

# 一类复映射系的广义 Mandelbrot 集

王兴元

(大连理工大学电子与信息工程学院,大连 116024) (大连海事大学计算机科学与技术学院,大连 116026)

**摘要** 推广了 Shirriff 所提出的由两个简单复映射的组合构造正整数阶广义 Mandelbrot 集(简称广义 M 集)的方法,并由推广的一类简单复映射系,构造出一系列实数阶的广义 M 集。利用实验数学方法,对广义 M 集的结构和演化进行了研究,发现整数阶广义 M 集具有对称性和分形特征,小数阶广义 M 集出现了错动和断裂,且其演化过程依赖于相角主值范围的选取。在此基础上,阐述了广义 M 集的物理意义。

**关键词** 简单复映射系 广义 M 集 分形 演化 物理意义

**中图分类号:** TP301.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2006)02-0259-06

## Generalized Mandelbort Sets from a Class Complex Mapping System

WANG Xing-yuan

(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

(School of Computer Science & Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026)

**Abstract** This article expands the method constructing the generalized Mandelbort sets for positive integer index number with the composition of two simple complex mapping which were put forward by Shirriff. Based on a class simple complex mapping system expanded by the author, a series of generalized Mandelbort sets for real index number has been constructed. With the experimental mathematics method of combining the theory of analytic function of one complex variable with computer aided drawing, the fractal features and evolutions of the generalized Mandelbort sets are studied. The results show that the generalized Mandelbort sets for integer index number have symmetry and fractal feature; while the ones for decimal index number have discontinuity and collapse, and their evolution depends on the choice of the principal range of the phase angle. And the author sets forth the physical meaning of the generalized Mandelbort sets.

**Keywords** a class simple complex mapping system, the generalized Mandelbort set, fractal, evolution, physical meaning

## 1 引言

20 多年来,人们对复映射  $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = 2)$  所构造的 M 集已进行了深入研究<sup>[1-3]</sup>。在此基础上, Gujar 等人研究了  $\alpha \in \mathbf{R}$  的广义 M 集<sup>[4-9]</sup>; Hooper 等人提出了 M 集非边界区域分形结构的构造方法<sup>[10,11]</sup>; Lakhtakia 研究了开关 J 集<sup>[12]</sup>; 笔者研究了广义 M-J 集非边界区域和开关广义 M-J 集的分形结构<sup>[13,14]</sup>。此外, Romera 等人研究了复指数映射的广

义 M-J 集<sup>[15,16]</sup>; Beck 等人探讨了广义 M-J 集的物理意义<sup>[17,18]</sup>。那么由多个复映射的组合所构造的广义 M 集会出现什么图形? 它们又将给我们什么启迪? 为此 1993 年, Shirriff 曾提出了由两个简单复映射  $f_j: z \leftarrow z^{\alpha_j} + h_j(c) (\alpha_j = 2, 3, 4, \dots; j = 1, 2)$  的组合, 构造广义 M 集的方法<sup>[19]</sup>。笔者推广了这种方法, 并构造了一类复映射系  $f_j: z \leftarrow z^{\alpha_j} + h_j(c) (\alpha_j \in \mathbf{R}; j = 1, 2, \dots, m)$  的广义 M 集, 研究了广义 M 集的分形特征及演化过程, 并阐述了其物理意义。

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(60573172); 辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(20040081)

**收稿日期:** 2004-12-13; **改回日期:** 2005-04-22

**第一作者简介:** 王兴元(1964 - ), 男, 教授, 博士生导师。1999 年毕业于东北大学计算机软件与理论专业并获博士学位, 1999 年 - 2001 年在东北大学自动化博士后流动站作博士后。主要研究方向为混沌分形理论及应用。近 5 年来, 出版学术专著 3 部, 以第一作者身份在国内核心期刊上发表论文 80 余篇, 其中被 SCI、EI 收录共 40 余篇。E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

### 2 理论与方法

基于 Shirriff 的映射模型<sup>[19]</sup>, 给出构造广义 M 集推广的一类简单复映射系迭代过程如下:

$$\begin{cases} z_0 = h_1(c) \\ z_{m \times n + 1} = f_2(z_{m \times n}) = (z_{m \times n})^{\alpha_2} + h_2(c) \\ \dots\dots \\ z_{m \times n + m - 1} = f_m(z_{m \times n + m - 2}) = (z_{m \times n + m - 2})^{\alpha_m} + h_m(c) \\ z_{m \times n + m} = f_1(z_{m \times n + m - 1}) = (z_{m \times n + m - 1})^{\alpha_1} + h_1(c) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\alpha_j \in \mathbf{R}$  且  $\alpha_j \notin [0, 1]$ ,  $h_j(c)$  为简单函数,  $n$  为迭代次数,  $m (m \geq 2)$  为映射个数。

复映射系  $f_j: z \leftarrow z^{\alpha_j} + h_j(c) (\alpha_j \in \mathbf{R}; j = 1, 2, \dots, m)$  的临界点是使其一阶导数为零的点。由于  $f_j'(z) = \alpha_j z^{\alpha_j - 1}$ , 故  $f$  的临界点应满足  $\alpha_j z^{\alpha_j - 1} = 0$ 。若  $\alpha_j \neq 0$ , 则

$$\begin{cases} \alpha_j < 1 & \text{临界点为 } z \rightarrow \infty \\ \alpha_j = 1 & \text{无临界点} \\ \alpha_j > 1 & \text{临界点为 } z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由上述复映射系  $f_j (j = 1, 2, \dots, m)$  构造广义 M 集, 应从  $f_j (j = 1, 2, \dots, m)$  的临界点开始迭代, 可当  $\alpha_j > 1$  时, 若取  $z_0 = 0$ , 则  $z_1 = h_1(c), z_2 = (h_1(c))^{\alpha_2} + h_2(c), \dots$ ; 当  $\alpha_j < 0$  时, 若取  $z_0 = \infty$ , 则  $z_1 = h_1(c), z_2 = (h_1(c))^{\alpha_2} + h_2(c), \dots$ 。因此为避免计算机溢出, 式(1)选取迭代初始点为  $z_0 = h_1(c)$ , 这使得用计算机构造任意实指数  $\alpha_j \in \mathbf{R}$  且  $\alpha_j \notin [0, 1]$  的广义 M 集的操作得到了统一。值得注意的是, 当  $\alpha_j \in [0, 1]$  时, 仍用  $h_1(c)$  作为初始点迭代, 得到的图像不是真正的 M 集。这是因为  $\alpha_j = 1$  时, 因为无临界点, 所以也就谈不上临界点的轨道;  $0 \leq \alpha_j < 1$  时, 临界点为  $\infty$ ,  $\infty$  的轨道上没有参数  $h_1(c)$ , 所以从  $h_1(c)$  开始迭代的图像不是 M 集。

**定义 1** 设  $\varphi(z)$  代表式(1), 为黎曼球  $\hat{C}$  上的复映射,  $M_\varphi$  表示复平面  $C$  中  $h_1(c)$  点的轨道有界的复数  $c$  的集合, 即

$$M_\varphi = \{c \in C; |\varphi^n(h_1(c))|_{n=1}^{\infty} \text{ 有界} \}$$

则称  $M_\varphi$  为相应于  $\varphi$  的广义 M 集。定义 1 表明: 若  $c \in M_\varphi$ , 则  $h_1(c)$  作用后布朗粒子的瞬时速度是有界的, 即粒子落入势井中; 若  $c \in \overline{M_\varphi}$ , 则  $h_1(c)$  作用后布朗粒子的瞬时速度将趋于无穷, 即粒子逃出势井<sup>[18]</sup>。定义 1 利用函数族的  $h_1(c)$  点迭代特征, 这正是构造广义 M 集逃逸时间算法的出发点<sup>[9]</sup>。下面给出构造广义 M 集的方法:

(1) 设函数  $\varphi(z)$  代表式(1), 设定视窗  $W$  及逃逸半径  $R$  和逃逸时间限制  $N$ ;

(2) 定义逃逸时间函数

$$T(x) = \begin{cases} k & |\varphi^k(x)| \geq R, |\varphi^i(x)| < R, \\ & i = 1, 2, \dots, k - 1, k \leq N \\ 0 & |\varphi^i(x)| < R, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

(3) 对视窗内的点  $c_0$  计算  $T(c_0)$ ;

(4) 如果  $T(c_0) = 0$ , 则  $c_0 \in M_\varphi$ ; 如果  $T(c_0) \neq 0$ , 则  $c_0 \in \overline{M_\varphi}$ ;

(5) 重复第 3、4 步, 直到穷尽视窗  $W$  内所有的点, 即可获得广义 M 集。

选取逃逸半径  $R = 20$ 、逃逸时间限制  $N = 100$ , 绘制了广义 M 集。根据图形结构特点, 可分  $\alpha_j$  为整数和小数这两种情况来研究。

### 3 结果与分析

#### 3.1 $\alpha_j$ 为整数

图 1 为具有代表性的几何例整数阶的广义 M 集, 图中黑色为稳定区  $M_\varphi$ , 白色为不稳定区  $\overline{M_\varphi}$  (而图 1(f) 则与此相反, 其黑色为逃逸区  $\overline{M_\varphi}$ , 白色为稳定区  $M_\varphi$ )。图 1(a) ~ (f) 选取的  $m = 2$ , 图 1(g) 选取的  $m = 3$ 。其中正整数阶的广义 M 集(图 1(a) ~ (d)), 具有类似若干个花瓣组成的花朵结构。

**定理 1** 由  $\varphi(z)$  构造的广义 M 集  $M_\varphi$ , 若  $\forall c \in C, \exists h_j(\bar{c}) = h_j(c) (j = 1, 2, \dots, m)$ , 则对于实数阶的广义 M 集, 有

$$\varphi^k(c) = \varphi^k(\bar{c}) (k = 1, 2, 3, \dots, N)$$

若  $\forall c \in C, \exists h_j(\bar{c}) = \overline{h_j(c)} (j = 1, 2, \dots, m)$ , 则对于整数阶的广义 M 集, 有

$$\varphi^k(c) = \overline{\varphi^k(\bar{c})} (k = 1, 2, 3, \dots, N)$$

**证明** 利用数学归纳法

当  $h_j(\bar{c}) = h_j(c) (j = 1, 2, \dots, m)$  时, 对于取实数的  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, m)$ , 由定义 1 及  $\varphi(z)$  的迭代过程式(1)可知  $\varphi^k(c) = \varphi^k(\bar{c})$ 。

当  $h_j(\bar{c}) = \overline{h_j(c)} (j = 1, 2, \dots, m)$  时, 若  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, m)$  为整数, 则

$$\varphi^1(\bar{c}) = (h_1(\bar{c}))^{\alpha_2} + h_2(\bar{c}) = \overline{(h_1(c))^{\alpha_2} + h_2(c)} = \overline{\varphi^1(c)}$$

即  $\varphi^1(c) = \overline{\varphi^1(\bar{c})}$ 。

故可设  $\varphi^{k-1}(c) = \overline{\varphi^{k-1}(\bar{c})}$  成立, 则有

$$\begin{aligned} \varphi^k(c) &= \varphi^{k-1}[\varphi^1(c)] = \overline{\varphi^{k-1}[\overline{\varphi^1(\bar{c})}]} \\ &= \varphi^{k-1}[\overline{\varphi^1(\bar{c})}] = \overline{\varphi^k(\bar{c})} \end{aligned}$$

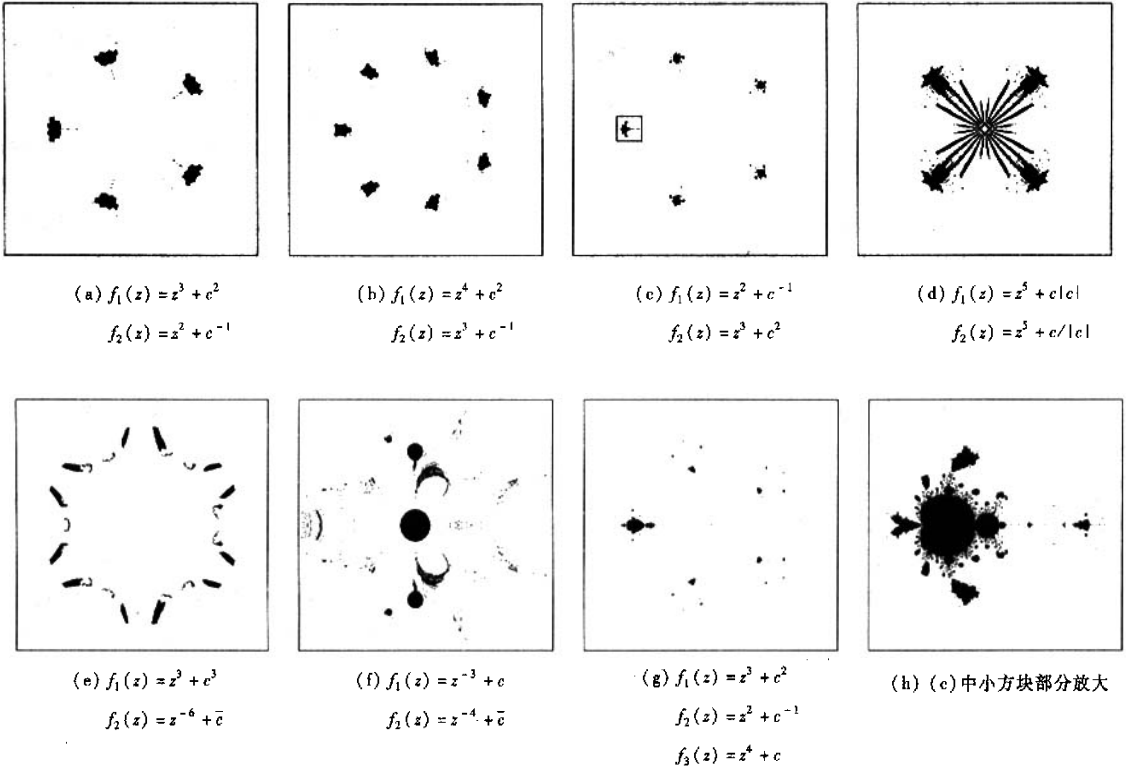


图 1 整数阶广义 M 集

Fig. 1 The generalized Mandelbort sets for positive integer index number

证毕。

定理 1 表明若满足上述条件之一, 则  $\forall c \in M_\varphi$ ,  $\exists \bar{c} \in M_\varphi$ , 故整数阶的广义 M 集关于  $x$  轴对称。这说明若  $h_j(\bar{c}) = h_j(c)$ , 则冲量  $c$  及其共轭  $\bar{c}$  作用于布朗粒子, 粒子速率的变化规律相同; 若  $h_j(\bar{c}) = \overline{h_j(c)}$ , 则当  $\alpha_j$  为整数时, 布朗粒子受  $c$  或  $\bar{c}$  作用后速率的变化规律相同<sup>[18]</sup>。

定理 2 由  $\varphi(z)$  构造广义 M 集  $M_\varphi$ , 若  $m = 2$  时,  $\forall c \in \mathbb{C}$ ,  $\exists$  旋转角度  $r, s$  和  $t$ , 使

$$h_1(ce^{ir}) = h_1(c)e^{is}$$

$$h_2(ce^{ir}) = h_2(c)e^{it}$$

$$e^{i\alpha_2} = e^{is}, e^{i\alpha_1} = e^{it}$$

成立, 则有

$$|\varphi^k(c)| = |\varphi^k(ce^{ir})| \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N)$$

证明 利用数学归纳法

$$\begin{aligned} \because \varphi^1(ce^{ir}) &= (h_1(ce^{ir}))^{\alpha_2} + h_2(ce^{ir}) \\ &= (h_1(c))^{\alpha_2} e^{i\alpha_2} + h_2(c)e^{it} \\ &= [(h_1(c))^{\alpha_2} + h_2(c)]e^{it} \end{aligned}$$

$$\therefore |\varphi^1(c)| = |\varphi^1(ce^{ir})|$$

可设  $|\varphi^{k-1}(c)| = |\varphi^{k-1}(ce^{ir})|$  成立, 则有

$$\begin{aligned} |\varphi^k(ce^{ir})| &= |\varphi^{k-1}[\varphi^1(ce^{ir})]| \\ &= |\varphi^{k-1}[\varphi^1(c)]| = |\varphi^k(c)| \end{aligned}$$

证毕。

该定理表明若  $c \in M_\varphi$ , 则  $ce^{ir} \in M_\varphi$ , 故满足上述条件的广义 M 集的中心为原点, 且具有  $r$  角度的旋转对称性。将该定理进一步扩展, 即可证明  $m \geq 2$  时的情况。

下面以图 1(a) 为例, 对定理 2 作进一步说明。生成图 1(a) 的映射为  $f_1(z) = z^3 + c^2, f_2(z) = z^2 + c^{-1}$ 。由定理 2 的条件  $h_1(ce^{ir}) = h_1(c)e^{is}$ , 有  $(ce^{ir})^2 = c^2e^{is}$ , 故可推出  $e^{2ir} = e^{is}$ 。同理由定理 2 的其余 3 个条件, 可得出:  $e^{-ir} = e^{it}, e^{2is} = e^{it}, e^{3it} = e^{it}$ 。由这 4 个等式, 即可推出  $e^{isr} = 1$ , 故可得  $r = \frac{2p\pi}{5} (p = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \dots)$ 。取  $p = 1$ , 则  $r = \frac{2\pi}{5}$ , 故图 1(a) 具有 5 倍的旋转对称性。若函数  $f_1$  和  $f_2$  的顺序互换后, 模仿定理 2 可推得  $\varphi^1(ce^{ir}) = [(h_2(c))^{\alpha_1} + h_1(c)]e^{it} = \varphi^1(c)e^{it}$ 。利用数学归纳法, 亦可证明  $|\varphi^k(c)| =$

$|\varphi^k(ce^{ir})|$ 。这表明新的广义 M 组集合仍然以中心为原点,且具有  $r$  角度的旋转对称性(图 1(c))。这既说明布朗粒子速率的变化规律与简单冲量函数  $h_k(c)$  ( $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) 作用的顺序有关,也说明尽管  $h_k(c)$  作用的顺序发生变化,若满足定理 2 所要求的条件,冲量  $c$  旋转  $r$  角度后再作用于粒子,粒子速率的变化规律不改变<sup>[18]</sup>。

由局部放大图 1(f) 可见,广义 M 集具有非常复杂的自相似分形结构,其明显特征为:一个主要的心形图与一系列圆盘形的“芽苞”突起连结在一起,每一个芽苞又被更细小的芽苞所环绕,以此类推。然而,这并不是全部,还有精细的“发状”分枝从芽苞向外长出,这些细发与一些奇形怪状的片断相连,且片断边缘的每一段上都带有与整个心形图相似的微型样本。计算机制图中容易遗漏掉这些细发,然而精细的图形说明了这一结构特征。由定义 1 知广义 M 集  $M_\alpha$  可形象地刻画出粒子速率的变化规律<sup>[18]</sup>,可见  $M_\alpha$  的复杂结构反映出布朗运动也是很复杂的。

3.2  $\alpha_j$  为小数

图 2 为选取  $m = 2$  的小数阶广义 M 集,其中黑色为稳定区  $M_s$ ,白色为不稳定区  $M_u$ 。将图 2 与

图 1(a)、(b) 比较,可见正小数阶广义 M 集类似若干个完整花瓣及部分花瓣(简称雏瓣)组成的花朵,并随  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ) 在两个相邻整数间的增加,雏瓣不断发育而演化成为完整花瓣。

对小数阶广义 M 集的结构特征可作如下分析:由复映射系式(1)构造广义 M 集,对式(1)中的  $z^{a_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) 的计算,采用了 DeMoivre 理论

$$z^{a_j} = r^{a_j} (\cos(\alpha_j \theta_j) + i \sin(\alpha_j \theta_j)) \quad (4)$$

这就涉及到相角  $\theta_j$  主值范围的选取,选取  $\theta_j$  的范围为以下 4 种情况:  $[0, 2\pi)$ 、 $[-\pi, \pi)$ 、 $[-3\pi/2, \pi/2)$  和  $[-\pi/2, 3\pi/2)$ 。当  $\alpha_j$  为整数时,将不会影响式(4)的使用,因

$$\begin{cases} \cos(\alpha_j \theta_j) = \cos(\alpha_j \theta_j + 2\pi \alpha_j) \\ \sin(\alpha_j \theta_j) = \sin(\alpha_j \theta_j + 2\pi \alpha_j) \end{cases} \quad (5)$$

但  $\alpha_j$  为小数时,则式(5)不成立,故  $\theta_j$  范围的不同选取将导致广义 M 集的不同演化,即粒子的动力学特征遵循不同规律。另外在使用式(4)时,若  $\alpha_j \theta_j$  超出上述 4 种主值范围,就要使  $\alpha_j \theta_j$  加或减  $2\pi$  的整数倍来进行调整,这就导致广义 M 集出现了错动和断裂,产生了雏瓣。可见广义 M 集雏瓣的出现仅当  $\alpha_j$  取小数时。当相角  $\theta_j$  主值范围选取为上述

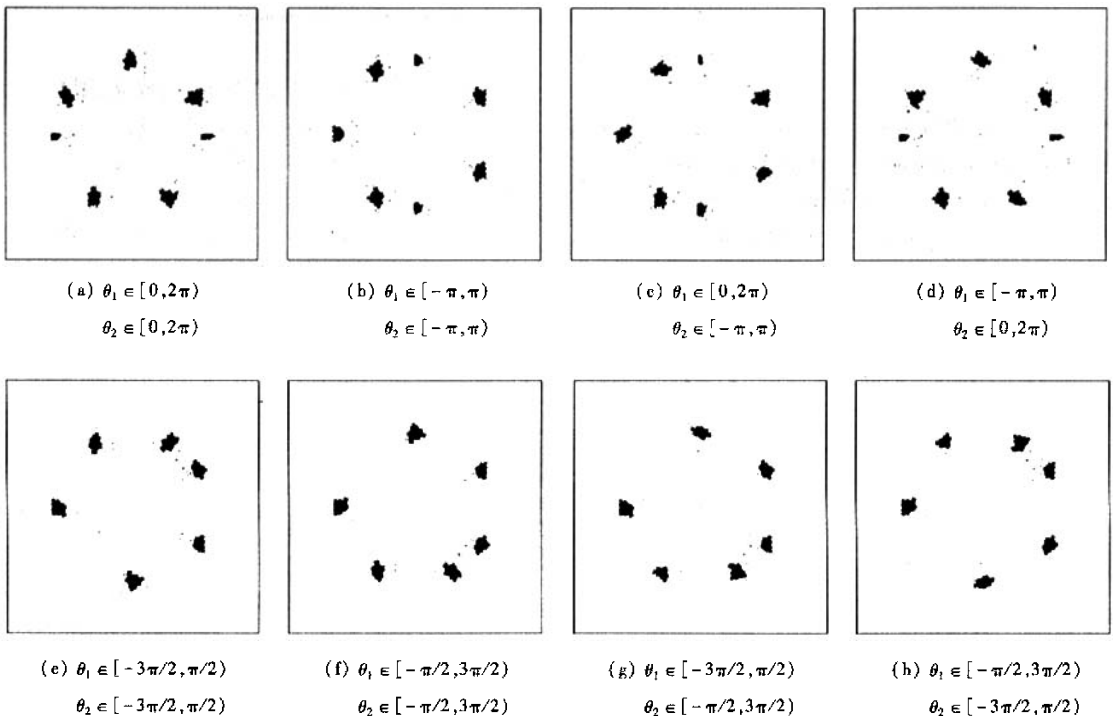


图 2 小数阶广义 M 集,映射系为  $f_1(z) = z^{3.5} + c^2$ ,  $f_2(z) = z^{2.5} + c^{-1}$

Fig. 2 The generalized Mandelbort sets for real index number, complex mapping system:  $f_1(z) = z^{3.5} + c^2$ ,  $f_2(z) = z^{2.5} + c^{-1}$

4 种情况时,由有重复排列理论可知相角  $\theta_j(j=1,2, \dots, m)$  主值范围的选取有  $4^j$  种组合方式,故取  $m=2$ ,当  $\alpha_j$  在两个相邻整数间连续变化时,广义 M 集共有 16 种演化形式(这里只给出 8 种,如图 2 所示)。可见相角  $\theta_j$  主值范围的不同选取,将导致粒子速率的变化规律不同<sup>[18]</sup>。

**定理 3** 由  $\varphi(z)$  构造广义 M 集,选取相角  $\theta_j \in [-\pi, \pi) (j=1, 2, \dots, m)$ , 若  $\forall c \in \mathbf{C}, \exists h_j(\bar{c}) = \overline{h_j(c)} (j=1, 2, \dots, m)$ , 则有

$$\varphi^k(c) = \overline{\varphi^k(\bar{c})} \quad (k=1, 2, 3, \dots, N)$$

**证明** 对于  $\theta_j \in [-\pi, \pi)$ , 若设

$$h_1(c) = |c'|e^{i\theta_j}$$

则

$$\overline{h_1(c)} = |c'|e^{-i\theta_j}$$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi^1(c) &= (h_1(c))^{\alpha_2} + h_2(c) \\ &= |c'|^{\alpha_2} e^{i\alpha_2\theta_j} + h_2(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \therefore \varphi^1(\bar{c}) &= (h_1(\bar{c}))^{\alpha_2} + h_2(\bar{c}) \\ &= (\overline{h_1(c)})^{\alpha_2} + \overline{h_2(c)} \\ &= |c'|^{\alpha_2} e^{-i\alpha_2\theta_j} + \overline{h_2(c)} \end{aligned}$$

$$\therefore \varphi^1(c) = \overline{\varphi^1(\bar{c})}$$

故设  $\varphi^{k-1}(c) = \overline{\varphi^{k-1}(\bar{c})}$  成立。

则有  $\varphi^k(c) = \varphi^{k-1}[\varphi^1(c)] = \overline{\varphi^{k-1}[\varphi^1(\bar{c})]} = \overline{\varphi^k(\bar{c})}$ 。证毕。

定理 3 表明  $\theta_j \in [-\pi, \pi) (j=1, 2, \dots, m)$  的广义 M 集关于  $x$  轴对称(图 2(b))。

若选取  $\theta_j \in [0, 2\pi)$ , 则  $\overline{h_1(c)} = |c'|e^{i(2\pi-\theta_j)}$ 。

因为

$$\begin{aligned} \varphi^1(\bar{c}) &= (\overline{h_1(c)})^{\alpha_2} + \overline{h_2(c)} \\ &= |c'|^{\alpha_2} e^{i\alpha_2(2\pi-\theta_j)} + \overline{h_2(c)} \\ &= |c'|^{\alpha_2} e^{i2\alpha_2\pi} e^{-i\alpha_2\theta_j} + \overline{h_2(c)} \end{aligned}$$

$\alpha_2$  为小数时,  $e^{i2\alpha_2\pi} \neq 1$ , 所以  $\varphi^1(c) \neq \overline{\varphi^1(\bar{c})}$ 。故此时广义 M 集关于  $x$  轴不对称。

又  $\theta_j \in [-3\pi/2, \pi/2)$  或  $\theta_j \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ ,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为小数时, 同理可推出  $\varphi^1(c) \neq -\overline{\varphi^1(\bar{c})}$ , 此时广义 M 集关于  $y$  轴不对称。

**定理 4** 在复  $\mathbf{C}$  平面上由  $\varphi(z)$  构造广义 M 集, 因相角  $\theta_j \in [-3\pi/2, \pi/2)$  和  $\theta_j \in [-\pi/2, 3\pi/2)$  的选取关于  $x$  轴具有对称性, 故可用  $\Omega$  表示  $[-3\pi/2, \pi/2)$ ,  $\overline{\Omega}$  表示  $[-\pi/2, 3\pi/2)$ ; 反之若用  $\overline{\Omega}$  表示  $[-3\pi/2, \pi/2)$ , 则  $\Omega$  表示  $[-\pi/2, 3\pi/2)$ 。若选取相角  $\theta_j(j=1, 2, \dots, m)$  的主值范围仅为  $\Omega$  和  $\overline{\Omega}$  两

种情况时, 则有

$$\begin{aligned} \varphi^k(c) \Big|_{\theta_1 \in \Omega, \dots, \theta_q \in \overline{\Omega}, \dots, \theta_j \in \Omega} &= \overline{\varphi^k(\bar{c})} \Big|_{\theta_1 \in \overline{\Omega}, \dots, \theta_q \in \Omega, \dots, \theta_j \in \overline{\Omega}} \\ &(k=1, 2, 3, \dots, N; q=2, 3, \dots, j-1)。 \end{aligned}$$

利用数学归纳法, 易证明定理 4。定理 4 表明  $\theta_1 \in \Omega, \dots, \theta_q \in \overline{\Omega}, \dots, \theta_j \in \Omega$  的广义 M 集以  $x$  轴为轴翻转 180° 后即得  $\theta_1 \in \overline{\Omega}, \dots, \theta_q \in \Omega, \dots, \theta_j \in \overline{\Omega}$  的广义 M 集(图 2(e) 和 (f), (g) 和 (h)), 反之亦然。

定理 3 表明选取相角  $\theta_j \in [-\pi, \pi)$ , 若  $h_j(\bar{c}) = \overline{h_j(c)}$ , 则在冲量  $c$  或其共轭  $\bar{c}$  作用后, 粒子速率的变化相同。定理 4 表明选取相角  $\theta_1 \in \Omega, \dots, \theta_q \in \overline{\Omega}, \dots, \theta_j \in \Omega$  时的冲量  $c$  和选取相角  $\theta_1 \in \overline{\Omega}, \dots, \theta_q \in \Omega, \dots, \theta_j \in \overline{\Omega}$  时的冲量  $\bar{c}$  作用于粒子, 粒子速率的变化相同。

### 4 结 论

本文推广了 Shirriff 提出的由两个简单复映射  $f_j: z \leftarrow z^{\alpha_j} + h_j(c) (\alpha_j=2, 3, 4, \dots; j=1, 2)$  的组合构造广义 M 集的方法, 并构造出一类简单复映射系  $f_j: z \leftarrow z^{\alpha_j} + h_j(c) (\alpha_j \in \mathbf{R}; j=1, 2, \dots, m)$  的广义 M 集。利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学的方法, 对广义 M 集的结构和演化进行了研究, 发现整数阶广义 M 集具有对称性和分形特征, 小数阶广义 M 集出现了错动和断裂, 且其演化过程依赖于相角主值范围的选取。在此基础上, 基于广义 M 集的分形结构特征形象地阐述了布朗粒子运动规律。布朗运动是物理学中的一个经典难题, 它千姿百态、瞬息万变和神态莫测, 是自然界中复杂现象的集中表现, 基于 M-J 集的分形结构去探讨布朗粒子运动的变化规律, 已为布朗运动研究开辟了一条新的思路, 同时也启发我们利用分形理论的基本原理去进一步解释物理学中的某些理论。

本研究的目的是揭示不光滑和不规则的分形集背后可能隐藏的简单规律, 以求发现一大类复杂分形集普遍遵循的共同规律, 进一步去预测更复杂的分形集结构, 从而丰富分形理论, 并为计算机图形学的研究注入新的活力, 并带来创新。对较复杂的复映射系  $f_j: z \leftarrow z^{\alpha_j} + h_j(c) (\omega_j = \alpha_j + \beta_j; \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}; j=1, 2, \dots, m)$  所构造的广义 M 集的研究, 进一步的理论与实验工作还有待于深入。

### 参考文献 (References)

1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. San

- Fransisco; Freeman W H, 1982; 5 ~ 47.
- 2 Peitgen H O, Saupe D. The Science of Fractal Images[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988; 137 ~ 218.
  - 3 Wang Xing-yuan. Chaos in the Complex Nonlinearity System[M]. Beijing: Electronics Industry Press, 2003; 1 ~ 32. [王兴元. 复杂非线性系统中的混沌[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003; 1 ~ 32.]
  - 4 Lakhtakia A. On the symmetries of the Julia sets for the process  $z \leftarrow z^p + c$ [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1987, 20(12): 3533 ~ 3535.
  - 5 Gujar U G, Bhavsar V C. Fractals from  $z \leftarrow z^\alpha + c$  in the complex  $c$ -plane[J]. Computers & Graphics, 1991, 15(3): 441 ~ 449.
  - 6 Glynn E F. The evolution of the gingerbread man[J]. Computers & Graphics, 1991, 15(4): 579 ~ 582.
  - 7 Wang X Y, Liu X D, Zhu W Y, et al. Analysis of  $c$ -plane fractal images from  $z \leftarrow z^\alpha + c$  for  $\alpha < 0$ [J]. Fractals, 2000, 8(3): 307 ~ 314.
  - 8 Wang Xing-yuan, Liu Xiang-dong, Zhu Wei-yong. Researches on the general Mandelbrot sets from the complex mapping  $z \leftarrow z^\alpha + c$  ( $\alpha < 0$ ) [J]. Journal of Mathematical Physics, 1999, 19(1): 73 ~ 78. [王兴元, 刘向东, 朱伟勇. 由复映射  $z \leftarrow z^\alpha + c$  ( $\alpha < 0$ ) 所构造的广义 M 集的研究[J]. 数学物理学报, 1999, 19(1): 73 ~ 79.]
  - 9 Wang Xing-yuan. Fractal mechanism of the generalized M-J set[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2002; 82 ~ 116. [王兴元. 广义 M-J 集的分形机理[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2002; 82 ~ 116.]
  - 10 Hooper K J. A note on some internal structures of the Mandelbrot set [J]. Computers & Graphics, 1991, 15(2): 295 ~ 297.
  - 11 Philip K W. Field lines in the Mandelbrot set[J]. Computers & Graphics, 1992, 16(4): 443 ~ 447.
  - 12 Lakhtakia A. Julia sets of switched processes [J]. Computers & Graphics, 1991, 15(4): 597 ~ 599.
  - 13 Wang X Y. Fractal structures of the non-boundary region of the generalized Mandelbrot set[J]. Progress in Natural Science, 2001, 11(9): 693 ~ 700.
  - 14 Wang X Y. Switched processes generalized Mandelbrot sets for complex index number [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(1): 73 ~ 81.
  - 15 Romera M, Pastor G, Alvarez G, et al. Growth complex exponential dynamics[J]. Computers & Graphics, 2000, 24(1): 115 ~ 131.
  - 16 Wang Xing-yuan, Shi Qi-jiang. The generalized Mandelbrot-Julia sets from a class of complex exponential map [J]. Progress in Natural Science, 2004, 14(8): 934 ~ 940. [王兴元, 石其江. 一类复指数映射的广义 M-J 集[J]. 自然科学进展, 2004, 14(8): 934 ~ 940.]
  - 17 Beck C. Physical meaning for Mandelbrot and Julia sets[J]. Physica D, 1999, 125: 171 ~ 182.
  - 18 Wang Xing-yuan, Meng Qing-ye. Study on physical meaning for generalized Mandelbrot-Julia sets based on Langevin problem [J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(2): 388 ~ 395. [王兴元, 孟庆业. 基于 Langevin 问题探讨广义 M-J 集的物理意义[J]. 物理学报, 2004, 53(2): 388 ~ 395.]
  - 19 Shirriff K W. Fractals from simple polynomial composite functions [J]. Computers & Graphics, 1993, 17(6): 701 ~ 703.