

图像插值的多结点样条技术

赵前进 胡敏 檀结庆

(合肥工业大学计算机与信息学院, 合肥 230009)

摘要 为了获得质量更好的插值图像,提出了用具有紧支集的多结点样条基函数来进行图像插值的新技术,并首先将1维的多结点样条插值算法推广到2维,建立了用于图像数据的插值公式;然后分析了多结点样条插值方法的逼近精度、正则性、插值核函数的频域特性。对逼近精度、正则性、插值核函数频域特性的比较表明,该插值方法优于传统的三次卷积插值方法,实验结果也证实了用多结点样条插值算法重建的图像具有更高的质量。

关键词 图像插值 多结点样条 逼近阶 正则性 峰值信噪比

中图分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2006)05-0667-05

Many-knot Splines Technique for Image Interpolation

ZHAO Qian-jin, HU Min, TAN Jie-qing

(School of Computer & Information Hefei University of Technology, Hefei 230009)

Abstract In order to obtain an interpolated image with a superior quality, this paper presents an efficient image interpolation technique using many-knot spline basis function with compact support. The one-dimensional many-knot splines interpolation algorithm is extended to that of two dimensions, which is applied to image processing. Then the accuracy of approximation, regularity of many-knot splines interpolation method and frequency property of the interpolation kernel are worked out for comparison. It can be shown that the approach is superior to other methods, such as cubic convolution. The experimental results proved that the algorithm can produce reconstructed images of superior quality.

Keywords image interpolation, many-knot splines, approximation order, regularity, peak signal noise ratio(PSNR)

1 引言

如今,数字图像已经在工程和数学领域引起广泛关注,而图像插值技术也已被广泛应用于数字图像处理,例如图像缩放、图像变形、图像恢复、图像重建、图像配准等。图像插值就是利用已知邻近像素点的灰度值来产生未知像素点的灰度值,以便由原始图像再生出具有更高分辨率的图像。其插值核函数的选取问题是构造插值算法的核心问题。因为数字图像涉及的数据量很大,故必须寻求一个有效的插值算法,实践表明,选取具有有界支集的插值整点的核函数可以保证插值算法的效率。由于插值方法的逼近精度以及插值核函数的频域性质直接影响插值图像的质量,

而且高质量的插值必然要耗费很大的计算量,因此通常的做法是在质量和效率之间寻求合理的平衡^[1-3];另外,很多图像处理都需要连续的一、二阶导数,并希望选择具有 C^2 连续的插值核函数。文献[1]提出的三次卷积插值算法虽得到了广泛的应用,但是,三次卷积插值的逼近精度(逼近阶为 $O(h^3)$)、正则性(C^1 连续)、核函数的频域性质等表明,在寻求更高逼近精度的插值图像或具有二阶连续导数的插值图像时,三次卷积插值算法有很大的局限性。

多结点样条插值法最早由齐东旭提出^[4],为了兼顾插值与逼近方法的优点,这类样条函数是在通常的样条函数中引入更多的附加结点,通过增加结点带来的自由度来构造在原来的结点上插值的高精度样条逼近格式。由于多结点样条基函数是基函数型

基金项目:国家自然科学基金项目(10171026, 60473114);安徽省自然科学基金项目(03046102)

收稿日期:2005-04-09;改回日期:2005-07-05

第一作者简介:赵前进(1967~),男,副教授。2002年获合肥工业大学理学硕士学位,现为合肥工业大学在读博士研究生。主要研究方向为有理逼近、数字图像处理以及计算机辅助几何设计。已发表论文数篇。E-mail:qjzhao_6@eyou.com

的,其可使得插值过程无须求解方程组;另外,由于多结点样条基函数具有有界支集,可保证插值的局部性和有效性^[5,6];同时,由于作为样条基函数自然具备充分的正则性,因此,为了得到高质量的插值图像,可以选择一个适当的多结点样条基函数作为图像插值核函数。

本文重点从图像插值的角度研究多结点样条插值方法。综合考虑质量、效率和正则性之间的平衡,本文选择了一个三次多结点样条基函数作为图像插值核函数,构造出了 2 维的图像插值公式;为了与常用的插值方法比较,本文首先分析了在适当的边界条件下多结点样条插值方法的逼近阶、插值核函数的频域性质;对逼近精度、正则性、插值核函数频域特性的比较表明,多结点样条插值法的逼近精度(逼近阶)、正则性、核函数的频域性质优于常用的三次卷积等插值方法。通过对图像插值试验得到的图像信噪比进行的比较也说明了这一点。

2 多结点样条插值公式

构造新的图像插值公式的出发点是,在算法可以有效实现的前提下,寻求比常用的三次卷积插值方法具有更高的逼近精度和更好的正则性的插值方法。同时,为保证插值图像的质量,插值核函数要有更好的频域性质。为此,本文选择文献[5]中的一个三次多结点样条基函数 $q_3(x)$ 作为图像插值核函数,其中

$$q_3(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}|x|^2 + \frac{14}{9}|x|^3, & 0 \leq |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{19}{18} - \frac{1}{3}|x| - \frac{11}{6}|x|^2 + \frac{10}{9}|x|^3, & \frac{1}{2} \leq |x| < 1 \\ \frac{37}{12} - \frac{77}{12}|x| + \frac{17}{4}|x|^2 - \frac{11}{12}|x|^3, & 1 \leq |x| < \frac{3}{2} \\ \frac{5}{6} - \frac{23}{12}|x| + \frac{5}{4}|x|^2 - \frac{1}{4}|x|^3, & \frac{3}{2} \leq |x| < 2 \\ -\frac{49}{18} + \frac{41}{12}|x| - \frac{17}{12}|x|^2 + \frac{7}{36}|x|^3, & 2 \leq |x| < \frac{5}{2} \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}|x| + \frac{1}{4}|x|^2 - \frac{1}{36}|x|^3, & \frac{5}{2} \leq |x| < 3 \\ 0, & 3 \leq |x| \end{cases} \quad (1)$$

选择这个插值核函数的理由如下:

- (1) 由于三次多结点样条基函数是对称的,因此符合插值核函数的要求;
- (2) 三次多结点样条基函数具有以下性质,即对

任意实数 x , 有 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} q_3(x+j) = 1$ (见文献[5]), 这一性质符合图像插值要保持直流分量增益为 1 的要求;

(3) 三次多结点样条基函数具有性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_3(x) dx = 1 \quad (\text{见文献}[5]), \text{这一性质保证了} \hat{q}_3(0) = 1;$$

(4) 由于三次多结点样条基函数是插值基函数的,即 $q_3(0) = 1, q_3(i) = 0 (i = \pm 1, \pm 2, \dots)$, 这使得等距结点上的图像插值公式中的系数等于采样值,因此便于进行有效的计算;

(5) 三次多结点样条基函数的支撑区间为 $(-3, 3)$;

(6) 三次多结点样条插值法比二次的插值法有更好的逼近精度、正则性(三次多结点样条基函数可达到 C^2 连续)以及插值核函数有更好的频域性质,且其支撑区间为 $(-3, 3)$, 对实现影响不大。

设 f 是被采样函数, g 是相应的插值函数, $q_3(x)$ 是插值核函数, 则对所有的插值结点 $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ 都要有 $g(x_k) = f(x_k)$ 成立。这样, 根据文献[5, 6], 对等距数据, 插值函数就可以表示为如下形式:

$$g(x) = \sum_{k=-2}^{n+2} f(x_k) q_3\left(\frac{x-x_k}{h}\right) \quad (2)$$

其中, $f(x_k) (k = 0, 1, \dots, n)$ 是采样值, h 为采样间距。现在, 假设 $\forall x \in [x_j, x_{j+1}] (j = 0, 1, \dots, n)$, 并设 $s = \frac{x-x_j}{h}$, 因为 $\frac{x-x_k}{h} = \frac{x-x_j+x_j-x_k}{h} = s+j-k$, 故式(2)可以表示为

$$g(x) = \sum_k f(x_k) q_3(s+j-k) \quad (3)$$

由于三次多结点样条基函数的支撑区间为 $(-3, 3)$, 且 $0 < s < 1$, 所以式(3)可简化为

$$g(x) = f(x_{j-2}) q_3(s+2) + f(x_{j-1}) q_3(s+1) + f(x_j) q_3(s) + f(x_{j+1}) q_3(s-1) + f(x_{j+2}) q_3(s-2) + f(x_{j+3}) q_3(s-3) \quad (4)$$

如果 f 在 $[x_j, x_{j+1}]$ 内具有至少 4 阶连续导数, 则由 Taylor 公式知

$$f(x_{j+l}) = f(x_j) + f'(x_j)lh + f''(x_j) \frac{(lh)^2}{2} + f'''(x_j) \frac{(lh)^3}{6} + O(h^4)$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, 3 \quad (5)$$

由式(5)、式(1)分别可得 $f(x_{j+l})$ 和 $q_3(s-l)$, 将它们再代入式(4)可得

$$g(x) = f(x_j) + f'(x_j)sh + f''(x_j) \frac{(sh)^2}{2} + f'''(x_j) \frac{(sh)^3}{6} + O(h^4) \quad (6)$$

因为 $sh = x - x_j$, 故由 Taylor 公式可得

$$f(x) = f(x_j) + f'(x_j)sh + f''(x_j) \frac{(sh)^2}{2} + f'''(x_j) \frac{(sh)^3}{6} + O(h^4) \quad (7)$$

式(7)减去式(6)得

$$f(x) - g(x) = O(h^4) \quad (8)$$

注:当 $j=0, 1$ 或 $j=n-1, n$ 时, 必须附加如下边界条件 $f(x_{-2}), f(x_{-1})$ 或边界条件 $f(x_{n+1}), f(x_{n+2})$:

$$\begin{aligned} f(x_{-1}) &= 5f(x_0) - 10f(x_1) + 10f(x_2) - 5f(x_3) + f(x_4), \\ f(x_{-2}) &= 15f(x_0) - 40f(x_1) + 45f(x_2) - 24f(x_3) + 5f(x_4) \\ f(x_{n+1}) &= 5f(x_n) - 10f(x_{n-1}) + 10f(x_{n-2}) - 5f(x_{n-3}) + f(x_{n-4}), \\ f(x_{n+2}) &= 15f(x_n) - 40f(x_{n-1}) + 45f(x_{n-2}) - 24f(x_{n-3}) + 5f(x_{n-4}). \end{aligned}$$

在上述边界条件下, 可保证当 $j=0, 1$ 或当 $j=n-1, n$ 时, 式(8)也成立。

式(8)表明, 式(4)所得的 g 是 f 的 4 阶逼近, 而 Keys 的三次卷积^[1]则是 3 阶逼近, 可见式(4)的逼近精度更高。

对各个坐标进行 1 维插值可得 2 维插值公式。设 $(x, y) \in [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, $j=0, 1, \dots, M; k=0, 1, \dots, N, f(x_j, y_k)$ 是采样值, h_x, h_y 分别是 x, y 方向采样间距, 则双三次多结点样条插值公式为

$$g(x, y) = \sum_{l=-2}^3 \sum_{m=-2}^3 f(x_{j+l}, y_{k+m}) \times q_3\left(\frac{x - x_{j+l}}{h_x}\right) \times q_3\left(\frac{y - y_{k+m}}{h_y}\right) \quad (9)$$

注:当 $j, k=0, 1$ 或 $j=M-1, M$ 或 $k=N-1, N$ 时, 须附加类似一元情形的边界条件。

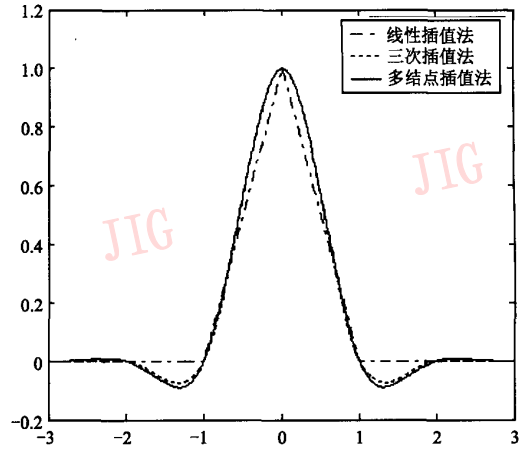
3 与三次卷积等插值方法的比较

评价一个图像插值方法的优劣, 通常可考察它的逼近精度、正则性、核函数的频域性质和计算的效率^[1,3]。下面从这几个方面把三次多结点样条插值方法与三次卷积等常用的插值方法做一个比较。

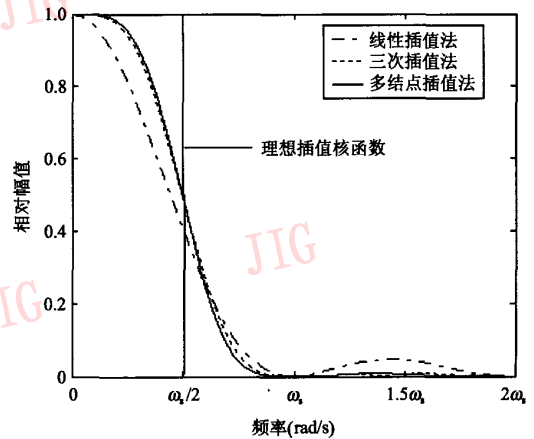
传统的三次插值方法中, Keys 的三次卷积插值

的逼近阶是 3 阶^[1], 三次多结点样条插值的逼近阶是 4 阶, 可见三次多结点样条插值精度更高。由于 1, 2 阶导数在有些图像中进行处理连续是需要的, 一般不需要更高阶的正则性, 所以理想的正则性是 C^2 连续。由于三次卷积是 C^1 连续, 从而使得它不适用于涉及 2 阶导数的图像处理; 而且由于三次多结点样条是 C^2 连续, 因此适用于涉及 2 阶导数的图像处理。对于计算的效率, 三次卷积支撑区间为 $(-2, 2)$, 虽然三次多结点样条基函数的支撑区间为 $(-3, 3)$, 但对算法实现影响不大。

下面对 $q_3(x)$ 的特性与经典的线性插值和三次插值(指三次卷积插值)特性进行对比, 它们的空域特性和频域特性见图 1, 图中 ω_s (s 代表 sample) 为



(a) 空域特性曲线



(b) 频率特性曲线

图 1 插值函数的空域曲线和幅频特性曲线图
Fig. 1 Interpolation kernels and amplitude spectras of interpolation kernels

采样角频率。从图中可见,多结点插值函数与三次插值函数的空域特性非常相似,其频率特性也很接近。总的比较起来,由于多结点插值函数的频率特性较好,其频谱的旁瓣较少,且其肩峰和余振与线性插值方法相比要小得多;虽然其肩峰和余振比三次插值略差一些,但其主瓣较窄,且有较陡的过渡带,因此是最接近理想插值函数的频率曲线。

从人的视觉特征来讲,人的视觉仅对灰度值变化较快或有突变的地方最敏感,而这些地方正是图像的轮廓或边缘区域,由于这些区域的信息在频域表现为高频信息,即位于 $\omega_s/2$ 附近的高频信息,因此,对于数字图像处理来说,用多结点插值函数来处理图像轮廓区域将会收到较好的效果,并能够有效保持图像的边缘锐度。

4 试验结果与分析

为验证多结点样条图像插值算法的有效性,选取多幅彩色及灰度图像(如经典图像 Lena、baboon、girl、house、peppers 等)在 Pentium 655 上,利用 Dephi7.0 对本文算法和经典的双线性插值、双三次插值算法进行了缩放对比试验。本文以 Lena(106 × 106 × 24bit)灰度图像和 baboon(512 × 512 × 24bit)彩色图像为例,用以上插值方法分别对两幅图像先进行 2 倍下采样后,再进行 2 倍上采样的插值实验,以比较各种插值算法的效果,其插值结果图像如图 2 和图 3 所示,执行时间见表 1。

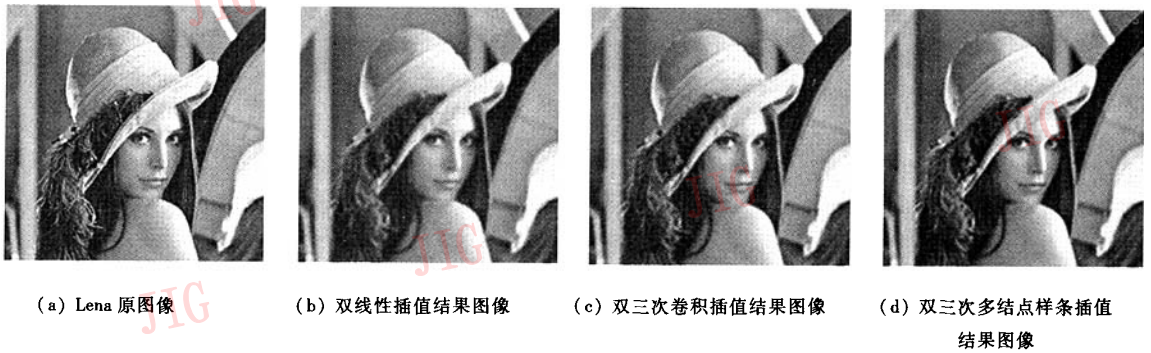


图 2 几种不同插值方法插值结果图像(Lena)比较
Fig. 2 Comparing the interpolation images(Lena)

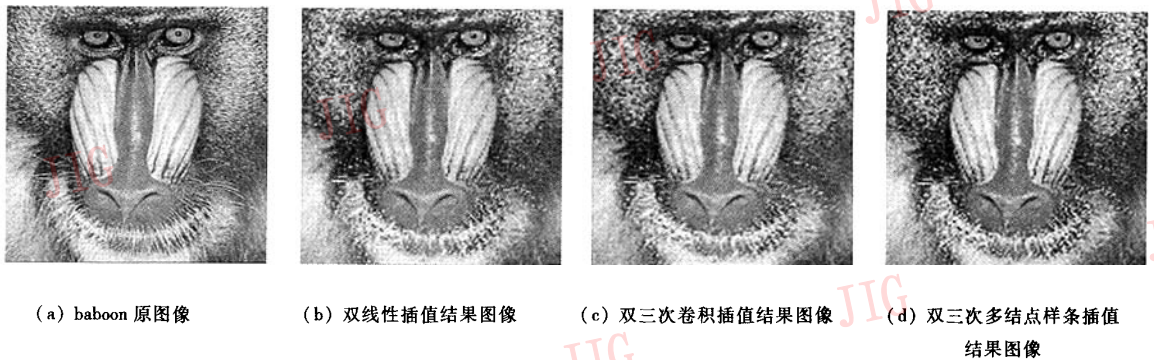


图 3 几种不同插值方法插值结果图像比较(baboon)
Fig. 3 Comparing the interpolation images(baboon)

从图 2 和图 3 可以看出,图 2(d)的效果比图 2(b)的效果好得多,同样图 3(d)的效果也比图 3(b)的效果好得多,尤其是图像的轮廓区域,如羽毛、帽子的边沿、胡须、眼睛和鼻子边缘等效果更佳;在细节保持、清晰度方面,图 2(d)比图 2(c)略好、

图 3(d)比图 3(c)也略好,在这是因为图 2(d)和图 3(d)保留了更多的图像细节的缘故。当然从表 1 可见,本文方法在处理速度上最慢,这是因为本文方法每处理一个像素点涉及周围像素点数较多的缘故。

表1 不同插值方法执行速度的对照表

Tab.1 Comparing the performance time in ms of interpolation images

插值方法	插值时间(ms)	
	Lena. bmp 图像	baboon. bmp 图像
双线性插值	9	15
双三次插值	18	32
双三次多结点样条插值	47	63

另外,为了说明本方法处理结果图像的效果,表2给出了Lena、girl和house图像的插值结果图像的峰值信噪比。从表中可看出,用本文方法处理的结果图像的信噪比比双线性插值好,比双三次卷积插值方法也略好。

表2 不同插值方法插值结果图像的峰值信噪比比较

Tab.2 Comparing the PSNR values in dB of interpolation images

插值方法	插值结果图像峰值信噪比(dB)		
	Lena. bmp 图像	Girl. bmp 图像	House. bmp 图像
双线性插值	26.70	31.86	32.15
双三次卷积	27.35	33.00	31.94
多结点样条	27.37	33.48	33.09

5 结论

为了兼顾插值与逼近方法的优点,本文给出了三次多结点样条插值方法,用于图像插值。三次多

结点样条基函数的插值核是定义在-3到3之间的分段三次多项式。实验表明,在保证有效实现图像插值的前提下,三次多结点样条插值方法的逼近阶可达到4阶,正则性可达到 C^2 连续,这都高于三次卷积方法;核函数的频域性质也比三次卷积等插值方法好。不同插值方法插值实验所得到的图像的峰值信噪比也表明,三次多结点样条插值方法优于三次卷积等插值方法。

参考文献(References)

- 1 Keys Robert G. Cubic convolution interpolation for digital image processing [J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech Signal Processing, 1981, 29(6): 1153 ~ 1160.
- 2 Erik Meijering, Michael Unser. A note on cubic convolution interpolation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(4): 477 ~ 479.
- 3 Thevenaz P, Blu T, Unser M. Interpolation revisited [J]. IEEE Transactions on Medical Image, 2000, 19(7): 739 ~ 758.
- 4 QI Dong-xu. Many-knot spline interpolation(I) [J]. Natural Science Journal of Jilin University, 1975, (2): 70 ~ 81. [齐东旭. 关于多结点基函数型 δ -样条插值(I) [J]. 吉林大学自然科学学报, 1975, (2): 70 ~ 81.]
- 5 LI Hua-shan, DING Wei, QI Dong-xu. Many-knot spline interpolation and any-scalerefinement algorithm [J]. Journal of Image and Graphics, 1997, 2(10): 701 ~ 706. [李华山, 丁玮, 齐东旭. 多结点样条插值及其多尺度细化算法 [J]. 中国图象图形学报, 1997, 2(10): 701 ~ 706.]
- 6 QI Dong-xu, LI Hua-shan. Many-knot spline technique for approximation of data [J]. Science in China (Series E), (in Chinese), 1999, 29(4): 334 ~ 387. [齐东旭, 李华山. 数据逼近的多结点样条技术 [J]. 中国科学(E辑), 1999, 29(4): 334 ~ 387.]