n^{(0)}, \tilde{h}_n^{(2)}$ 具有 3 阶零谱矩。滤波器 $h_n^{(m)}$ 和 $\tilde{h}_n^{(m)}$ 都关于原点对称,这是共轭正交小波与对称的双正交小波^[1-3]所不能比拟的。

表 2 对称滤波器组合类 SF_0 的示例

Tab.2 The example of the kind SF_0 of symmetrical NMF B

N	$h_n^{(0)}$	$h_n^{(1)}$
0	0.685603444663	0
± 1	0.487139289629	± 0.419891104865
± 2	0.120281306081	0
± 3	-0.054126587737	± 0.027992740324
± 4	-0.030070326520	
N	$\tilde{h}_n^{(0)}$	$\tilde{h}_n^{(1)}$
0	0.708566239460	0
± 1	0.505910463153	± 1.173870371536
± 2	0.062983665730	0
± 3	-0.065607985135	± 0.253718380015
± 4	0.015745916432	0
± 5	-0.005831820901	± 0.022552744890
± 6	0	0
± 7	-0.001457955225	± 0.005638186223

6 滤波器组合在图像分解中的应用

作为应用实例,将上例的分析滤波器 $h_n^{(m)}$ 用于图像(lena. bmp, 255 × 255)的行列分解,可得 3 × 3

子图像(85 × 85)如图 2 所示。3 × 3 子图分别记为 ($LL, LM, LH; ML, MM, MH, HL, HM, HH$),它们反映了原图像在水平方向与垂直方向上的低频、中频与高频的信息;其能量分布(均方差 σ)如表 3 所示。可见其能量绝大部分集中在 LL 子图。



图 2 Lena. bmp 图像的 3 × 3 子图

Fig.2 The decomposition of the image "Lena"

表 3 Lena. bmp 图像分解子图的能量分布

Tab.3 The energy distributions of the sub-images of "Lena"

σ	L	M	H
L	153.60	13.83	6.97
M	18.12	4.45	3.31
H	11.1	4.36	4.59

将合成滤波器 $\tilde{h}_n^{(m)}$ 用于 Lena. bmp 图像的行列重构,其完全重构的精度极高(与传递方程的误差平方和小于 10^{-25})而不同通道的不同加权合成以及多层迭代(如 9 × 9 子图等)则可用于图像的压缩编码、清除噪声、边缘提取与保密通信等众多领域(在此不详谈)。如加大 $h_n^{(m)}$ 的基长,可提高其零谱矩阶数,则可进一步改善滤波器的滤波特性。

参考文献 (References)

- 1 Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization signal analysis[J]. IEEE Transactions on Information Technology, 1999, 36(5): 961 ~ 1006.
- 2 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition; the wavelet representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7): 674 ~ 694.
- 3 Antonini M. Image coding using wavelet transform [J]. IEEE

- Transactions on Image Processing, 1992, 1(2): 68 ~ 87.
- 4 GAN L, MA K K. M-channel linear-phase perfect reconstruction filter bank with rational coefficients [J]. IEEE Transactions on Circuits System, 2002, 49(4): 914 ~ 927.
 - 5 Shui P, Bao Z, Tang Y Y. Three-band biorthogonal interpolating complex wavelets with stopband suppression via lifting scheme [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51 (5): 1003 ~ 1015.
 - 6 WU Min-jin. Matched filter banks and sun-band decomposition [J]. Journal of East China Normal University, 1999, (2): 41 ~ 48. [吴敏金. 匹配滤波器组合与子带分割 [J]. 华东师范大学学报, 1999, (2): 41 ~ 48.]
 - 7 WU Min-jin. Design of filter bank and parameter optimization [J]. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(4): 513 ~ 519. [吴敏金. 滤波器组合设计参数优化 [J]. 自动化学报, 2001, 28(4): 513 ~ 519.]
 - 8 ZHANG Liang-yi Wu Minjin. A series of zero spectral moment filters [J]. Journal of Image and Graphics, 2005, 10(11): 1462 ~ 1465. [张良仪, 吴敏金. 零谱矩滤波器系列 [J]. 中国图象图形学报, 2005, 10(11): 1462 ~ 1465.]
 - 9 HE Zhen-ya. The theory and application of digital signal processing [M]. Press of people's electro-communication, 1983. [何振亚. 数字信号处理的理论与应用 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 1983.]