模糊形态联想记忆网络及其在细胞图像联想识别中的应用

吴锡生[1),2)] 王士同[2)]
1)(南京理工大学计算机系，南京 210094) 2)(江南大学信息工程学院，无锡 214122)

摘 要 研究了模糊形态双向联想记忆网络(FMBAM)在灰度图像处理中的方法，并利用核的形式来解决灰度图像含随机噪声的正确联想记忆及识别问题，提出了构造灰度图像的核需要满足的条件，给出了寻找核的方法和途径，并应用于细胞图像的联想和识别，通过仿真实验，验证了该方法的有效性和良好性能。

关键词 核 灰度图像 模糊形态学 联想记忆 模糊神经网络
中图法分类号：TP391 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-8961(2006)10-1450-06

Fuzzy Morphological Associative Memories and Their Application in Storing and Recalling Cell Images

WU Xi-sheng[1),2)], WANG Shi-tong[2)]
1)(*Department of Computer, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094)
2)(*School of Information Technology, Southern Yangtze University, Wuxi* 214122)

Abstract This paper attempts to give the novel approach of gray image processing using fuzzy morphological bidirectional associative memories. This approach utilizes kernel patterns to get the correct recalls from randomly noisy gray images. How to find appropriate kernel patterns is also investigated here. The experimental results on storing and recalling gray cell images demonstrate the validity of this approach.

Keywords kernel patterns, gray images, fuzzy morphology, associative memories, fuzzy neural networks

1 引 言

我们知道，人的大脑具有联想、推理、判断和决策能力，也就是说，人的大脑具有从局部推断全局的能力，这种从局部到整体的联想和推理能力就是人工神经网络要解决的主要问题之一，也是当今一些学者感兴趣进行研究的课题。

然而，经典联想记忆网络的存储能力有限，且不具备模糊性解释能力，如 Hopfield 模型等。为此，一些中外学者提出了各种改进的算法，如 Ritter 等人提出了双向形态学联想记忆网络 MBAM[1]，该网络较之传统的 Hopfield 神经网络，在存储能力方面确有显著提高，而且能保证一步内完全回忆，但它不能模糊性解释，使其在记忆模糊规则方面遇到了困难。而由 Kosko[2] 提出的著名的模糊联想记忆 FAM 融合了模糊运算与模糊规则存储双重概念，具备良好的模糊性解释能力，但其即使在无噪声的情况下存储能力也很弱。

为此，文献[3]提出了模糊形态双向联想记忆网络 FMBAM，它较好地解决了记忆模糊规则和提高存储能力的问题，并通过利用核的方法，初步地解决了二值图像抗随机噪声的问题。本文在此基础上，进一步研究了灰度图像的抗随机噪声问题。由

基金项目：国家自然科学基金项目(60225015)；江苏省自然科学基金项目(BK2003017)
收稿日期：2004-11-28；**改回日期**：2005-10-11
第一作者简介：吴锡生(1959～)，男，副教授。1990 年在西北工业大学获电路、信号及系统专业硕士学位，现为南京理工大学在职博士研究生。研究方向为人工智能、模式识别。E-mail：wxs@sytu.edu.cn

于灰度图像与二值图像相比，情况要复杂得多，为此，提出了构造灰度图像的核需要满足的条件，并给出了寻找核的方法和途径，从而对含有一定随机噪声的灰度图像具有了抗噪和完全联想记忆的能力。并应用于细胞图像的联想和识别，通过仿真实验，验证了该方法的有效性和良好性能。

2　FMBAM 的基本内容

设输入向量为 $\boldsymbol{X}^{\xi}=(X_1^{\xi},X_2^{\xi},\cdots,X_n^{\xi})$，输出向量为 $\boldsymbol{Y}^{\xi}=(Y_1^{\xi},Y_2^{\xi},\cdots,Y_n^{\xi})'$，$\boldsymbol{X}^{\xi}$ 和 $\boldsymbol{Y}^{\xi}$ 分别定义在 $\mathbf{R}_+^n$ 和 $\mathbf{R}_+^m$ 上，$\xi=1,2,\cdots,k$，则与经典的神经网络相类似，模糊形态双向联想神经网络 FMBAM 可定义如下：

$$\boldsymbol{M}_{xy}^{\xi}=\boldsymbol{Y}^{\xi}\boxed{\wedge}(\boldsymbol{X}^{\xi})^{-1},\xi=1,\cdots,k$$

式中，$(\boldsymbol{X}^{\xi})^{-1}=\left(\frac{1}{X_1^{\xi}},\frac{1}{X_2^{\xi}},\cdots,\frac{1}{X_n^{\xi}}\right)$，$X_i^{\xi}>0$，$\forall i=1,2,\cdots,n$，即

$$\boldsymbol{Y}^{\xi}\boxed{\wedge}(\boldsymbol{X}^{\xi})^{-1}=\begin{pmatrix} y_1^{\xi}/x_1^{\xi}\cdots y_1^{\xi}/x_n^{\xi}\\ y_2^{\xi}/x_1^{\xi}\cdots y_2^{\xi}/x_n^{\xi}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{\xi}/x_1^{\xi}\cdots y_m^{\xi}/x_n^{\xi}\end{pmatrix}$$

从而 $\boldsymbol{M}_{xy}=\boldsymbol{M}_{xy}^1\vee\boldsymbol{M}_{xy}^2\vee\cdots\vee\boldsymbol{M}_{xy}^k=\bigvee_{\xi=1}^{k}\boldsymbol{Y}^{\xi}\boxed{\wedge}(\boldsymbol{X}^{\xi})^{-1}$。式中符号 $\boxed{\wedge}$ 表示矩阵先进行常规的对应元素的相乘，然后不是相加，而是相应结果的模糊取小操作。

定义 1　一个矩阵 $\boldsymbol{M}_{xy}=(m_{ij})_{m\times n}$ 被称作 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\wedge}$ 的完全联想记忆，当且仅当

$$\boldsymbol{M}_{xy}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$$

定理 1　$\boldsymbol{M}_{xy}$ 是 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\wedge}$ 的完全联想记忆，即 $\boldsymbol{M}_{xy}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}^{\xi}=\boldsymbol{Y}^{\xi}$，$\forall\xi=1,2,\cdots,k$，当且仅当对于矩阵 $\boldsymbol{M}_{xy}$ 的每个 $i=1,2,\cdots,m$ 和每个 $\xi\in\{1,2,\cdots,k\}$，存在某个列 $j_{\xi}^{i}\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有

$$m_{ij_{\xi}^{i}}=y_i^{\xi}\cdot(x_{j_{\xi}^{i}}^{\xi})^{-1},\forall\xi=1,2,\cdots,k$$

式中，j_{ξ}^{i} 表示所取的 j 取决于特定的 i 和 ξ。

以上给出了 $\boldsymbol{X}\rightarrow\boldsymbol{Y}$ 的模糊形态联想记忆网络，下面定义 $\boldsymbol{Y}\rightarrow\boldsymbol{X}$ 的反馈联想网络，相应于 $\boldsymbol{M}_{xy}$，称 $\boldsymbol{Y}\rightarrow\boldsymbol{X}$ 的反馈联想记忆为 $\boldsymbol{W}_{yx}$，而 $\boldsymbol{W}_{yx}$ 可由下式求出：

$$(w_{ij})_{yx}=\frac{1}{(m_{ji})_{xy}}=\frac{1}{\bigvee_{\xi=1}^{k}[y_j^{\xi}\cdot(x_i^{\xi})^{-1}]}=\bigwedge_{\xi=1}^{k}[(y_j^{\xi})^{-1}\cdot x_i^{\xi}]$$

式中，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

定义 2　一个矩阵 $\boldsymbol{W}_{yx}=(w_{ij})_{yx}$ 被称为 $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ 的 $\boxed{\vee}$ 的完全联想记忆，当且仅当 $\boldsymbol{W}_{yx}\boxed{\vee}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}$。这里的符号 $\boxed{\vee}$ 表示矩阵先进行常规的对应元素的相乘，其相应结果再进行模糊取大操作。

与定理 1 相类似，可以得到定理 2。

定理 2　$\boldsymbol{W}_{yx}$ 是 $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ 的 $\boxed{\vee}$ 的完全联想记忆，即 $\boldsymbol{W}_{yx}\boxed{\vee}\boldsymbol{Y}^{\xi}=\boldsymbol{X}^{\xi}$，$\forall\xi=1,2,\cdots,k$，当且仅当对于矩阵 $\boldsymbol{W}_{yx}$ 的每一行 $i=1,2,\cdots,n$，和每个 $\xi\in\{1,2,\cdots,k\}$，存在某个列 $j_{\xi}^{i}\in\{1,2,\cdots,m\}$，有：$w_{ij_{\xi}^{i}}=x_i^{\xi}\cdot(y_{j_{\xi}^{i}}^{\xi})^{-1}$，$\forall\xi=1,2,\cdots,k$。

这样就给出了保证 FMBAM 正确联想的条件，即只要 $\boldsymbol{M}_{xy}$ 和 $\boldsymbol{W}_{yx}$ 分别满足定理 1 和定理 2，就可保证双向完全联想记忆。

把 $\boldsymbol{X}^r$ 含有噪声的向量称为 $\tilde{\boldsymbol{X}}^r$，当 $\boldsymbol{X}^r$ 仅含有腐蚀噪声时，有 $\tilde{\boldsymbol{X}}^r\leqslant\boldsymbol{X}^r$，当 $\tilde{\boldsymbol{X}}^r$ 仅含有膨胀噪声时，有 $\tilde{\boldsymbol{X}}^r\geqslant\boldsymbol{X}^r$。下面给出定理 3，说明 $\boldsymbol{M}_{xy}$ 抗膨胀噪声的能力。

定理 3　对于 $r=1,2,\cdots,k$，设 $\boldsymbol{X}^r$ 的含噪模型用 $\tilde{\boldsymbol{X}}^r$ 表示，那么 $\boldsymbol{M}_{xy}\boxed{\wedge}\tilde{\boldsymbol{X}}^r=\boldsymbol{Y}^r$ 成立，当且仅当以下两式成立：

(1) $\tilde{x}_j^r\geqslant x_j^r\wedge\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{\xi\neq r}[y_i^r(y_i^{\xi})^{-1}x_j^{\xi}])$，$\forall j=1,2,\cdots,n$

(2) 对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，存在一个 $j_i\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $\tilde{x}_{j_i}^r=x_{j_i}^r\wedge(\bigwedge_{\xi\neq r}[y_i^r\cdot(y_i^{\xi})^{-1}\cdot x_{j_i}^{\xi}])$

式中，$(y_i^{\xi})^{-1}=\frac{1}{y_i^{\xi}}$

定理 3 说明，就 $\boldsymbol{M}_{xy}$ 而言，对 $\boldsymbol{X}^r$，$\forall r=1,2,\cdots,k$，具有很强的抗膨胀噪声的能力。根据定理 3，可类似地得到定理 4。

定理 4　对于 $r=1,2,\cdots,k$，设 $\boldsymbol{Y}^r$ 的含噪模型用 $\tilde{\boldsymbol{Y}}^r$ 表示，那么 $\boldsymbol{W}_{yx}\boxed{\vee}\tilde{\boldsymbol{Y}}^r=\boldsymbol{X}^r$ 成立，当且仅当以下两式成立。

(1) $\tilde{y}_i^r\leqslant y_i^r\vee\bigwedge_{j=1}^{n}(\bigvee_{\xi\neq r}[x_j^r(x_j^{\xi})^{-1}y_i^{\xi}])$，$\forall i=1,2,\cdots,m$

(2) 对每一个 $j\in[1,2,\cdots,n]$ 存在一个 $i_j\in[1,2,\cdots,n]$，有 $\tilde{y}_{i_j}^r=y_{i_j}^r\vee(\bigvee_{\xi\neq r}[x_j^r\cdot(x_j^{\xi})^{-1}y_{i_j}^{\xi}])$

定理 4 表明，就 $\boldsymbol{W}_{yx}$ 而言，对 $\boldsymbol{Y}^r$，$\forall r=1,2,\cdots,k$，具有很强的抗腐蚀噪声的能力。（定理 1 到定理 4 的证明参见文献[3]）

3　灰度图像 FMBAM 的核方法

如上所述，FMBAM 的 $\boldsymbol{M}_{xy}$ 和 $\boldsymbol{W}_{yx}$ 分别对膨胀噪

声和腐蚀噪声具有较强的抗噪能力,但它们对随机任意噪声的抗噪能力几乎没有,在 2 维图像 FMBAM 的实验中,对原始图像即使加入 1% 的随机噪声,不管是 $\boldsymbol{M}_{xy}$,还是 $\boldsymbol{W}_{yx}$,其联想记忆的结果都会面目全非。而在实际的应用中,原始图像所受噪声往往呈随机任意噪声的形态,即对原图像而言,其噪声很难表现为纯膨胀或纯腐蚀的情况,这就限制了 FMBAM 的应用领域。

为了解决抗随机任意噪声问题,可以用下述思路来解决,即针对一个 2 维图像 $\boldsymbol{X}$,先找到一个能保持其主要特征的图像 $\boldsymbol{Z}$,并使 $\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{X}$,这样就有可能使对于 $\boldsymbol{X}$ 的随机任意噪声成为对于 $\boldsymbol{Z}$ 的纯膨胀噪声,同样,如果能找到一个保持图像 $\boldsymbol{X}$ 主要特征的图像 $\boldsymbol{H}$,并使 $\boldsymbol{H}\geqslant\boldsymbol{X}$,则就有可能使对于 $\boldsymbol{X}$ 的随机噪声成为对于 $\boldsymbol{H}$ 的纯腐蚀噪声,这样就可以利用上节的结果,对随机噪声有抗噪能力。现在的问题是,$\boldsymbol{Z}$(或 $\boldsymbol{H}$)应该满足什么条件,才能够恢复 $\boldsymbol{X}$ 或得到 $\boldsymbol{X}$ 的联想记忆对 $\boldsymbol{Y}$。

定义 3 设 $\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{Z}^1,\boldsymbol{Z}^2,\cdots,\boldsymbol{Z}^k)$ 是一个 $n\times k$ 阶矩阵,称 $\boldsymbol{Z}$ 是 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\wedge}$ 的核,当且仅当以下两式成立:

(1) $\boldsymbol{M}_{zz}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$

(2) $\boldsymbol{W}_{zy}\boxed{\vee}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}$

定义 3 是 $\boldsymbol{X}\rightarrow\boldsymbol{Y}$ 的异联想,当用 $\boldsymbol{X}$ 替代定义 3 中的 $\boldsymbol{Y}$ 时,即为 $\boldsymbol{X}$ 的自联想。根据定义 3,可以类似的得到定义 4。

定义 4 设 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{H}^2,\cdots,\boldsymbol{H}^k)$ 是一个 $n\times k$ 阶矩阵,称 $\boldsymbol{H}$ 是 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\vee}$ 的核,当且仅当以下两式成立:

(1) $\boldsymbol{W}_{zz}\boxed{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$

(2) $\boldsymbol{M}_{zy}\boxed{\wedge}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}$

从定义 3 中可以看出,由于 $\boldsymbol{M}_{zz}$ 抗膨胀噪声的能力较强,如果对于 $\boldsymbol{X}$ 的随机噪声 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 符合条件 $\boldsymbol{Z}\leqslant\tilde{\boldsymbol{X}}$,即可以看成是 $\boldsymbol{Z}$ 的膨胀噪声,则有可能利用定义 3,正确联想记忆出 $\boldsymbol{Y}$ 或恢复 $\boldsymbol{X}$,从而克服噪声的影响,现需进一步考虑的问题是什么样的 $\boldsymbol{Z}$,才能满足定义 3 或定义 4 的要求。

例 1:设 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}10\\50\\90\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}10\\20\\31\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}20\\30\\80\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Y}_1=\begin{pmatrix}40\\50\\23\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix}30\\27\\20\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}_3=\begin{pmatrix}60\\49\\38\end{pmatrix}$$

根据上述 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$,可以找到以下的一个 $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{Z}_1=\begin{pmatrix}10\\42\\32\end{pmatrix},\boldsymbol{Z}_2=\begin{pmatrix}10\\20\\31\end{pmatrix},\boldsymbol{Z}_3=\begin{pmatrix}20\\30\\47\end{pmatrix}$$

它是 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\wedge}$ 的核,因为可以验证,它满足 $\boldsymbol{M}_{zz}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{W}_{zy}\boxed{\vee}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}$ 两个等式。

同时,如有 $\boldsymbol{X}$ 的随机噪声模型 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 如下:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_1=\begin{pmatrix}10\\43\\68\end{pmatrix},\tilde{\boldsymbol{X}}_2=\begin{pmatrix}10\\20\\31\end{pmatrix},\tilde{\boldsymbol{X}}_3=\begin{pmatrix}51\\30\\106\end{pmatrix}$$

它对 $\boldsymbol{X}$ 而言,既有腐蚀噪声,又有膨胀噪声,但对现在选定的 $\boldsymbol{Z}$ 而言,仅是膨胀噪声,可以验证,它也满足定义 3,即有

$$\boldsymbol{M}_{zz}\boxed{\wedge}\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{Z}\text{ 和 }\boldsymbol{W}_{zy}\boxed{\vee}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}$$

也就是说,现在选定的 $\boldsymbol{Z}$,可以克服 $\boldsymbol{X}$ 的某些随机噪声模型 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 对正确联想记忆的影响。

从上例中可以看出,要成为 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\wedge}$ 的核,首先必有 $\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{X}$,其他条件见定理 5 和定理 2。

定理 5 一个 $n\times k$ 的矩阵 $\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{X}$ 且满足等式 $\boldsymbol{M}_{zz}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$,当且仅当,对于 $r=1,2,\cdots,k$,有以下两式成立:

$$(1)\ x_j^r\geqslant z_j^r\wedge\bigvee_{i=1}^{m}\Big(\bigwedge_{\xi\neq r}[z_i^r\cdot(z_i^\xi)^{-1}\cdot z_j^\xi]\Big)\qquad(1)$$

$$\forall j=1,2,\cdots,n,$$

(2)对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$,存在一个 $j_i\in\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$x_{j_i}^r=z_{j_i}^r\wedge\Big(\bigwedge_{\xi\neq r}[z_i^r\cdot(z_i^\xi)^{-1}\cdot z_{j_i}^\xi]\Big)\qquad(2)$$

证明 设有 $\boldsymbol{M}_{zz}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$,即有 $\boldsymbol{M}_{zz}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}^r=\boldsymbol{Z}^r,r=1,2,\cdots,k$

则有 $z_i^r=(\boldsymbol{M}_{zz}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}^r)_i=\bigwedge_{l=1}^{n}(m_{il}\cdot x_l^r)\leqslant m_{ij}\cdot x_j^r$,$\forall i=1,2,\cdots,m;\forall j=1,2,\cdots,n$

即有 $x_j^r\geqslant\dfrac{z_i^r}{m_{ij}},\forall i=1,2,\cdots,m,\forall j=1,2,\cdots,n$

所以有

$$x_j^r\geqslant\bigvee_{i=1}^{m}\left(\frac{z_i^r}{m_{ij}}\right)=\bigvee_{i=1}^{m}\left(\frac{z_i^r}{\bigvee_{\xi=1}^{k}[z_j^\xi\cdot(z_i^\xi)^{-1}]}\right)$$

$$=\bigvee_{i=1}^{m}\Big(z_i^r\bigwedge_{\xi=1}^{k}[(z_i^\xi)^{-1}z_j^\xi]\Big)$$

$$=\bigvee_{i=1}^{m}\Big(z_i^r\bigwedge_{\xi\neq r}^{k}[(z_i^\xi)^{-1}z_j^\xi]\wedge[(z_i^r)^{-1}z_j^r]\Big)$$

$$=\bigvee_{i=1}^{m}\Big(\bigwedge_{\xi\neq r}^{k}[z_i^r(z_i^\xi)^{-1}z_j^\xi]\wedge z_j^r\Big)$$

$$=z_j^r\wedge\bigvee_{i=1}^{m}\Big(\bigwedge_{\xi\neq r}^{k}[z_i^r(z_i^\xi)^{-1}z_j^\xi]\Big),\forall j=1,2,\cdots,n$$

即有

$$x_j^r \geqslant z_j^r \wedge \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{\xi \neq r}^{k}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right), \forall j=1,2,\cdots,n$$

所以式(1)得证

从式(1)可得：

$$x_j^r \geqslant z_j^r \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right) \tag{3}$$

$$\forall j=1,2,\cdots,n, \forall i=1,2,\cdots,m$$

现假定当 $i=1,2,\cdots,m$ 时，式(3)等号不成立，即有

$$x_j^r > z_j^r \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right)$$

$$\forall j=1,2,\cdots,n, \forall i=1,2,\cdots,m$$

从而有

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r)_i &= \bigwedge_{j=1}^{n}(m_{ij} \cdot x_j^r) \\
&> \bigwedge_{j=1}^{n}\left[m_{ij} \cdot z_j^r \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right)\right] \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n}\left(m_{ij} \cdot \bigwedge_{\xi=1}^{k}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right) \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n}\left[m_{ij} \cdot z_i^r \bigwedge_{\xi=1}^{k}\left[(z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right] \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n}\left(m_{ij} \cdot z_i^r \Big/ \bigvee_{\xi=1}^{k}\left[z_i^\xi (z_j^\xi)^{-1}\right]\right) \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n}\left[m_{ij} \cdot z_i^r / m_{ij}\right] = z_i^r
\end{aligned}$$

即有 $(\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r)_i > Z_i^r$，这与假设 $\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{Z}^r$ 相矛盾，从而表明对每个 i，存在一个列 j_i，满足式(2)。

现进一步证明：假定定理 5 的条件 1 成立，即有：

$$x_i^r \geqslant z_j^r \wedge \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r \cdot (z_i^\xi)^{-1} \cdot z_j^\xi\right]\right), \forall j=1,2,\cdots,n$$

从前面的证明可知，上式要成立，当且仅当 $x_j^r \geqslant z_i^r / m_{ij}$，$\forall i=1,2,\cdots,m$ 和 $\forall j=1,2,\cdots,n$，即有 $m_{ij} \cdot x_j^r \geqslant z_i^r$，$\forall i=1,2,\cdots,m$ 和 $\forall j=1,2\cdots,n$

等价于 $\bigwedge_{j=1}^{n}(m_{ij} \cdot x_j^r) \geqslant z_i^r$，$\forall i=1,2,\cdots,m$

即有 $(\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r)_i \geqslant z_i^r$，$\forall i=1,2,\cdots,m$

从上式可得到

$$\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r \geqslant \boldsymbol{Z}^r, \forall r=1,2,\cdots,k \tag{4}$$

现在再证 $\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r \leqslant \boldsymbol{Z}^r$，$\forall r=1,2,\cdots,k$

设 $\forall r \in \{1,2,\cdots,k\}$ 和 $\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}$，

则有 $(\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r)_i = \bigwedge_{j=1}^{n}(m_{ij} \cdot x_j^r) \leqslant m_{ij_i} \cdot x_{j_i}^r$

利用定理 5 的条件 2，可有：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r)_i &\leqslant \left(m_{ij_i} \cdot \left(z_{j_i}^r \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r \cdot (z_i^\xi)^{-1} \cdot z_{j_i}^\xi\right]\right)\right)\right) \\
&= m_{ij_i} \cdot \bigwedge_{\xi=1}^{k}\left[z_i^r \cdot (z_i^\xi)^{-1} z_{j_i}^\xi\right] \\
&= m_{ij_i} \cdot z_i^r \Big/ \bigvee_{\xi=1}^{k}\left[z_i^\xi (z_{j_i}^\xi)^{-1}\right] \\
&= m_{ij_i} \cdot z_i^r / m_{ij_i} = z_i^r
\end{aligned}$$

即有

$$\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r \leqslant \boldsymbol{Z}^r, \forall r=1,2,\cdots,k \tag{5}$$

联合式(4)、(5)就有 $\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{Z}^r$，故定理 5 得证。

而 $\boldsymbol{W}_{zy} \boxtimes \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}$ 的成立，可以在定理 2 中，用 $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}$ 分别替换 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}$ 来得到。

推论 1　设 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 含有随机噪声的模型，如有一个 $n \times k$ 的矩阵 $\boldsymbol{Z} \leqslant \tilde{\boldsymbol{X}}$ 且满足等式 $\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Z}$，当且仅当，对于 $r=1,2,\cdots,k$，有以下两式成立：

$$(1)\ \tilde{x}_j^r \geqslant z_j^r \wedge \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r \cdot (z_i^\xi)^{-1} \cdot z_j^\xi\right]\right) \tag{6}$$

$$\forall j=1,2,\cdots,n$$

(2) 对每一个 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，存在一个 $j_i \in \{1,2,\cdots,n\}$，有

$$\tilde{x}_{j_i}^r = z_{j_i}^r \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r \cdot (z_i^\xi)^{-1} \cdot z_{j_i}^\xi\right]\right)$$

证明：设有 $\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Z}$，即有 $\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \tilde{\boldsymbol{X}}^r = \boldsymbol{Z}^r$，$r=1,2,\cdots,k$，则有

$z_i^r = (\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \tilde{\boldsymbol{X}}^r)_i = \bigwedge_{l=1}^{n}(m_{il} \cdot \tilde{x}_l^r) \leqslant m_{ij} \cdot \tilde{x}_j^r$，$\forall i=1,2,\cdots,m$；$\forall j=1,2,\cdots,n$，即有

$$\tilde{x}_j^r \geqslant \frac{z_i^r}{m_{ij}}, \forall i=1,2,\cdots,m, \forall j=1,2,\cdots,n$$

所以有

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_j^r &\geqslant \bigvee_{i=1}^{m}\left(\frac{z_i^r}{m_{ij}}\right) = \bigvee_{i=1}^{m}\left(\frac{z_i^r}{\bigvee_{\xi=1}^{k}\left[z_i^\xi \cdot (z_j^\xi)^{-1}\right]}\right) \\
&= \bigvee_{i=1}^{m}\left(z_i^r \bigwedge_{\xi=1}^{k}\left[(z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right) \\
&= \bigvee_{i=1}^{m}\left(z_i^r \bigwedge_{\xi \neq r}^{k}\left[(z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right] \wedge \left[(z_i^r)^{-1} z_j^r\right]\right) \\
&= \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{\xi \neq r}^{k}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right] \wedge z_j^r\right) \\
&= z_j^r \wedge \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{\xi \neq r}^{k}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right), \forall j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}$$

即有

$$\tilde{x}_j^r \geqslant z_j^r \wedge \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{\xi \neq r}^{k}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right), \forall j=1,2,\cdots,n$$

所以式(6)得证

从式(6)可得：

$$\tilde{x}_j^r \geqslant z_j^r \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq r}\left[z_i^r (z_i^\xi)^{-1} z_j^\xi\right]\right) \tag{8}$$

$$\forall j=1,2,\cdots,n, \forall i=1,2,\cdots,m$$

以下的证明步骤与定理 5 后面的证明完全相同，只要用 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 替换 $\boldsymbol{X}$，即可得到以下两式

$$\boldsymbol{M}_{zz} \boxtimes \tilde{\boldsymbol{X}}^r \geqslant \boldsymbol{Z}^r, \forall r=1,2,\cdots,k \tag{9}$$

$$M_{zz} \boxtimes \tilde{X}^r \leqslant Z^r, \forall r = 1,2,\cdots,k \tag{10}$$

联合式(9)、(10)就有 $M_{zz} \boxtimes \tilde{X}^r = Z^r$，故推论 1 得证。

推论 1 表明，一个对于 X 的含有随机噪声的模型 $\tilde{X}$，只要找到的核 Z，满足推论 1 的条件，则利用这样的 Z，就可以克服 $\tilde{X}$ 的随机噪声的干扰，而得到正确的联想记忆。

4 FMBAM 用于细胞图像的联想和识别

上节给出了作为核 Z 必须满足的条件，即 Z 只要满足定理 5 的两个条件或使定义 3 的两个等式成立，即可成为核。这样对于二值图像而言，寻找的过程相对来说比较简单，但对于灰度图像来说，要找到一个符合条件的核，要验证上述条件，仍然是比较困难的，即使对只有 256 个灰度级 50 × 50 的图像来说，找出一个核的计算量就比较大，而随着像素点的增加，其难度和计算量更是呈几何级数地增加，为此本文提出了如下的方法，以提高找核 Z 的成功率：

（1）对于一个 $n \times k$ 阶的矩阵 X，其每行和每列中的最小值保持不变；

（2）在此基础上以 5% ~10% 的概率对 X 中的其余像素点进行腐蚀操作，得到待检验的核 $\bar{Z}$；

（3）再用定义 3 的两个条件 $M_{\bar{Z}\bar{Z}} \boxtimes X = \bar{Z}$ 和 $W_{\bar{Z}Y} \boxtimes \bar{Z} = Y$ 进行检验，如符合，则 $\bar{Z}$ 即为一个真核 Z。

这里需注意的是，符合条件的真核并不是唯一的，它可以是多个，同时，在实际的应用中，对 X 含有随机噪声的模型 $\tilde{X}$，所选定的核 Z，还必须满足推论 1，才可起到抗随机噪声的功能。因此，对于特定的 $\tilde{X}$，并非任选一个核 Z 就能满足推论 1，所以有必要找到一组核，并在联想的过程中进行选择，即核不是一个，是动态选择的，以找到能够正确联想记忆的核 Z。当然，如果随机噪声超过了一定的强度，或者说，对表示 X 主要特征的一些元素受到了噪声的干扰，就不能完全正确联想记忆了。

根据上述思想，对 5 个细胞图像进行了仿真实验。为了减小计算量，把得到的 5 个细胞彩色图像（单核细胞、淋巴细胞、嗜酸性粒细胞、中性分叶核粒细胞和中性杆状细胞）先用 Matlab 的 rgb2gray( ) 函数转换成灰度图像，再适当缩小，变换成如图 1 所示的 50 × 50 的图像。

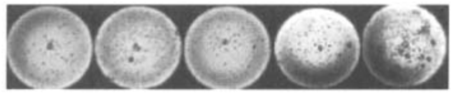

图 1　5 种细胞的原始灰度图像

Fig. 1　Initial gray image of five cells

随后，按照前述找核方法的 3 个步骤，分别找到了多个满足条件的核 Z。为了察看核模式的 FMBAM 抗随机噪声的能力，用 3% 的概率对原图像 X 加入随机噪声，然后利用核的方法进行联想记忆，实验结果如图 2 所示。图中第 1 行是含噪声的图像，第 2 行是在多个核中选定的最佳核，第 3 行即为联想记忆的结果。从图中可以看出，原图像 X 得到了完全的恢复。当然，图 2 第 2 行的核是在多个满足条件的核中寻找出的最佳核。在实验过程中也有找不到最佳核的情况，此时表明噪声太强或噪声影响了原图像的主要特征像素点，这样原图像就不能完全正确恢复了。

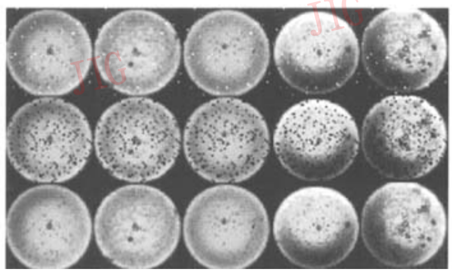

图 2　对原图像 X 加入 3% 随机噪声后的联想结果（上排是加噪后的图像，中间是核，下排是结果图像）

Fig. 2　The result of associated memory to initial image corrupted with 3% randomly generated noise (the top is corrupted image. the middle is kernel. the bottom is result of image.)

同时，也做了 FMBAM 和利用核的 FMBAM 进行图像识别的对比实验。实验时，首先根据上述 5 个细胞图像（作为 $X = [X^1, X^2, X^3, X^4, X^5]$）计算得到 FMBAM 的自联想记忆矩阵 M_{XX} 和利用核的 FMBAM 的联想记忆矩阵 M_{ZZ} 和 W_{ZX}。所解决的问题是，有一个图像样本，可能是上述 5 个图像之一，但含有随机噪声，希望能识别是不是原图像之一，如是，则判定是哪一个。为此，任选 $X^i, i = 1,2,\cdots,5$，对选定的 X^i 加入 5% 的随机噪声得到 $\tilde{X}^i$，以这样的信号作为输入，分别计算 $M_{XX} \boxtimes \tilde{X}$ 和 $M_{ZZ} \boxtimes \tilde{X} = Z, W_{ZX} \boxtimes Z = X$，来检验它们的匹配率（即该含噪图

像经过联想记忆网络计算后,与原图像元素的相同程度)。现假若选定 $i=1$,即现在的输入是 $X=[\tilde{X}^1,\tilde{X}^1,\tilde{X}^1,\tilde{X}^1,\tilde{X}^1]$,最后应判定输入的是第一个图像 X^1,两种算法的计算结果如表 1 所示。

表 1　利用核的 FMBAM 与 FMBAM 匹配率的比较

Tab. 1　Matching percentage of comparing of kernel' FMBAM and FMBAM

方法	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5
利用核的 FMBAM 的匹配率(%)	99.94	3.92	5.20	2.92	2.12
FMBAM 的匹配率(%)	13.56	0.58	0.65	0.62	0.53

表 1 是 10 次计算的平均值,从表中可以看出,利用核的 FMBAM 完全能够识别出原始图像是 X^1,而 FMBAM 方法则不可能。当 $i=2,\cdots,5$ 时,可以得到基本相同的结果,所以利用核的 FMBAM 也为图像的识别提供了一种新的途径。

5　结　论

本文主要研究了模糊形态双向联想记忆网络 FMBAM 在灰度图像处理中的方法问题,提出了选择核必须满足的条件和寻找灰度图像核的方法和途径,从而在一定程度上解决了灰度图像含有随机噪声的抗噪问题。并通过对细胞图像的仿真实验,验证了该方法对抗随机噪声的有效性和良好性能,初步解决了灰度图像的联想记忆和识别问题。但文中处理的是灰度图像,且仅为 50×50 个像素点,它的计算量就已比较大,要涉及到多次的 2 500×2 500 阶矩阵的乘法及取大、取小操作,且并不是每次都能得到核 Z,因此,如要处理更多的像素点或彩色图像的话,计算量将急剧增大,其速度将会使人无法忍受,效率低,所以在进一步提高找核的准确性,改善找核的方法,以及提高算法的效率等 方面还有许多问题需要研究。

参考文献(References)

1　Ritter G X, Diaz-de-Leonand J L, Sussner P. Morphological bidirectional associative memories[J]. Neural Network, 1999, **12**(6): 851～867.

2　Kosko B. Neural networks and fuzzy systems[M]. Endlewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.

3　WU Xi-sheng, WANG Shi-tong. Bi-directional fuzzy morphological associative memory and its robust analysis for random noise[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2005, **3**(18): 257～262.[吴锡生,王士同. 双向模糊形态联想记忆网络及其抗随机噪声的研究[J]. 模式识别与人工智能, 2005, **3**(18): 257～262.]

4　Sussner P. Observations on morphological associative memories and the kernel method [J]. Neurocomputing, 2000, **31**(1-4): 167～183.

5　Sussner P. Associative morphological memories based on variations of the kernel and dual kernel methods[J]. Neural Networks, 2003, **16**(5-6): 625～632.